Die Gamma-Funktion, das Produkt von Wallis und die Stirling'sche Formel

Zuerst wollen wir die *Gamma-Funktion* definieren, die eine Verallgemeinerung von $n!$ ist. Dazu benötigen wir einige Resultate.

Lemma 1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert das Integral* $\displaystyle\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$ *und es gilt* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-t} = 0\,.$

Beweis. Wir beweisen dieses Resultat durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ und $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}(1-e^{-r}) = 1$.

Sei $n > 1$. Dann ist

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{n-1}}{e^t} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{(n-1)t^{n-2}}{e^t} = (n-1)\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{n-2}}{e^t}}_{=0} = 0\,.$$

Weiters erhalten wir durch partielle Integration, dass

$$\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r t^{n-1}\underbrace{e^{-t}}_{=(-e^{-t})^\cdot}\,dt =$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\left(-r^{n-1}e^{-r} + \underbrace{0^{n-1}e^0}_{=0} + (n-1)\int_0^r t^{n-2}e^{-t}\,dt\right) =$$
$$= \underbrace{\lim_{r\to+\infty}\left(-r^{n-1}e^{-r}\right)}_{=0} + (n-1)\lim_{r\to+\infty}\int_0^r t^{n-2}e^{-t}\,dt = (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\,dt$$

gilt. Weil nach Induktionsvoraussetzung $\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\,dt$ konvergiert, konvergiert daher auch $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$. □

Proposition 1. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ konvergiert* $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ *und es gilt* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t} = 0\,.$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \le n$. Für $t \ge 1$ gilt dann $0 \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{n-1}e^{-t}$. Weil $\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-t} = 0$ nach Lemma 1 gilt, erhalten wir $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t} = 0$. Wegen Lemma 1 konvergiert $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$ und daher konvergiert auch $\int_1^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$. Deshalb konvergiert auch $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ nach dem Majorantentest.

Falls $x \geq 1$ ist, dann ist $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ stetig auf $[0,1]$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung existiert daher $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Im Fall $0 < x < 1$ ist $0 \leq t^{x-1}\underbrace{e^{-t}}_{\leq 1} \leq t^{x-1}$. Weil dann $x-1 > -1$, konvergiert $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$. Nach dem Majorantentest konvergiert daher $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Somit existieren sowohl $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ als auch $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Daher konvergiert auch $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. □

Definition 1. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Dann setze

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\ .$$

Man nennt $\Gamma : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ die Gamma-Funktion.

Wegen Proposition 1 ist $\Gamma(x)$ in Definition 1 wohldefiniert. Man könnte $x! := \Gamma(x+1)$ definieren.

Lemma 2. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ konvergiert* $\displaystyle\int_0^\infty \left|t^{x-1}e^{-t}\log t\right|\,dt\,.$

Beweis. Es ist $t^{x-1}e^{-t}\log t = (t^{x-1}\log t)e^{-t}$. Nachdem

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$$

gibt es ein $R > 0$ mit $R \geq 1$, sodass $\frac{\log t}{t} \leq 1$ für alle $t \geq R$ gilt. Somit gilt $\log t \leq t$ für alle $t \geq R$. Daher ist für $t \geq R$

$$0 \leq t^{x-1}e^{-t}\underbrace{\log t}_{\leq t} \leq t^x e^{-t}\ .$$

Nach Proposition 1 konvergiert $\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$, und deshalb konvergiert auch $\int_R^\infty t^x e^{-t}\,dt$. Daher konvergiert $\int_R^\infty t^{x-1}e^{-t}\log t\,dt = \int_R^\infty |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ wegen des Majorantentests.

Jetzt betrachten wir den Fall $x > 1$. Weil

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} t^{x-1}\log t &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\log t}{t^{1-x}} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) = \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{(1-x)t^{-x}} = -\frac{1}{x-1}\underbrace{\lim_{t\to 0^+} t^{x-1}}_{=0} = 0\end{aligned}$$

kann die Funktion $t \mapsto |t^{x-1}e^{-t}\log t|$ zu einer stetigen Funktion auf $[0,R]$ fortgesetzt werden. Deshalb existiert $\int_0^R |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Somit konvergiert $\int_0^\infty |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ im Fall $x > 1$.

