Metrische Räume

Unter metrischen Räumen versteht man Mengen, bei denen man einen Abstand zwischen zwei Elementen bestimmen kann. Dadurch lassen sich gewisse geometrische Argumente auf metrische Räume übertragen. Insbesondere kann man dann solche Argumente auf gewissen Räumen von Funktionen verwenden.

1. Metriken

Zunächst definieren wir Metriken. Ein Abstand ordnet zwei Punkten eine reelle Zahl zu (ist also eine Funktion von $M \times M$ nach $\mathbb{R}$). Der Abstand soll nie negativ werden können. Weiters soll der Abstand genau dann gleich 0 sein, wenn die Punkte gleich sind. Für den Abstand von y zu x soll man den selben Wert erhalten, wie für den Abstand von x zu y. Schließlich soll sich der Abstand nicht durch „Umwege“ verkürzen lassen, also die Summe der Abstände von x zu z und von z zu y soll nicht kleiner sein als der Abstand von x zu y (diese Eigenschaft nennt man die *Dreiecksungleichung*). Formal sieht die Definition einer Metrik folgendermaßen aus.

Definition. Sei M eine nichtleere Menge. Eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, falls

(1) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$,

(2) für $x, y \in M$ gilt $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(3) $d(y,x) = d(x,y)$ für alle $x, y \in M$, und

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ für alle $x, y, z \in M$.

Für eine nichtleere Menge M mit einer Metrik d nennt man (M,d) einen *metrischen Raum*.

Bemerkung. Auf metrischen Räumen gilt stets auch der *linke Teil der Dreiecksungleichung*, nämlich $\big|d(x,z) - d(z,y)\big| \leq d(x,y)$.

Zum Beweis verwendet man die Dreiecksungleichung, aus der sich sowohl $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ als auch $d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y)$ ergeben. Wegen $d(y,z) = d(z,y)$ folgt aus der ersten Ungleichung, dass $d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$. Genauso ergibt sich wegen $d(z,x) = d(x,z)$ aus der zweiten Ungleichung, dass $-\big(d(x,z) - d(z,y)\big) = d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y)$. Nachdem $\big|d(x,z) - d(z,y)\big|$ gleich $d(x,z) - d(z,y)$ oder $-\big(d(x,z) - d(z,y)\big)$ ist, erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

Bevor wir jetzt Beispiele für metrische Räume geben, setzen wir fest, dass wir für $x \in \mathbb{R}^s$ und $y \in \mathbb{R}^s$ (bzw. $x, y \in \mathbb{C}^s$) hier stets $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$ schreiben, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_s \in \mathbb{R}$ (bzw. in $\mathbb{C}$) ist.

Unser erstes Beispiel ist $(\mathbb{R}, d)$ mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$. Es ist leicht nachzurechnen, dass das wirklich ein metrischer Raum ist. Man nennt diese Metrik die übliche Metrik auf $\mathbb{R}$. Betrachtet man $\mathbb{R}$ oder Teilmengen davon als metrischen Raum und ist keine konkrete Metrik angegeben, so ist stets diese übliche Metrik damit gemeint. Genauso ist die übliche Metrik auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ definiert (und auch auf $\mathbb{C}$, wobei man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ betrachten kann und wie unten erwähnt die Dreiecksungleichung etwas schwieriger zu beweisen ist).

Auch auf $\mathbb{R}^s$ und $\mathbb{C}^s$ (man kann $\mathbb{C}^s$ ja als $\mathbb{R}^{2s}$ betrachten) wird durch $d(x, y) := |x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} |x_j - y_j|^2}$ eine Metrik definiert. Mit Ausnahme der Dreiecksungleichung sind die Eigenschaften der Metrik leicht nachzurechnen. Zum Nachrechnen der Dreiecksungleichung kann man verwenden, dass sich wie im nächsten Absatz beschrieben aus einer Norm eine Metrik ergibt und durch $x \mapsto |x|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^s$ definiert ist. Dabei muss man die Dreiecksungleichung für Normen nachrechnen, wozu man die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung verwenden kann. Auch auf $\mathbb{R}^s$ und $\mathbb{C}^s$ nennt man die soeben definierte Metrik die übliche Metrik, und soferne keine Metrik explizit angegeben ist, ist auf diesen Mengen oder ihren Teilmengen stets diese übliche Metrik gemeint. Ebenso ist auf $\mathbb{Q}^s$, $\mathbb{Z}^s$ und $\mathbb{N}^s$ die übliche Metrik definiert.

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Funktion $x \mapsto \|x\|$ von V nach $\mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls

(1) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$,

(2) für $x \in V$ genau dann $\|x\| = 0$ gilt, wenn $x = 0$,

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, bzw. alle $\lambda \in \mathbb{C}$, und

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$ (*Dreiecksungleichung für Normen*).

Man nennt dann $(V, \|.\|)$ einen *normierten Raum*. Falls $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum ist, dann erhält man durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V und somit einen metrischen Raum (V, d). Zum Nachrechnen der Eigenschaften beachte, dass $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \, \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ und $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq$

$\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$. Man nennt die Metrik d die von der Norm $\|.\|$ induzierte Metrik.

Durch $d(x,y):=\sum_{j=1}^{s}|x_j-y_j|$ wird auf $\mathbb{R}^s$ eine Metrik definiert. Diese Metrik wird durch die Norm $\|x\|_1:=\sum_{j=1}^{s}|x_j|$ induziert. In diesem Fall ist es leicht nachzurechnen, dass d eine Metrik und $\|.\|_1$ eine Norm ist.

