1) Betrachte die durch die Gleichung $72\,{x_1}^2+32\,{x_2}^2-42\,x_1x_2-1026\,x_1+144\,x_2+2025=0$ gegebene Kurve 2. Ordnung.

a) Bestimme die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters gib die Brennpunkte (bzw. Brennpunkt und Leitlinie) dieser Kurve 2. Ordnung (in der ursprünglichen Lage) an.

b) Berechne die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung, die durch den Punkt $\begin{pmatrix}34\\33\end{pmatrix}$ gehen, und bestimme die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve.

c) Für die durch $T(x):=\frac{1}{36\sqrt{46}}\left(\begin{pmatrix}45\sqrt{23}&0\\-84&128\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-360\sqrt{23}\\288\end{pmatrix}\right)$ definierte Abbildung $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bestimme das Bild dieser Kurve 2. Ordnung unter T.

d) Bestimme die Bilder der Brennpunkte dieser Kurve 2. Ordnung unter T, sowie die Brennpunkte des Bildes dieser Kurve unter T, wobei T die in Beispiel c) gegebene Abbildung ist.

2) Betrachte die durch die Gleichung $11\,{x_1}^2-28\,{x_2}^2-80\,x_1x_2+64\,x_1+808\,x_2+440=0$ gegebene Kurve 2. Ordnung.

a) Bestimme die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters gib die Brennpunkte (bzw. Brennpunkt und Leitlinie) dieser Kurve 2. Ordnung (in der ursprünglichen Lage) an.

b) Berechne die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung, die durch den Punkt $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ gehen, und bestimme die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve.

c) Für die durch $T(x):=\frac{1}{106\sqrt{11}}\left(\begin{pmatrix}0&424\\11\sqrt{53}&-40\sqrt{53}\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1272\\32\sqrt{53}\end{pmatrix}\right)$ definierte Abbildung $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bestimme das Bild dieser Kurve 2. Ordnung unter T.

d) Bestimme die Bilder der Brennpunkte dieser Kurve 2. Ordnung unter T, sowie die Brennpunkte des Bildes dieser Kurve unter T, wobei T die in Beispiel c) gegebene Abbildung ist.

Peter Raith, Wien, 2023

Lösungen:

1) Hier ist die Gleichung der Kurve durch $x^tAx+a^tx+a_0=0$ mit $A=\begin{pmatrix}72&-21\\-21&32\end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix}-1026\\144\end{pmatrix}$ und $a_0=2025$ gegeben. Eine Skizze dieser Kurve findet man in Abbildung 1.

a) Um die Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom $p(x):=\det(A-x\,\mathrm{id})=\det\begin{pmatrix}72-x&-21\\-21&32-x\end{pmatrix}=x^2-104x+1863$. Dessen Nullstellen sind $52\pm\sqrt{2704-1863}=52\pm\underbrace{\sqrt{841}}_{=29}=81,23$.

Variante 1: Jetzt berechnen wir einen Eigenvektor zu 23, also $\begin{array}{cc|c}49&-21&0\\-21&9&0\end{array}\to\begin{array}{cc|c}7&-3&0\\0&0&0\end{array}$, daher ist $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu 23, dieser hat die Länge $\sqrt{58}$. Nachdem A symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu 81 senkrecht darauf stehen, also ist $\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu 81. Setze $S := \frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}3 & 7\\7 & -3\end{pmatrix}$, und definiere $x := Sz$ (da S orthogonal ist, ist dann $z = S^t x$).

Es ist daher $0 = x^tAx + a^tx + a_0 = z^tS^tASz + (S^ta)^tz + a_0 = 23\,{z_1}^2 + 81\,{z_2}^2 - \frac{2070}{\sqrt{58}}z_1 - \frac{7614}{\sqrt{58}}z_2 + 2025 = 23\left({z_1}^2 - \frac{90}{\sqrt{58}}z_1\right) + 81\left({z_2}^2 - \frac{94}{\sqrt{58}}z_2\right) + 2025 = 23\left(z_1 - \frac{45}{\sqrt{58}}\right)^2 + 81\left(z_2 - \frac{47}{\sqrt{58}}\right)^2 - 1863$. Wir setzen jetzt $y := z + \frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}-45\\-47\end{pmatrix}$ (also $z = y + \frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}45\\47\end{pmatrix}$). Somit ist $23\,{y_1}^2 + 81\,{y_2}^2 - 1863 = 0$, und daher $\left(\frac{y_1}{9}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{23}}\right)^2 - 1 = 0$. Letzteres ist die Kurve in 1. Hauptlage. Daher ist unsere Kurve eine Ellipse mit $a = 9$, $b = \sqrt{23} \approx 4.7958315233$ und $e = \sqrt{58} \approx 7.6157731059$.