Schließlich nehmen wir an, dass $0 < x \leq 1$. Wegen

$$\lim_{t\to 0^+}(-t^{\frac{x}{2}}\log t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\log t}{-\frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}} = \left(\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{x}{2}\frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}}} = \frac{2}{x}\underbrace{\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{x}{2}}}_{=0} = 0$$

gibt es ein $r \in (0,1)$ mit $r < R$, sodass $-t^{\frac{x}{2}}\log t \leq 1$ für alle $t \in (0,r)$. Daher ist $-\log t \leq \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}$ für alle $t \in (0,r)$, und deshalb gilt

$$0 \leq -t^{x-1}e^{-t}\log t = t^{x-1}\underbrace{e^{-t}}_{\leq 1}\underbrace{(-\log t)}_{\leq \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}} \leq t^{\frac{x}{2}-1}$$

für alle $t \in (0,r)$. Weil $\frac{x}{2}-1 > -1$, konvergiert $\int_0^r t^{\frac{x}{2}-1}\,dt$. Nach dem Majorantentest konvergiert daher $\int_0^r(-t^{x-1}e^{-t}\log t)\,dt = \int_0^r |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto |t^{x-1}e^{-t}\log t|$ auf $[r,R]$ existiert $\int_r^R |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Somit konvergiert $\int_0^\infty |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ auch im Fall $0 < x \leq 1$. □

Proposition 2. *Die Gamma-Funktion ist stetig.*

Beweis. Sei $t > 0$. Betrachte die Funktion $x \mapsto t^{x-1}$ auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann gilt

$$\big(\underbrace{t^{x-1}}_{=e^{(x-1)\log t}}\big)' = e^{(x-1)\log t}\log t = t^{x-1}\log t\ .$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Weiters sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ und $|x-y| < \min\left\{1, \frac{x}{2}\right\}$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz, dass es ein ξ zwischen x und y gibt, sodass $t^{x-1} - t^{y-1} = t^{\xi-1}(\log t)(x-y)$. Es ist $\frac{x}{2} - 1 = x - 1 - \frac{x}{2} \leq \xi - 1 \leq x$, weil ξ zwischen x und y liegt, und $|x-y| < \min\left\{1, \frac{x}{2}\right\}$.

Für $t \geq 1$ ist dann $t^{\xi-1} \leq t^x$, und wegen $\log t \geq 0$ ist deshalb $0 < t^{\xi-1}\log t \leq t^x \log t$. Somit ist

$$|\underbrace{t^{x-1} - t^{y-1}}_{=t^{\xi-1}(\log t)(x-y)}| = \underbrace{t^{\xi-1}(\log t)}_{\leq t^x \log t}|x-y| \leq t^x(\log t)|x-y|\ .$$

Daher ist $|(t^{x-1} - t^{y-1})e^{-t}| \leq t^x e^{-t}(\log t)|x-y|$. Nach Lemma 2 konvergiert

$\int_0^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt$, und daher konvergiert auch $\int_1^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt$. Somit ist

$$\begin{aligned} &\left|\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt - \int_1^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt\right| \le \\ (1) \qquad &\le \int_1^\infty \underbrace{|(t^{x-1} - t^{y-1}) e^{-t}|}_{\le t^x e^{-t} (\log t)|x-y|} \le |x-y| \int_1^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt\,. \end{aligned}$$

Falls hingegen $t \le 1$, dann ist $t^{\xi-1} \le t^{\frac{x}{2}-1}$, und wegen $\log t \le 0$ ist somit $0 < -t^{\xi-1} \log t \le -t^{\frac{x}{2}-1} \log t$. In diesem Fall ist deshalb

$$|\underbrace{t^{x-1} - t^{y-1}}_{=t^{\xi-1}(\log t)(x-y)}| = \underbrace{-t^{\xi-1}(\log t)}_{\le -t^{\frac{x}{2}-1} \log t}|x-y| \le |t^{\frac{x}{2}-1} \log t||x-y|\,.$$

Also ist $|(t^{x-1} - t^{y-1}) e^{-t}| \le |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t||x-y|$. Wegen Lemma 2 konvergiert $\int_0^\infty |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t|\, dt$, und deshalb konvergiert auch $\int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t|\, dt$. Daher ist

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt - \int_0^1 t^{y-1} e^{-t}\, dt\right| \le \\ (2) \qquad &\le \int_0^1 \underbrace{|(t^{x-1} - t^{y-1}) e^{-t}|}_{\le |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t||x-y|} \le |x-y| \int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t|\, dt\,. \end{aligned}$$

Setze $C := \int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t|\, dt + \int_1^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt$. Dann ist $C > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} |\underbrace{\Gamma(x)}_{=\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt} - \underbrace{\Gamma(y)}_{=\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt}| &= \left|\int_0^\infty \left(t^{x-1} - t^{y-1}\right) e^{-t}\, dt\right| \le \\ &\le \left|\int_0^1 \left(t^{x-1} - t^{y-1}\right) e^{-t}\, dt\right| + \left|\int_1^\infty \left(t^{x-1} - t^{y-1}\right) e^{-t}\, dt\right|\,. \end{aligned}$$

