Der Raum L^2

Es sei $s \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^s$ eine nichtleere Borelmenge. Dabei ist es sinnvoll (aber nicht unbedingt notwendig) $\lambda(X) > 0$ vorauszusetzen. Definiere $L^2 = L^2(X, \mathbb{C})$, $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|_2$ als

$$L^2(X, \mathbb{C}) := \big\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ messbar} : |f|^2 \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \big\} .$$

(1)
$$\text{Für } f, g \in L^2(X, \mathbb{C}) \text{ sei } \ \langle f, g \rangle := \int f \overline{g} \, .$$

$$\text{Falls } f \in L^2(X, \mathbb{C}) \text{ setze } \ \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int |f|^2} \, .$$

Dann ist $\langle .,. \rangle$ ein inneres Produkt auf L^2 und $\|.\|_2$ die von diesem inneren Produkt bestimmte Norm.

Um die Vollständigkeit von L^2 zu zeigen (anders gesagt um zu beweisen, dass L^2 ein Hilbertraum ist) benötigt man zunächst einmal die Tschebyschev'sche Ungleichung (benannt nach Чебышёв), die wir jetzt formulieren und beweisen werden.

Proposition 1. *Es sei $f \in L^2$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\lambda\big(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \, \|f\|_2{}^2 \, .$$

Beweis. Wegen

$$\|f\|_2{}^2 = \int |f|^2 = \int_{\{x:|f(x)|\geq\varepsilon\}} \underbrace{|f|^2}_{\geq\varepsilon^2} + \int_{\{x:|f(x)|<\varepsilon\}} \underbrace{|f|^2}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \underbrace{\int_{\{x:|f(x)|\geq\varepsilon\}} \varepsilon^2}_{=\varepsilon^2\lambda(\{x:|f(x)|\geq\varepsilon\})} + \underbrace{\int_{\{x:|f(x)|<\varepsilon\}} 0}_{=0} = \varepsilon^2 \lambda(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\})$$

ergibt sich $\lambda(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|_2{}^2$. □

Damit kann man jetzt die Vollständigkeit von L^2 beweisen. Im Beweis werden wir benötigen, dass $(|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt, was sich aus $0 \leq (|a| - |b|)^2$ ergibt. Daraus erhält man

(2)
$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^j |a_j|^2 + 2^{n-1} |a_n|^2 \, ,$$

weil man durch Induktion

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n-2}|a_j| + (|a_{n-1}|+|a_n|)\right)^2 \underset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-2}\underbrace{(|a_{n-1}|+|a_n|)^2}_{\leq 2(|a_{n-1}|^2+|a_n|^2)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-1}|a_{n-1}|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2$$

erhält. Betrachtet man $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ so ergibt sich aus (2), dass

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|\right)^2 \underset{\text{wegen (2)}}{\leq} \sum_{j=1}^{n-1} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j|a_j|^2$$

gilt, und daher

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n|a_n|^2\ , \tag{3}$$

wobei bei den Reihen jeweils auch der Wert $+\infty$ zugelassen ist.

Satz 1. *Der Raum $L^2(X,\mathbb{C})$ ist vollständig bezüglich $\|.\|_2$. Weiters gibt es für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(X,\mathbb{C})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2 eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ fast überall.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$.
Behauptung. Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (f_n) mit $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_2 < \frac{1}{4^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Beweis der Behauptung. Weil (f_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4}$ für alle $n, m \geq n_1$.

Sei $k > 1$ und seien $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ mit $\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2 < \frac{1}{4^j}$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ und $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4^{k-1}}$ für alle $n, m \geq n_{k-1}$ bereits konstruiert. Da (f_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4^k}$ für alle $n, m \geq N$. Wähle $n_k \geq N$ so, dass $n_k > n_{k-1}$. Dann gilt $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4^k}$ für alle $n, m \geq n_k$. Weiters gilt wegen $n_{k-1}, n_k \geq n_{k-1}$, dass $\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\|_2 < \frac{1}{4^{k-1}}$. ◇

Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $A_k := \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}$. Wegen Proposition 1 gilt

$$\lambda(A_k) \leq \frac{1}{(\frac{1}{2^k})^2}\underbrace{\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\|_2}_{<\frac{1}{4^k}}{}^2 < 4^k\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 = \frac{1}{4^k}\ .$$