In „y-Koordinaten“ sind die Brennpunkte $\begin{pmatrix}\sqrt{58}\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-\sqrt{58}\\0\end{pmatrix}$, das ergibt dann in „$z$-Koordinaten“ $\frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}103\\47\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}-13\\47\end{pmatrix}$. Durch $x = Sz$ erhält man dann für die Brennpunkte der ursprünglichen Ellipse die Punkte $f_1 = \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$.

Variante 2: Jetzt berechnen wir einen Eigenvektor zu 81, also $\begin{array}{cc|c}-9 & -21 & 0\\-21 & -49 & 0\end{array} \to \begin{array}{cc|c}3 & 7 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}$, daher ist $\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu 81, dieser hat die Länge $\sqrt{58}$. Nachdem A symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu 23 senkrecht darauf stehen, also ist $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu 23. Setze $S := \frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}-7 & 3\\3 & 7\end{pmatrix}$, und definiere $x := Sz$ (da S orthogonal ist, ist dann $z = S^tx$).

Es ist daher $0 = x^tAx + a^tx + a_0 = z^tS^tASz + (S^ta)^tz + a_0 = 81\,{z_1}^2 + 23\,{z_2}^2 + \frac{7614}{\sqrt{58}}z_1 - \frac{2070}{\sqrt{58}}z_2 + 2025 = 81\left({z_1}^2 + \frac{94}{\sqrt{58}}z_1\right) + 23\left({z_2}^2 - \frac{90}{\sqrt{58}}z_2\right) + 2025 = 81\left(z_1 + \frac{47}{\sqrt{58}}\right)^2 + 23\left(z_2 - \frac{45}{\sqrt{58}}\right)^2 - 1863$. Wir setzen jetzt $u := z + \frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}47\\-45\end{pmatrix}$ (also $z = u + \frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}-47\\45\end{pmatrix}$). Somit ist $81\,{u_1}^2 + 23\,{u_2}^2 - 1863 = 0$, und daher $\left(\frac{u_1}{\sqrt{23}}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{9}\right)^2 - 1 = 0$. Nachdem das eine Ellipse in 2. Hauptlage ist, wenden wir noch die Transformation $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2\\u_1\end{pmatrix}$ und erhalten dann mit $\left(\frac{y_1}{9}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{23}}\right)^2 - 1 = 0$ unsere Kurve in 1. Hauptlage. Daher ist unsere Kurve eine Ellipse mit $a = 9$, $b = \sqrt{23} \approx 4.7958315233$ und $e = \sqrt{58} \approx 7.6157731059$.

In „y-Koordinaten“ sind die Brennpunkte $\begin{pmatrix}\sqrt{58}\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-\sqrt{58}\\0\end{pmatrix}$, also in „$u$-Koordinaten“ $\begin{pmatrix}0\\\sqrt{58}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{58}\end{pmatrix}$, das ergibt dann in „$z$-Koordinaten“ $\frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}-47\\103\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{58}}\begin{pmatrix}-47\\-13\end{pmatrix}$. Durch $x = Sz$ erhält man dann für die Brennpunkte der ursprünglichen Ellipse die Punkte $f_1 = \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$.