Wegen (1) und (2) ist daher

$$\begin{aligned} |\Gamma(x) - \Gamma(y)| &\le \underbrace{\left|\int_0^1 \left(t^{x-1} - t^{y-1}\right) e^{-t}\, dt\right|}_{\le |x-y| \int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t|\, dt} + \underbrace{\left|\int_1^\infty \left(t^{x-1} - t^{y-1}\right) e^{-t}\, dt\right|}_{\le |x-y| \int_1^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt} \le \\ &\le \underbrace{\left(\int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t} \log t|\, dt + \int_1^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt\right)}_{=C \quad \text{nach Definition von } C} |x-y| = C|x-y|\,. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$|\Gamma(x) - \Gamma(y)| \leq C|x - y| \tag{3}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ und $|x - y| < \min\left\{1, \frac{x}{2}\right\}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{C}, 1, \frac{x}{2}\right\}$. Sei jetzt $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ und $|y - x| < \delta$. Dann gilt wegen (3), dass

$$|\Gamma(x) - \Gamma(y)| \leq C\underbrace{|x - y|}_{<\delta \leq \frac{\varepsilon}{C}} < \varepsilon\ .$$

Deshalb ist die Gamma-Funktion stetig. □

Jetzt beweisen wir die *Funktionalgleichung* der Gamma-Funktion.

Proposition 3. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x > 0$ *gilt* $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Beweis. Partielles Integrieren ergibt

$$\int t^x \underbrace{e^{-t}}_{=(-e^{-t})^\cdot} dt = -t^x e^{-t} + \int x t^{x-1} e^{-t}\, dt = -t^x e^{-t} + x \int t^{x-1} e^{-t}\, dt\ .$$

Wegen Proposition 1 ist $\lim_{r\to+\infty} r^x e^{-r} = 0$. Da $x > 0$ ist $0^x e^{-0} = 0$ und daher ist

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \underbrace{-\lim_{r\to+\infty} (r^x e^{-r})}_{=0} + \underbrace{0^x e^{-0}}_{=0} + x \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt}_{=\Gamma(x)} = x\Gamma(x)\ ,$$

also $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. □

Korollar. *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $\Gamma(n + 1) = n!$.

Beweis. Wir beweisen das Korollar durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist

$$\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^0}_{=1} e^{-t}\, dt = \underbrace{-\lim_{r\to\infty} e^{-r}}_{=0} + 1 = 1 = 0!\ .$$

Sei $n > 0$. Dann ist nach Proposition 3

$$\Gamma(n + 1) = n \underbrace{\Gamma(n)}_{=(n-1)!} = n(n - 1)! = n!\ ,$$

also $\Gamma(n + 1) = n!$. □

Als nächstes wollen wir das *Produkt von Wallis*, also $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots$, berechnen.

Proposition 4. *Es gilt* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 2$. *Weiters gelten* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \frac{\pi}{2}$ *und* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x \, dx = 1$.

Beweis. Es ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^0 x}_{=1} dx = \frac{\pi}{2}$ und nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^1 x}_{=(-\cos x)'} dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$. Sei $n \geq 2$. Unter Verwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x) \underbrace{(\sin x)}_{=(-\cos x)'} dx =$$

$$= -\sin^{n-1} \underbrace{\tfrac{\pi}{2} \cos \tfrac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\sin^{n-1} 0}_{=0} \cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin^{n-2} x)\underbrace{(\cos x)(\cos x)}_{=\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \, .$$

Deshalb ist $n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$, woraus sofort das gewünschte Resultat folgt. □

Proposition 5. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gelten*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \quad \textit{und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} \, .$$

Beweis. Wir beweisen das Resultat durch Induktion nach n. Im Fall $n = 1$ ist nach Proposition 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \frac{2}{3} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x \, dx}_{=1} = \frac{2}{3} \, .$$

Sei $n > 1$. Dann gilt nach Proposition 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,dx}_{=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \quad \text{und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx}_{=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\,,$$

womit unser Resultat bewiesen ist. □

Damit können wir jetzt das Produkt von Wallis berechnen. Beachte, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots \quad \text{und}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \tfrac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2n-2}{2n-3}\cdot\tfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\tfrac{2n}{2n-1}\cdot\tfrac{2n}{2n+1}\,.$$