Setze $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$0 \leq \lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \underbrace{\lambda(A_j)}_{<\frac{1}{4^j}} <$$

$$< \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{4^k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j}}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \text{ (geometrische Reihe)}} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{4^k}\,.$$

Nachdem $\lim_{k\to\infty} \frac{4}{3}\frac{1}{4^k} = 0$, ist $\lambda(A) = 0$.
Behauptung. Sei $x \in X \setminus A$. Dann gibt es ein $\alpha_x \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \alpha_x$. Weiters konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2$.
Beweis der Behauptung. Da $x \in X \setminus A$ gibt es ein K, sodass für alle $j \geq K$ die Eigenschaft $x \notin A_j$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N mit $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Seien $k, p \geq \max\{K, N\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $k < p$ annehmen. Es gilt dann

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_p}(x)| \leq \sum_{j=k}^{p-1} \underbrace{|f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|}_{<\frac{1}{2^j}\text{ , da } x \notin A_j} <$$

$$< \sum_{j=k}^{p-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ (geometrische Reihe)}} = \frac{1}{2^k}\,2 = \frac{1}{2^{k-1}} \underset{\text{da } k \geq N}{<} \varepsilon\,.$$

Deshalb ist $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Daher gibt es ein $\alpha_x \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \alpha_x$.

Weil $x \notin A_j$ für $j \geq K$ gilt, erhält man $|f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2 < \left(\frac{1}{2^j}\right)^2$. Somit ist $2^j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2 < \frac{1}{2^j}$ für alle $j \geq K$. Nachdem $\sum_{j=K}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{K-1}}$ (geometrische Reihe), konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2$ nach dem Majorantentest. $\diamond$

Jetzt definieren wir $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \alpha_x\,, & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ 0 & \text{falls } x \in A, \end{cases} \tag{4}$$

$$\text{und} \quad g(x) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2\,, & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ 0 & \text{falls } x \in A. \end{cases} \tag{5}$$

Da $\lambda(A) = 0$ gilt, erhalten wir, dass $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ fast überall. Daraus ergibt sich, dass $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 = |f|^2$ fast überall und $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^2 = 0$ fast überall gelten. Weiters gilt für $x \in X \setminus A$, dass $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|$. Deswegen folgt aus (3), dass

$$|f_{n_k}(x) - f(x)|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| \right)^2 \underset{\text{wegen (3)}}{\leq}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2 = g(x) \ ,$$

also $|f_{n_k} - f|^2 \leq g$ fast überall für alle $k \in \mathbb{N}$.

Nachdem durch $g_k(x) := \sum_{j=1}^{k} 2^j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen definiert ist, die fast überall gegen g konvergiert, folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz, dass

$$\int g = \lim_{k\to\infty} \int \underbrace{g_k}_{=\sum_{j=1}^{k} 2^j |f_{n_j} - f_{n_{j+1}}|^2} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} 2^j \underbrace{\int |f_{n_j} - f_{n_{j+1}}|^2}_{=\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2{}^2} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \underbrace{\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2{}^2}_{< \frac{1}{4^j}} < \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{2^j \left(\frac{1}{4^j}\right)^2}_{=(\frac{1}{8})^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^j \underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{1}{7} \ .$$

Somit ist g Lebesgue-integrierbar.

Da (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$ ist, ist $(\|f_n\|_2)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ (wegen $\big| \|f_n\|_2 - \|f_m\|_2 \big| \leq \|f_n - f_m\|_2$, dem linken Teil der Dreiecksungleichung). Deshalb gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r := \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2$. Offensichtlich ergibt sich daraus, dass $\liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2 = r$ und $\liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2{}^2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2{}^2 = r^2$. Nachdem $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 = |f|^2$ fast überall gilt, ist auch $\liminf_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 = |f|^2$ fast überall. Aus dem Lemma von Fatou folgt, dass

$$\int |f|^2 = \int \liminf_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\int |f_{n_k}|^2}_{=\|f_{n_k}\|_2{}^2} = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2{}^2 = r^2 \ .$$

Also ist $|f|^2$ Lebesgue-integrierbar und deswegen $f \in L^2$.