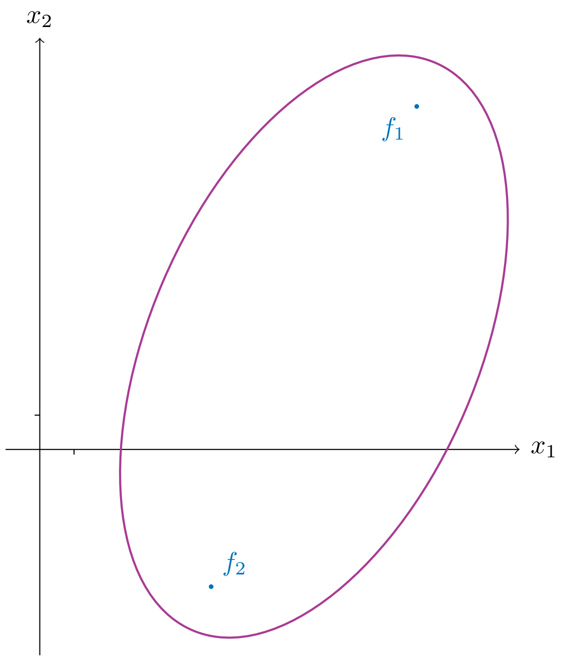

Abbildung 1. Die Ellipse aus Beispiel 1).

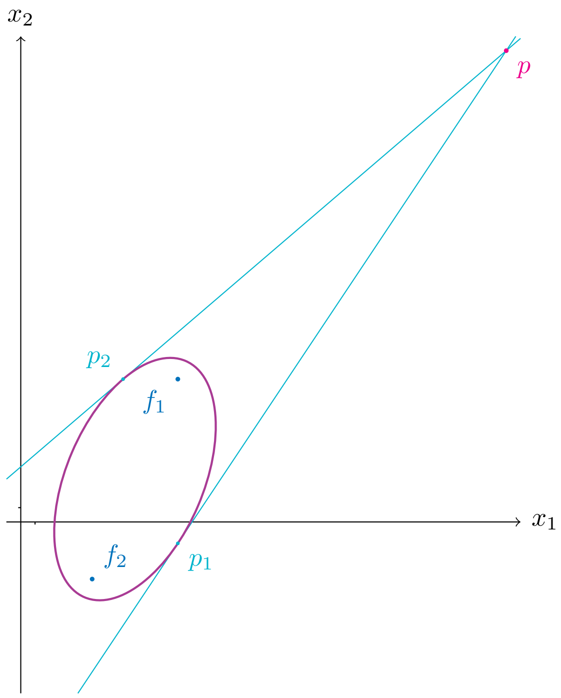

Abbildung 2. Die Tangenten durch $p = \binom{34}{33}$ an die Ellipse aus Beispiel 1).

b) Um die Tangenten an $p = \begin{pmatrix} 34 \\ 33 \end{pmatrix}$ zu legen, bestimmen zuerst die Polare zu p. Diese ist $0 = p^t A x + \frac{1}{2} a^t x + \frac{1}{2} a^t p + a_0 = 1242\, x_1 + 414\, x_2 - 13041$ und Dividieren durch 207 ergibt $6\, x_1 + 2\, x_2 - 63 = 0$. Setzt man $x_2 = \frac{63}{2} - 3\, x_1$ in die Ellipsengleichung ein, so erhält man $486\, {x_1}^2 - 8829\, x_1 + 38313 = 0$, und Division durch 81 ergibt $6\, {x_1}^2 - 109\, x_1 + 473 = 0$. Also ist $x_1 = -\frac{109}{12} \pm \sqrt{\frac{11881}{144} - \frac{473}{6}} = -\frac{109}{12} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{529}{144}}}_{=\frac{23}{12}} = 11, \frac{43}{6}$. Durch Einsetzen in $x_2 = \frac{63}{2} - 3\, x_1$ erhält man die Berührungspunkte $p_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{43}{6} \\ 10 \end{pmatrix}$. Es ist $p_1 - p = \begin{pmatrix} -23 \\ -\frac{69}{2} \end{pmatrix} = -\frac{23}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ein Normalvektor darauf $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, p \right\rangle = 36$. Somit ist die eine Tangente $3\, x_1 - 2\, x_2 - 36 = 0$ mit dem Berührungspunkt $p_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Außerdem ist $p_2 - p = \begin{pmatrix} -\frac{161}{6} \\ -23 \end{pmatrix} = -\frac{23}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, ein Normalvektor darauf $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}, p \right\rangle = -27$. Deshalb ist die andere Tangente $6\, x_1 - 7\, x_2 + 27 = 0$ mit dem Berührungspunkt $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{43}{6} \\ 10 \end{pmatrix}$. Eine Skizze dazu ist in Abbildung 2 zu finden.