Proposition 6. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Beweis. Setze $a_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)}$. Sei $n \geq 2$. Auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $x \mapsto \sin x$ stetig, es gilt $0 \leq \sin x \leq 1$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Daher ist $0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ und $\sin^{2n+1}\frac{\pi}{2} = 1$. Somit gilt nach Proposition 5, dass

$$0 < \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx}_{=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}} \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx}_{=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}} \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx}_{=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}} \tag{4}$$

Umformen der zweiten Ungleichung in (4) ergibt

$$\underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}_{=a_n} \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

also $a_n \leq \frac{\pi}{2}$. Aus der dritten Ungleichung in (4) erhalten wir durch Umformen, dass $\frac{\pi}{2} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}$. Durch Multiplizieren mit $\frac{2n}{2n+1}$

ergibt sich

$$\underbrace{\frac{2n}{2n+1}}_{=\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}}\frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}_{=a_n},$$

also $\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\frac{\pi}{2} \leq a_n$. Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = 1$ gilt deshalb

$$\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\frac{\pi}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}},$$

woraus sich $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ ergibt, und unser Resultat bewiesen ist. $\square$

Schließlich wollen wir die *Stirling'sche Formel* beweisen, die eine Näherungsformel für $n!$ liefert. Salopp gesagt gilt $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Zuvor müssen wir dazu einige Hilfsresultate beweisen.

Lemma 3. *Es seien $a, u \in \mathbb{R}$ mit $u > 0$. Weiters sei $f : [a-u, a+u] \to \mathbb{R}$ eine konkave Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_{a-u}^{a+u} f(x)\,dx \leq 2uf(a)\,.$$

Beweis. Sei $t \in [0, u]$. Dann ist $a = \frac{1}{2}(a-t) + \frac{1}{2}(a+t)$. Weil f konkav ist, gilt $f(a) \geq \frac{1}{2}f(a-t) + \frac{1}{2}f(a+t)$. Daher ist

$$\underbrace{\int_0^u f(a)\,dt}_{=uf(a)} \geq \frac{1}{2}\int_0^u f(a-t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^u f(a+t)\,dt\,.$$

Durch die Substitution $s = a - t$ erhalten wir

$$\int_0^u f(a-t)\,dt = \int_a^{a-u}(-f(s))\,ds = -\int_a^{a-u} f(s)\,ds = \int_{a-u}^a f(s)\,ds\,,$$

und die Substitution $s = a + t$ liefert

$$\int_0^u f(a+t)\,dt = \int_a^{a+u} f(s)\,ds\,.$$

Deshalb ist $uf(a) \geq \frac{1}{2}\int_{a-u}^a f(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_a^{a+u} f(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{a-u}^{a+u} f(s)\,ds$, woraus sich $2uf(a) \geq \int_{a-u}^{a+u} f(s)\,ds$ ergibt. $\square$

Lemma 4. *Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt* $\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \log \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) > 1$.

Beweis. Betrachte die Funktion $f(x) := \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ als eine Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f'(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{= -\frac{1}{x^2+x}} =$$

$$= \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2 + x} .$$

Daraus ergibt sich

$$f''(x) = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{= -\frac{1}{x^2+x}} - \frac{1}{x^2 + x} - \left(x + \frac{1}{2}\right) (-1) \frac{1}{(x^2 + x)^2} (2x + 1) =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{x^2 + x}}_{\frac{1}{(x^2+x)^2}(-2x^2-2x)} + \frac{1}{(x^2 + x)^2} \left(2x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{(x^2 + x)^2} > 0 .$$

Weil $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$, ist f' streng monoton wachsend, und daher ist $f'(x) < \lim_{y \to +\infty} f'(y)$ für alle $x > 0$. Wegen $f'(y) = \log \left(1 + \frac{1}{y}\right) - \frac{y + \frac{1}{2}}{y^2 + y}$ und $\frac{y+\frac{1}{2}}{y^2+y} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2}}{1 + \frac{1}{y}}$ ist

$$f'(x) < \lim_{y \to +\infty} f'(y) = \lim_{y \to +\infty} \left(\log \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2}}{1 + \frac{1}{y}}}_{\to 0} \right) = \log 1 + 0 = 0 .$$

Es ist daher $f'(x) < 0$ für alle $x > 0$, und deshalb ist f streng monoton fallend. Somit ist $f(x) > \lim_{y \to +\infty} f(y)$ für alle $x > 0$. Wir erhalten

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = \lim_{y \to +\infty} \left(\left(y + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{y}\right) \right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y + \frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(„\frac{0}{0}“ \right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{y}} \left(-\frac{1}{y^2}\right)}{-\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{y^2 + y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2y}\right)^2}{1 + \frac{1}{y}} = 1 .$$

Somit ist $\left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = f(x) > 1$. $\square$

Satz 1. *Es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$.