Wir haben gezeigt, dass $|f_{n_k} - f|^2 \leq g$ fast überall für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass g Lebesgue-integrierbar ist, und dass $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^2 = 0$ fast überall gilt. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz gilt deshalb

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_2^{\,2}}_{=\int |f_{n_k}-f|^2} = \lim_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f|^2 = 0 \ ,$$

und somit $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_2 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$, weil (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$ ist. Jetzt sei $n \geq N$. Da $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_2 = 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $\|f_{n_k} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K$. Wähle $k \geq K$ so, dass $n_k \geq N$. Dann gilt

$$\| \underbrace{f_n - f}_{=f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f} \|_2 \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Daher gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, also $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2.

Schließlich sei (f_n) eine Folge in L^2, die $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2 erfüllt. Dann ist (f_n) auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$. In diesem Fall haben wir eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) konstruiert, die fast überall gegen die in (4) definierte Funktion $\widetilde{f}$ (in (4) wurde diese Funktion f genannt) konvergiert. Nachdem wir auch $\lim_{n\to\infty} f_n = \widetilde{f}$ in L^2 gezeigt haben, muss $\widetilde{f} = f$ fast überall gelten. Somit gilt $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ fast überall. □

Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ *stetig mit kompaktem Träger*, falls f stetig ist und es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^s$ mit $|x| \geq r$. Definiere $C_c(X, \mathbb{C})$ (kurz C_c oder $C_c(X)$) als die Menge aller Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, für die es eine stetige Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger gibt, sodass $f = \widetilde{f}\big|_X$ gilt. Zuerst zeigen wir, dass für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ die Menge $C_c([a, b], \mathbb{C})$ mit der Menge der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ übereinstimmt.

Proposition 2. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann gilt $C_c([a, b], \mathbb{C}) = C([a, b], \mathbb{C})$.*

Beweis. Für $f \in C_c([a, b], \mathbb{C})$ gibt es eine stetige Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger, sodass $f = \widetilde{f}\big|_{[a,b]}$. Da $\widetilde{f}$ stetig ist, ist auch f stetig, also $C_c([a, b], \mathbb{C}) \subseteq C([a, b], \mathbb{C})$.

Jetzt sei $f \in C([a, b], \mathbb{C})$. Definiere $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [a, b], \\ f(a)(x - a + 1) & \text{falls } x \in [a - 1, a], \\ f(b)(b + 1 - x) & \text{falls } x \in [b, b + 1], \\ 0 & \text{falls } x \leq a - 1 \text{ oder } x \geq b + 1. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{f}$ stetig und für $|x| \geq r := 1 + \max\{|a|, |b|\}$ ist $\widetilde{f}(x) = 0$. Also $\widetilde{f}$ ist stetig mit kompakten Träger und $\widetilde{f}\big|_{[a,b]} = f$. Damit ist $C([a,b],\mathbb{C}) \subseteq C_c([a,b],\mathbb{C})$ und daher $C_c([a,b],\mathbb{C}) = C([a,b],\mathbb{C})$. $\square$

Wir zeigen jetzt, dass jede L^2-Funktion durch Funktionen in C_c bezüglich $\|.\|_2$ approximiert werden kann.

Satz 2. *Sei $f \in L^2(X,\mathbb{C})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(X,\mathbb{C})$ mit $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.*

Beweis. Zuerst definieren wir C_1 als die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, die $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^s$ erfüllen. Für eine Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^s$ sei $C_1(A)$ die Menge aller $f \in C_1$, für die $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ gilt. Weiters sei für $n \in \mathbb{N}$ die Menge D_n durch

$$D_n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s : -n \leq x_j < n \text{ für alle } j \in \{1,2,\ldots,s\} \right\}$$

definiert. Setze $C_1(n) := C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n)$. Beachte, dass offensichtlich $fg \in C_1$ für $f,g \in C_1$ und $fg \in C_1(A)$ für $f \in C_1(A)$ und $g \in C_1$ gelten. Weiters ist wegen $|x| \leq n\sqrt{s}$ für $x \in D_n$ offensichtlich $C_1(n) \subseteq C_c(\mathbb{R}^s)$.