c) Setze $y = T(x)$, also ist $x = T^{-1} y$, und daher ist das Bild unserer Kurve unter T durch $(T^{-1}(y))^t A T^{-1}(y) + a^t T^{-1}(y) + a_0 = 0$ gegeben. Deshalb müssen wir zuerst T^{-1} bestimmen (man kann auch direkt x_1 und x_2 berechnen). Mit dem Gauß-Verfahren (oder einer Formel für die

Inverse von 2×2-Matrizen) berechnen wir die Inverse C von $\frac{1}{36\sqrt{46}} \begin{pmatrix} 45\sqrt{23} & 0 \\ -84 & 128 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cc|cc} 45\sqrt{23} & 0 & 36\sqrt{46} & 0 \\ -84 & 128 & 0 & 36\sqrt{46} \end{array} \to \begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ -21 & 32 & 0 & 9\sqrt{46} \end{array} \to \begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ -105 & 160 & 0 & 45\sqrt{46} \end{array} \to$$
$$\to \begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 160 & 84\sqrt{2} & 45\sqrt{46} \end{array} \to \begin{array}{cc|cc} 80\sqrt{2} & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 80\sqrt{2} & 84 & 45\sqrt{23} \end{array},$$

und daher ist $C = \frac{1}{80\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 84 & 45\sqrt{23} \end{pmatrix}$. Durch Berechnen von $c := -C \left(\frac{1}{36\sqrt{46}} \begin{pmatrix} -360\sqrt{23} \\ 288 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich, dass $T^{-1}(y) = Cy + c$. Somit ist $0 = (T^{-1}(y))^t A T^{-1}(y) + a^t T^{-1}(y) + a_0 = y^t C^t A C y + (2c^t AC + a^t C)y + (c^t Ac + a^t c + a_0) = \frac{1863}{25} {y_1}^2 + \frac{1863}{16} {y_2}^2 - 1863$ (das ergäbe sich auch durch direktes Einsetzen von $x_1 = \frac{128}{80\sqrt{2}} y_1 + 8$ und $x_2 = \frac{84}{80\sqrt{2}} y_1 + \frac{45\sqrt{23}}{80\sqrt{2}} y_2 + 3$ in die ursprüngliche Gleichung). Dividieren durch 1863 ergibt dann $\left(\frac{y_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{4}\right)^2 - 1 = 0$. Also ist das Bild unserer Kurve unter T eine Ellipse in 1. Hauptlage mit $a = 5$, $b = 4$ und $e = 3$.

d) Einsetzen in die Abbildung T ergibt, dass $T\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{15}{4\sqrt{2}} \\ \frac{7\sqrt{23}}{9\sqrt{2}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.6516504294 \\ 2.6375727712 \end{pmatrix}$ und $T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{7\sqrt{23}}{9\sqrt{2}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.6516504294 \\ -2.6375727712 \end{pmatrix}$. Nachdem das Bild unserer Ellipse unter T eine Ellipse in 1. Hauptlage mit $a = 5$, $b = 4$ und $e = 3$ ist, sind die Brennpunkte des Bildes die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man sieht, dass hier die Bilder der Brennpunkte unter der affinen Abbildung T nicht mit den Brennpunkten des Bildes übereinstimmen.

2) Hier ist die Gleichung der Kurve durch $x^t Ax + a^t x + a_0 = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 11 & -40 \\ -40 & -28 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 64 \\ 808 \end{pmatrix}$ und $a_0 = 440$ gegeben. Eine Skizze dieser Kurve findet man in Abbildung 3.

a) Um die Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom $p(x) := \det(A - x\,\mathrm{id}) = \det \begin{pmatrix} 11 - x & -40 \\ -40 & -28 - x \end{pmatrix} = x^2 + 17x - 1908$. Dessen Nullstellen sind $-\frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} + 1908} = -\frac{17}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{7981}{4}}}_{=\frac{89}{2}} = 36, -53$.

Variante 1: Jetzt berechnen wir einen Eigenvektor zu -53, also $\begin{array}{cc|c} 64 & -40 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \end{array} \to \begin{array}{cc|c} 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$, daher ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu -53, dieser hat die Länge $\sqrt{89}$. Nachdem A symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu 36 senkrecht darauf stehen, also ist $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu 36. Setze $S := \frac{1}{\sqrt{89}} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$, und definiere $x := Sz$ (da S orthogonal ist, ist dann $z = S^t x$).