Beweis. Betrachte die Funktion $f(x) := \log x$ auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Deshalb ist $x \mapsto \log x$ konkav. Für $k \in \mathbb{N}$ ist daher nach Lemma 3

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x \, dx \le 2\frac{1}{2} \log k = \log k \ .$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x \, dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x \, dx}_{\le \log k} \le \sum_{k=1}^{n} \log k = \log \prod_{k=1}^{n} k = \log n! \ .$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{=x'} \log x \, dx = x \log x - \int \underbrace{x\frac{1}{x}}_{=1} \, dx = x \log x - x \ .$$

Wegen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung ist daher

$$\log n! \ge \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x \, dx =$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) - \underbrace{\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}}_{=-\frac{\log 2}{2}} + \frac{1}{2} =$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2} \ .$$

Es gilt daher

$$\log n! \ge \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2} \ . \tag{5}$$

Setze $b_n := \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n - \underbrace{\log(n+1)!}_{=\log n! + \log(n+1)} + \\
&\quad + \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}+1\right)\log(n+1)}_{=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1)+\log(n+1)} - (n+1) = \\
&= \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n - \log n! - \log(n+1) + \\
&\quad + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) + \log(n+1) - (n+1) = \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{(\log(n+1) - \log n)}_{=\log\frac{n+1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>1 \quad \text{wegen Lemma 4}} - 1 > 0\,.
\end{aligned}$$

Somit ist $b_{n+1} < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend. Weiters ist wegen (5)

$$\begin{aligned}
b_n &= \underbrace{\log n!}_{\geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n \geq \\
&\geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n = \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - \log n\right)}_{=\log\frac{n+\frac{1}{2}}{n}} + \frac{\log 2}{2} = \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\underbrace{\frac{n+\frac{1}{2}}{n}}_{=1+\frac{1}{2n}} + \frac{\log 2}{2} = \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{>0}\log\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{>1} + \frac{\log 2}{2} > \frac{\log 2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Also $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt. Daher konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Setze $\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$ und $\alpha := e^{\beta}$. Dann ist $\alpha > 0$. Weiters definiere

$a_n := \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. Wir erhalten nach der Definition von b_n, dass

$$e^{b_n} = e^{\log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n} = \underbrace{e^{\log n!}}_{=n!} \cdot \underbrace{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n}}_{=n^{-n-\frac{1}{2}} = n^{-n}\cdot n^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^n =$$

$$= n! \cdot \underbrace{n^{-n}}_{=\frac{1}{n^n}} \cdot \underbrace{n^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \underbrace{e^n}_{=\frac{1}{\frac{1}{e^n}}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = a_n$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto e^x$ ergibt sich daraus

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{a_n}_{=e^{b_n}} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = \underbrace{e^{\beta}}_{=\alpha} = \alpha \ .$$

Da $\alpha \neq 0$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^2}{a_{2n}} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$. Es ist

$$\frac{{a_n}^2}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}} = \frac{(n!)^2 e^{2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)! n^{2n} n e^{2n}} =$$

$$= \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}} = \underbrace{\frac{(2^n \cdot n!)}{(2n)!}}_{=\frac{2\cdot\ 4\cdot\ 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot\ (2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot(2n)}} \underbrace{(2^n \cdot n!)}_{=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)} \sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}\sqrt{\frac{2}{n}} \ .$$

Wir setzen jetzt $c_n := \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}\sqrt{\dfrac{2}{n}}$. Nach den obigen Überlegungen ist daher $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^2}{a_{2n}} = \alpha$. Deshalb ergibt sich, dass $\lim_{n\to\infty} {c_n}^2 = \alpha^2$. Es ist

$$
\begin{aligned}
{c_n}^2 &= \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} \sqrt{\frac{2}{n}} \right)^2 = \\
&= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)} \frac{2}{n} = \\
&= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)} \frac{2}{n} = \\
&= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \underbrace{(2n+1)\frac{2}{n}}_{=4+\frac{2}{n}} = \\
&= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \left(4 + \frac{2}{n}\right) .
\end{aligned}
$$

Nach Proposition 6 ist $\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$ (Proposition 6 ist das Produkt von Wallis). Daher ist

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 = \lim_{n\to\infty} {c_n}^2 &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}}_{\to \frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(4 + \frac{2}{n}\right)}_{\to 4} = \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi .
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Somit gilt

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}}_{=a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=\alpha=\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1 ,
$$

womit unser gewünschtes Resultat bewiesen ist. □