Behauptung 1. Für $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$. Setze $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$ und

$$[a,b) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s : a_j \leq x_j < b_j \text{ für alle } j \in \{1,2,\ldots,s\} \right\} .$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1\big(\mathbb{R}^s \setminus [a,b)\big)$ mit $\|1_{[a,b)} - f\|_2 < \varepsilon$.

Beweis der Behauptung. Es sei $t \in \big(0, \frac{1}{2}\min_{j\in\{1,2,\ldots,s\}} |b_j - a_j|\big)$. Für $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ definiere $f_{t,j} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ durch

$$f_{t,j}(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x_j < a_j \text{ oder } x_j > b_j, \\ 1\,, & \text{falls } a_j + t < x_j < b_j - t, \\ \frac{1}{t}(x - a_j)\,, & \text{falls } a_j \leq x_j \leq a_j + t, \\ -\frac{1}{t}(x - b_j)\,, & \text{falls } b_j - t \leq x_j \leq b_j. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f_{t,j} \in C_1$. Setze $f_t := \min_{j\in\{1,2,\ldots,s\}} f_{t,j}$. Dann ist $f_t \in C_1$. Wenn man $a_t := \begin{pmatrix} a_1+t \\ a_2+t \\ \vdots \\ a_s+t \end{pmatrix}$, $b_t := \begin{pmatrix} b_1-t \\ b_2-t \\ \vdots \\ b_s-t \end{pmatrix}$, $A := [a,b)$ und $A_t := [a_t, b_t)$ definiert, dann gilt $1_{A_t} \leq f_t \leq 1_A$. Insbesondere ist $f_t \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus A)$.

Wegen $1_{A_t} \leq f_t \leq 1_A$ ist $0 \leq 1_A - f_t = |1_A - f_t| \leq 1_A - 1_{A_t}$. Nachdem $1_A - 1_{A_t}$ nur die Werte 0 und 1 annimmt ist $(1_A - 1_{A_t})^2 = 1_A - 1_{A_t}$. Deshalb ist $|1_A - f_t|^2 \leq (1_A - 1_{A_t})^2 = 1_A - 1_{A_t}$. Somit gilt

$$\|1_A - f_t\|_2{}^2 = \int |1_A - f_t|^2 \leq \int (1_A - 1_{A_t}) =$$

$$= \lambda(A) - \lambda(A_t) = \prod_{j=1}^{s} |b_j - a_j| - \prod_{j=1}^{s} |b_j - a_j - 2t| \, .$$

Da $\lim_{t\to 0^+} \left(\prod_{j=1}^s |b_j - a_j| - \prod_{j=1}^s |b_j - a_j - 2t| \right) = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t mit $\|1_A - f_t\|_2{}^2 < \varepsilon^2$. Daher ist $\|1_A - f_t\|_2 < \varepsilon$ und wegen $f_t \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus A)$ ist die Behauptung gezeigt. $\diamond$

Behauptung 2. Es seien A_1, A_2, B Borelmengen in $\mathbb{R}^s$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gäbe es ein $f_1 \in C_1(B)$ und ein $f_2 \in C_1$ mit $\|1_{A_1} - f_1\|_2 < \varepsilon$ und $\|1_{A_2} - f_2\|_2 < \varepsilon$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(B)$ mit $\|1_{A_1\cap A_2} - f\|_2 < \varepsilon$.

Beweis der Behauptung. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $f_1 \in C_1(B)$ und $f_2 \in C_1$ mit $\|1_{A_1} - f_1\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|1_{A_2} - f_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Offensichtlich ist $f := f_1 f_2 \in C_1(B)$. Weiters gilt

$$|\underbrace{1_{A_1\cap A_2}}_{=1_{A_1}1_{A_2}} - \underbrace{f}_{=f_1 f_2}| = |1_{A_1}1_{A_2} - 1_{A_1}f_2 + 1_{A_1}f_2 - f_1 f_2| \leq$$

$$\leq \underbrace{|1_{A_1}|}_{\leq 1}|1_{A_2} - f_2| + |1_{A_1} - f_1|\underbrace{|f_2|}_{\leq 1} \leq |1_{A_2} - f_2| + |1_{A_1} - f_1| \, ,$$