Es ist daher $0 = x^t Ax + a^t x + a_0 = z^t S^t ASz + (S^t a)^t z + a_0 = -53\,{z_1}^2 + 36\,{z_2}^2 + \frac{6784}{\sqrt{89}} z_1 - \frac{3528}{\sqrt{89}} z_2 + 440 = -53\left({z_1}^2 - \frac{128}{\sqrt{89}} z_1\right) + 36\left({z_2}^2 - \frac{98}{\sqrt{89}} z_2\right) + 440 = -53\left(z_1 - \frac{64}{\sqrt{89}}\right)^2 + 36\left(z_2 - \frac{49}{\sqrt{89}}\right)^2 + 1908.$

Wir setzen jetzt $y := z+\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}-64\\-49\end{pmatrix}$ (also $z = y+\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}64\\49\end{pmatrix}$). Somit ist $-53\,{y_1}^2+36\,{y_2}^2+1908 = 0$, und daher $\left(\frac{y_1}{6}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{\sqrt{53}}\right)^2 - 1 = 0$. Letzteres ist die Kurve in 1. Hauptlage. Daher ist unsere Kurve eine Hyperbel mit $a = 6$, $b = \sqrt{53} \approx 7.2801098893$ und $e = \sqrt{89} \approx 9.4339811321$.

In „y-Koordinaten" sind die Brennpunkte $\begin{pmatrix}\sqrt{89}\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-\sqrt{89}\\0\end{pmatrix}$, das ergibt dann in „$z$-Koordinaten" $\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}153\\49\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}-25\\49\end{pmatrix}$. Durch $x = Sz$ erhält man dann für die Brennpunkte der ursprünglichen Hyperbel die Punkte $f_1 = \begin{pmatrix}13\\11\end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

Variante 2: Jetzt berechnen wir einen Eigenvektor zu 36, also $\begin{array}{cc|c}-25 & -40 & 0\\-40 & -64 & 0\end{array} \to \begin{array}{cc|c}5 & 8 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}$, daher ist $\begin{pmatrix}-8\\5\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu 36, dieser hat die Länge $\sqrt{89}$. Nachdem A symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu -53 senkrecht darauf stehen, also ist $\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu -53. Setze $S := \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}-8 & 5\\5 & 8\end{pmatrix}$, und definiere $x := Sz$ (da S orthogonal ist, ist dann $z = S^t x$).

Es ist daher $0 = x^t A x + a^t x + a_0 = z^t S^t A S z + (S^t a)^t z + a_0 = 36\,{z_1}^2 - 53\,{z_2}^2 + \frac{3528}{\sqrt{89}} z_1 + \frac{6784}{\sqrt{89}} z_2 + 440 = 36\left({z_1}^2 + \frac{98}{\sqrt{89}} z_1\right) - 53\left({z_2}^2 - \frac{128}{\sqrt{89}} z_2\right) + 440 = 36\left(z_1 + \frac{49}{\sqrt{89}}\right)^2 - 53\left(z_2 - \frac{64}{\sqrt{89}}\right)^2 + 1908$. Wir setzen jetzt $u := z + \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}49\\-64\end{pmatrix}$ (also $z = u + \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}-49\\64\end{pmatrix}$). Somit ist $36\,{u_1}^2 - 53\,{u_2}^2 + 1908 = 0$, und daher $\left(\frac{u_1}{\sqrt{53}}\right)^2 - \left(\frac{u_2}{6}\right)^2 + 1 = 0$. Nachdem das eine Hyperbel in 2. Hauptlage ist, wenden wir noch die Transformation $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2\\u_1\end{pmatrix}$ und erhalten dann mit $\left(\frac{y_1}{6}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{\sqrt{53}}\right)^2 - 1 = 0$ unsere Kurve in 1. Hauptlage. Daher ist unsere Kurve eine Hyperbel mit $a = 6$, $b = \sqrt{53} \approx 7.2801098893$ und $e = \sqrt{89} \approx 9.4339811321$.