und wegen (2) ist deshalb $|1_{A_1\cap A_2} - f|^2 \leq 2\left(|1_{A_1} - f_1|^2 + |1_{A_2} - f_2|^2\right)$. Daher ist

$$\|1_{A_1\cap A_2} - f\|_2{}^2 = \int |1_{A_1\cap A_2} - f|^2 \leq 2\left(\int |1_{A_1} - f_1|^2 + \int |1_{A_2} - f_2|^2 \right) =$$

$$= 2\big(\underbrace{\|1_{A_1} - f_1\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \underbrace{\|1_{A_2} - f_2\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\big) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2 \, ,$$

und somit $\|1_{A_1\cap A_2} - f\|_2 < \varepsilon$. $\diamond$

Jetzt definiere $\mathcal{A}$ als die Familie aller Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^s$, für die es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(n)$ gibt, das $\|1_{A\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$ erfüllt. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Nachdem $1_\emptyset = 0$ gilt, gilt für jedes n und jedes $\varepsilon > 0$, dass $\|1_{\emptyset\cap D_n} - 0\|_2 = 0 < \varepsilon$. Offensichtlich ist $0 \in C_1(n)$ und deswegen gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Sei $A \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1$ mit $\|1_{A\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Wegen

$$\underbrace{1_{\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n)}}_{=1-1_{A\cap D_n}} - (1-f) = 1 - 1_{A\cap D_n} - 1 + f = -(1_{A\cap D_n} - f)$$

ergibt sich $\|1_{\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n)} - (1-f)\|_2 = \|1_{A\cap D_n} - f\|_2$. Da $(1-f) \in C_1$ für $f \in C_1$ gilt erhalten wir, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_1$ mit $\|1_{\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n)} - g\|_2 < \varepsilon$ gibt. Nach Behauptung 1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n)$ mit $\|1_{D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Deshalb gibt es nach Behauptung 2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n) = C_1(n)$ mit $\|1_{(\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n))\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Weil $(\mathbb{R}^s \setminus (A \cap D_n)) \cap D_n = (\mathbb{R}^s \setminus A) \cap D_n$ gilt, folgt daraus, dass $(\mathbb{R}^s \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ist also auch $(\mathbb{R}^s\setminus A_1) \in \mathcal{A}$. Wegen $A_2\setminus A_1 = A_2\cap(\mathbb{R}^s\setminus A_1)$ gibt es nach Behauptung 2 zu jedem n und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(n)$ mit $\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Somit ist $(A_2 \setminus A_1) \in \mathcal{A}$.

Wieder seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Wie soeben gezeigt ist dann auch $(A_2\setminus A_1) \in \mathcal{A}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $f_1, f_2 \in C_1(n)$ mit $\|1_{A_1\cap D_n} - f_1\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt dann $0 \le (f_1 + f_2)(x) \le 2$, $(f_1 + f_2)(x) = 0$ für alle $x \in (\mathbb{R}^s\setminus D_n)$ und wegen $(A_1\cup A_2)\cap D_n = (A_1\cap D_n)\cup((A_2\setminus A_1)\cap D_n)$

$$|\underbrace{1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n}}_{=1_{A_1\cap D_n}+1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n}} - (f_1+f_2)| \le |1_{A_1\cap D_n} - f_1| + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2| \,.$$

Definiert man $f := \min(1, f_1 + f_2)$, dann ist offensichtlich $f \in C_1(n)$ und für jede Borelmenge B gilt $|1_B - f| \le |1_B - (f_1 + f_2)|$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} |1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f| &\le |1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - (f_1+f_2)| \le \\ &\le |1_{A_1\cap D_n} - f_1| + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2| \,, \end{aligned}$$

und wegen (2) ist $|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f|^2 \le 2(|1_{A_1\cap D_n} - f_1|^2 + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2|^2)$. Deswegen gilt

$$\begin{aligned} \|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f\|_2{}^2 &= \int \underbrace{|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f|^2}_{\le 2(|1_{A_1\cap D_n}-f_1|^2+|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n}-f_2|^2)} \le \\ &\le 2\Big(\underbrace{\int |1_{A_1\cap D_n} - f_1|^2}_{=\|1_{A_1\cap D_n}-f_1\|_2{}^2} + \underbrace{\int |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2|^2}_{=\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n}-f_2\|_2{}^2}\Big) = \\ &= 2\big(\underbrace{\|1_{A_1\cap D_n} - f_1\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \underbrace{\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\big) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2 \,. \end{aligned}$$

Daher ist $\|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$ und somit ist $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Als nächstes wollen wir durch Induktion nach k zeigen, dass $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}$ für $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ gilt. Im Fall $k = 1$ ist das offensichtlich. Sei jetzt $k > 1$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{A}$. Wegen $A_k \in \mathcal{A}$ ist daher $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \cup A_k \in \mathcal{A}$.

Jetzt sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Setze $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Weiters seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Definiere $B_1 := A_1 \cap D_n$ und für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ definiere $B_k := \left(A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)\right) \cap D_n$. Dann ist $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Borelmengen und es gelten $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap D_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap D_n = A \cap D_n$. Wegen der σ-Additivität ist

$$(2n)^s = \lambda(D_n) \geq \lambda(A \cap D_n) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)\ ,$$

und deshalb konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)$ in $\mathbb{R}$. Somit gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\left|\lambda(A \cap D_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Setze $G_1 := \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap D_n$ und $G_2 := (A \cap D_n) \setminus G_1$. Dann folgt aus $G_1 = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap D_n = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \subseteq A \cap D_n$, dass $\lambda(G_1) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)$ und daher $\lambda(G_2) = \lambda(A \cap D_n) - \lambda(G_1) = \left|\lambda(A \cap D_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Weil $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}$ gibt es ein $f \in C_1(n)$ mit $\|1_{G_1} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dadurch gilt

$$\|\underbrace{1_{A\cap D_n}}_{=1_{G_1}+1_{G_2}} - f\|_2{}^2 = \underbrace{\|1_{G_1} + 1_{G_2} - f\|_2}_{\leq \|1_{G_1}-f\|_2 + \|1_{G_2}\|_2}{}^2 \underset{\text{wegen (2)}}{\leq} 2\Big(\underbrace{\|1_{G_1} - f\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \|1_{G_2}\|_2{}^2\Big) <$$

$$< 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \int \underbrace{|1_{G_2}|^2}_{=1_{G_2}}\right) = 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \underbrace{\lambda(G_2)}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\right) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2\ ,$$

und somit $\|1_{A\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Deshalb ist $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Damit haben wir bewiesen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Betrachte $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$ mit $a < b$, das heißt $a_j < b_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Behauptung 1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f_1 \in C_1$ und ein $f_2 \in C_1(n) = C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n)$ mit $\|1_{[a,b)} - f_1\|_2 < \varepsilon$ und $\|1_{D_n} - f_2\|_2 < \varepsilon$. Wegen Behauptung 2 gibt es daher zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n) = C_1(n)$ mit $\|1_{[a,b)\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$, wodurch $[a, b) \in \mathcal{A}$ gilt. Da die Familie der Borelmengen die kleinste σ-Algebra ist, die alle Mengen der Form $[a, b)$ enthält, muss $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen sein.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^s$ eine Borelmenge mit $\lambda(B) < \infty$. Weiters sei $\varepsilon > 0$. Nachdem $(B \cap D_1) \subseteq (B \cap D_2) \subseteq (B \cap D_3) \subseteq \cdots$ und $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B \cap D_n)$ gilt wegen der Stetigkeitseigenschaft, dass $\lambda(B) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B \cap D_n)$. Da $\lambda(B) < \infty$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda(B \setminus D_n) = \lambda(B \setminus (B \cap D_n)) = \lambda(B) - \lambda(B \cap D_n) < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Weil $B \in \mathcal{A}$ ist, gibt es ein $f \in C_1(n) \subseteq C_c(\mathbb{R}^s)$ mit $\|1_{B\cap D_n} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist

$$\|\underbrace{1_B}_{=1_{B\cap D_n}+1_{B\setminus D_n}} - f\|_2{}^2 = \underbrace{\|1_{B\setminus D_n} + 1_{B\cap D_n} - f\|_2}_{\leq \|1_{B\setminus D_n}\|_2 + \|1_{B\cap D_n} - f\|_2}{}^2 \underset{\text{wegen (2)}}{\leq}$$

$$\leq 2\big(\|1_{B\setminus D_n}\|_2{}^2 + \underbrace{\|1_{B\cap D_n} - f\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\big) < 2\left(\int \underbrace{|1_{B\setminus D_n}|^2}_{=1_{B\setminus D_n}} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\underbrace{\lambda(B \setminus D_n)}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2 \ ,$$

woraus sich $\|1_B - f\|_2 < \varepsilon$ ergibt.