In „y-Koordinaten" sind die Brennpunkte $\begin{pmatrix}\sqrt{89}\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-\sqrt{89}\\0\end{pmatrix}$, also in „$u$-Koordinaten" $\begin{pmatrix}0\\\sqrt{89}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{89}\end{pmatrix}$, das ergibt dann in „$z$-Koordinaten" $\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}-49\\153\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}-49\\-25\end{pmatrix}$. Durch $x = Sz$ erhält man dann für die Brennpunkte der ursprünglichen Hyperbel die Punkte $f_1 = \begin{pmatrix}13\\11\end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

b) Um die Tangenten an $p = \begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ zu legen, bestimmen zuerst die Polare zu p. Diese ist $0 = p^t A x + \frac{1}{2}a^t x + \frac{1}{2}a^t p + a_0 = -18\,x_1 - 108\,x_2 + 2376$ und Dividieren durch -18 ergibt $x_1 + 6\,x_2 - 132 = 0$. Setzt man $x_1 = 132 - 6\,x_2$ in die Hyperbelgleichung ein, so erhält man $848\,{x_2}^2 - 27560\,x_2 + 200552 = 0$, und Dividieren durch 424 ergibt $2\,{x_2}^2 - 65\,x_2 + 473 = 0$. Also ist $x_2 = \frac{65}{4} \pm \sqrt{\frac{4225}{16} - \frac{473}{2}} = \frac{65}{4} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{441}{16}}}_{=\frac{21}{4}} = \frac{43}{2}, 11$. Durch Einsetzen in $x_1 = 132 - 6\,x_2$ erhält man

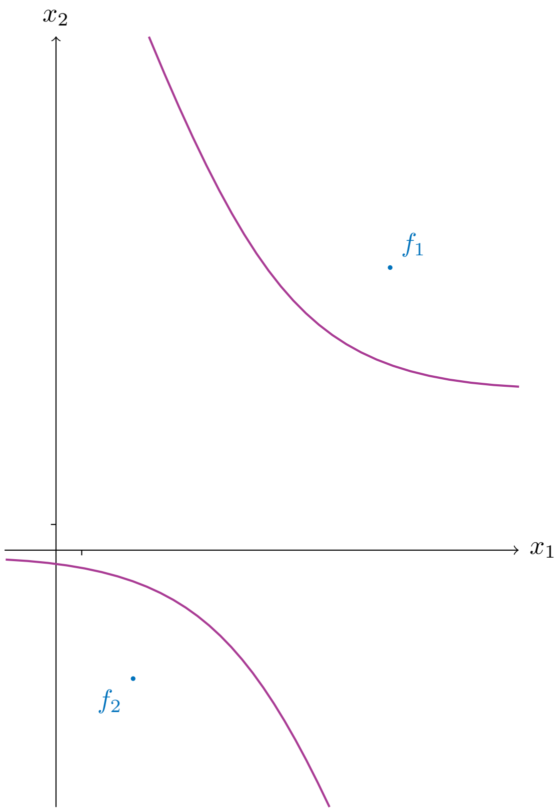

Abbildung 3. Die Hyperbel aus Beispiel 2).

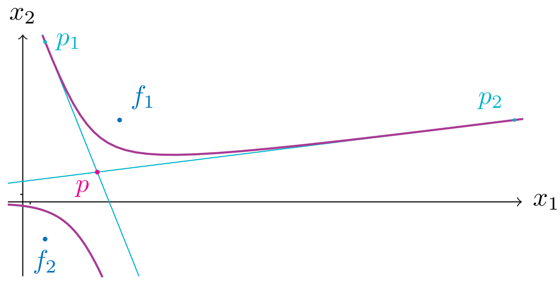

Abbildung 4. Die Tangenten durch $p = \left(\begin{smallmatrix}10\\4\end{smallmatrix}\right)$ an die Hyperbel aus Beispiel 2).