Betrachte $f \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es paarweise disjunkte Borelmengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mit $\lambda(B_j) < \infty$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, sodass $\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j} \leq |f|^2 = f^2$ und $\left|\int |f|^2 - \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}\right)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4}$ gelten. Im Folgenden verwenden wir, dass $|a-b|^2 \leq a^2 - b^2$ für $0 \leq b \leq a$ gilt, weil $0 \leq a-b \leq a+b$ und daher $|a-b|^2 = (a-b)(a-b) \leq (a-b)(a+b) = a^2-b^2$. Weil die Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ paarweise disjunkt sind, gelten $0 \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j} \leq f$ und $\left|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right|^2 \leq |f|^2 - \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}$, und deswegen gilt auch

$$\left\|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right\|_2^2 = \int \left|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right|^2 \leq$$

$$\leq \int |f|^2 - \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}\right) < \frac{\varepsilon^2}{4} \ .$$

Also ist $\left\|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es ein $g_j \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $\|1_{B_j} - g_j\|_2 < \frac{\varepsilon}{2n(\sqrt{\alpha_j}+1)}$. Setze $g := \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} g_j$. Es ist dann

$g \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\| \underbrace{f - g}_{=f-\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j} - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} g_j} \|_2 \leq$$

$$\leq \underbrace{\left\| f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j} \right\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} \underbrace{\|1_{B_j} - g_j\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2n(\sqrt{\alpha_j}+1)}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha_j}}{\sqrt{\alpha_j}+1}}_{\leq 1} \frac{\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2n}}_{=\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ gibt es $f_1, f_2, f_3, f_4 \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$, sodass $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ ($f_1 := (\mathrm{Re}(f))^+$, $f_2 := (\mathrm{Re}(f))^-$, $f_3 := (\mathrm{Im}(f))^+$ und $f_4 := (\mathrm{Im}(f))^-$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $g_1, g_2, g_3, g_4 \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $\|f_j - g_j\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$ für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Definiere $g := (g_1 - g_2) + i(g_3 - g_4)$. Dann ist $g \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ und es gilt

$$\| \underbrace{f}_{=(f_1-f_2)+i(f_3-f_4)} - \underbrace{g}_{=(g_1-g_2)+i(g_3-g_4)} \|_2 =$$

$$= \|(f_1 - g_1) - (f_2 - g_2) + i(f_3 - g_3) - i(f_4 - g_4)\|_2 \leq$$

$$\underbrace{\|f_1 - g_1\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\|f_2 - g_2\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\|f_3 - g_3\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\|f_4 - g_4\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \,.$$

Schließlich sei $f \in L^2(X, \mathbb{C})$. Definiere die Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{falls } x \in X, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^s \setminus X. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$. Sei $\varepsilon > 0$. Weil $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ gilt, gibt es ein $\widetilde{g} \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ mit $\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_2 < \varepsilon$. Setze $g := \widetilde{g}\big|_X$. Dann ist $g \in C_c(X, \mathbb{C})$ und es gilt $\|f - g\|_2 \leq \|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_2 < \varepsilon$. □

Man kann also stets jede L^2-Funktion bezüglich $\|.\|_2$ durch Funktionen, die sich auf stetige Funktionen mit kompakten Träger fortsetzen lassen, approximieren. Leider ist es für eine Funktion im Allgemeinen nicht leicht festzustellen, ob sie sich zu so einer Funktionen fortsetzen lässt oder nicht. Deshalb zeigen wir jetzt noch, dass für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jede L^2-Funktion durch stetige Funktionen bezüglich $\|.\|_2$ approximiert werden kann.

Korollar 2.1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiters sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ in $L^2([a, b], \mathbb{C})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Beweis. Betrachte $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2 gibt es ein $g \in C_c([a, b], \mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Wegen Proposition 2 ist g stetig. $\square$