die Berührungspunkte $p_1 = \begin{pmatrix}3\\ \frac{43}{2}\end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix}66\\11\end{pmatrix}$. Es ist $p_1 - p = \begin{pmatrix}-7\\ \frac{35}{2}\end{pmatrix} = \frac{7}{2}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$, ein Normalvektor darauf $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ und $\left\langle \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, p \right\rangle = 58$. Somit ist die eine Tangente $5\,x_1 + 2\,x_2 - 58 = 0$ mit dem Berührungspunkt $p_1 = \begin{pmatrix}3\\ \frac{43}{2}\end{pmatrix}$. Außerdem ist $p_2 - p = \begin{pmatrix}56\\7\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$, ein Normalvektor darauf $\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}$ und $\left\langle \begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}, p \right\rangle = -22$. Deshalb ist die andere Tangente $x_1 - 8\,x_2 + 22 = 0$ mit dem Berührungspunkt $p_2 = \begin{pmatrix}66\\11\end{pmatrix}$. Eine Skizze dazu ist in Abbildung 4 zu finden.

c) Setze $y = T(x)$, also ist $x = T^{-1}y$, und daher ist das Bild unserer Kurve unter T durch $(T^{-1}(y))^t A T^{-1}(y) + a^t T^{-1}(y) + a_0 = 0$ gegeben. Deshalb müssen wir zuerst T^{-1} bestimmen (man kann auch direkt x_1 und x_2 berechnen). Mit dem Gauß-Verfahren (oder einer Formel für die Inverse von 2×2-Matrizen) berechnen wir die Inverse C von $\frac{1}{106\sqrt{11}}\begin{pmatrix}0 & 424\\ 11\sqrt{53} & -40\sqrt{53}\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cc|cc}0 & 424 & 106\sqrt{11} & 0\\ 11\sqrt{53} & -40\sqrt{53} & 0 & 106\sqrt{11}\end{array} \to \begin{array}{cc|cc}0 & 4 & \sqrt{11} & 0\\ 11 & -40 & 0 & 2\sqrt{53}\sqrt{11}\end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{cc|cc}11 & 0 & 10\sqrt{11} & 2\sqrt{53}\sqrt{11}\\ 0 & 4 & \sqrt{11} & 0\end{array} \to \begin{array}{cc|cc}\sqrt{11} & 0 & 10 & 2\sqrt{53}\\ 0 & 4 & \sqrt{11} & 0\end{array} \to \begin{array}{cc|cc}4\sqrt{11} & 0 & 40 & 8\sqrt{53}\\ 0 & 4\sqrt{11} & 11 & 0\end{array},$$

und daher ist $C = \frac{1}{4\sqrt{11}}\begin{pmatrix}40 & 8\sqrt{53}\\ 11 & 0\end{pmatrix}$. Durch Berechnen von $c := -C\left(\frac{1}{106\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-1272\\ 32\sqrt{53}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

ergibt sich, dass $T^{-1}(y) = Cy + c$. Somit ist $0 = (T^{-1}(y))^t AT^{-1}(y) + a^t T^{-1}(y) + a_0 = y^t C^t ACy + (2c^t AC + a^t C)y + (c^t Ac + a^t c + a_0) = -\frac{477}{4} {y_1}^2 + 212\, {y_2}^2 + 1908$ (das ergäbe sich auch durch direktes Einsetzen von $x_1 = \frac{40}{4\sqrt{11}} y_1 + \frac{8\sqrt{53}}{4\sqrt{11}} y_2 + 8$ und $x_2 = \frac{11}{4\sqrt{11}} y_1 + 3$ in die ursprüngliche Gleichung). Dividieren durch -1908 ergibt dann $\left(\frac{y_1}{4}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{3}\right)^2 - 1 = 0$. Also ist das Bild unserer Kurve unter T eine Hyperbel in 1. Hauptlage mit $a = 4$, $b = 3$ und $e = 5$.

d) Einsetzen in die Abbildung T ergibt, dass $T\left(\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{32}{\sqrt{11}} \\ -\frac{5\sqrt{53}}{2\sqrt{11}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9.6483630265 \\ -5.4875893035 \end{pmatrix}$ und $T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{32}{\sqrt{11}} \\ \frac{5\sqrt{53}}{2\sqrt{11}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -9.6483630265 \\ 5.4875893035 \end{pmatrix}$. Nachdem das Bild unserer Hyperbel unter T eine Hyperbel in 1. Hauptlage mit $a = 4$, $b = 3$ und $e = 5$ ist, sind die Brennpunkte des Bildes die Punkte $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man sieht, dass hier die Bilder der Brennpunkte unter der affinen Abbildung T nicht mit den Brennpunkten des Bildes übereinstimmen.