Definiert man $d(x,y):=\max\big\{|x_j-y_j|:j\in\{1,2,\ldots,s\}\big\}$, so ist d eine Metrik auf $\mathbb{R}^s$. Diese Metrik wird durch die Norm $\|x\|_\infty:=\max\big\{|x_j|:j\in\{1,2,\ldots,s\}\big\}$ induziert. Auch hier kann man leicht nachzurechnen, dass d eine Metrik und $\|.\|_\infty$ eine Norm ist.

Die bisher betrachteten Metriken waren stets von Normen induziert. Es gibt aber auch Metriken, die nicht von Normen induziert sind. Ein solches Beispiel ist die diskrete Metrik, die wir jetzt beschreiben werden. Sei M eine nichtleere Menge (es wäre sogar sinnvoll anzunehmen, dass M mindestens zwei Elemente hat). Dann wird durch

$$d(x,y):=\begin{cases}0\,, & \text{falls } x=y,\\ 1\,, & \text{falls } x\neq y,\end{cases}$$

eine Metrik definiert. Dabei sind die Eigenschaften der Metrik leicht nachzurechnen. Diese Metrik nennt man die diskrete Metrik. Um zu sehen, dass diese Metrik nicht von einer Norm induziert wird, betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der diskreten Metrik. Wegen $d(x,0)=1$ für alle $x\neq 0$ ist $\lim_{x\to+\infty}d(x,0)=1$. Wenn diese Metrik von einer Norm induziert wäre, müsste es eine Norm $\|.\|$ geben mit $d(x,y)=\|x-y\|$. Insbesondere wäre $d(x,0)=\|x-0\|=\|x\|=|x|\,\|1\|$. Wegen $\|1\|\neq 0$ wäre dann $\lim_{x\to+\infty}d(x,0)=\lim_{x\to+\infty}|x|\,\|1\|=+\infty$, was $\lim_{x\to+\infty}d(x,0)=1$ widerspricht. Damit haben wir zwar gezeigt, dass d nicht direkt von einer Norm induziert wird, es könnte aber sein, dass d zu einer von einer Norm „äquivalent“ ist (für uns soll „äquivalent“ heißen, dass für beide Metriken Konvergenz von Folgen äquivalent ist und auch die Grenzwerte übereinstimmen – Konvergenz von Folgen wird in Kapitel 2 definiert werden). Wegen $\big\|\frac{1}{n}-0\big\|=\big\|\frac{1}{n}\big\|=\frac{1}{n}\|1\|\to 0$ gilt $\frac{1}{n}\to 0$ für jede zu einer von einer Norm induzierten Metrik äquivalenten Metrik. Andererseits gilt $d\left(\frac{1}{n},0\right)=1$ für jedes $n\in\mathbb{N}$, also $\frac{1}{n}$ konvergiert in der diskreten Metrik nicht gegen 0.

Betrachte $C([0,1],\mathbb{R})$ (oder auch $C([0,1],\mathbb{C})$), die Menge aller stetigen Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Für $f\in C([0,1],\mathbb{R})$ definiere $\|f\|_\infty:=\sup\big\{|f(x)|:x\in[0,1]\big\}$ (wegen des Satzes vom Minimum und Maximum könnte man hier statt Supremum auch Maximum schreiben). Es ist leicht nachzurechnen, dass $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $C([0,1],\mathbb{R})$ ist. Deshalb wird durch $d(f,g):=\|f-g\|_\infty$ eine Metrik auf $C([0,1],\mathbb{R})$ definiert. Man nennt diese Norm die Supremumsnorm, die Maximumnorm oder die Unendlichnorm. Nachdem man zeigen kann, dass für Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,1],\mathbb{R})$ und $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ die Eigenschaft $f_n \to f$ bezüglich der Metrik d genau dann gilt, wenn f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, spricht man auch von der „Topologie der gleichmäßigen Konvergenz“.

Auch wenn viele der jetzt folgenden Begriffe noch nicht definiert wurden, und wir bei der Beschreibung der Räume vage bleiben, wollen wir hier kurz erwähnen, wie Konvergenz in (ähnlichen wie dem soeben behandelten $C([0,1],\mathbb{R})$) Funktionenräumen mit Metriken und ähnlichen Begriffen zusammenhängt. Die gleichmäßige Konvergenz kann durch eine Norm und damit durch eine Metrik beschrieben werden. Dagegen kann man die kompakt gleichmäßige Konvergenz (diese tritt z. B. bei Potenzreihen auf – diese konvergieren auf abgeschlossenen Teilintervallen des Konvergenzintervalls gleichmäßig) nicht durch eine Norm, aber durch eine Metrik beschreiben. Aus der Analysis ist auch die punktweise Konvergenz bekannt. Diese lässt sich auch nicht durch eine Metrik beschreiben, kann aber durch eine Topologie beschrieben werden. Schließlich gibt es auch noch die fast überall Konvergenz (die in der Stochastik vorkommende fast sichere Konvergenz ist ein Spezialfall davon), und diese kann auch nicht durch eine Topologie beschrieben werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels definieren wir offene und abgeschlossene Kugeln. Es ist zu beachten, dass wir abgeschlossene Kugeln als $\overline{B}(x,r)$ bezeichnen, und nicht als $\overline{B(x,r)}$. Letzteres hat eine andere Bedeutung und muss nicht mit $\overline{B}(x,r)$ übereinstimmen. Nachdem abgeschlossene Kugeln auch für $r=0$ definiert sind, erhält man $\overline{B}(x,0)=\{x\}$. Wenn man auch für offene Kugeln $r=0$ zulässt, wäre $B(x,0)=\emptyset$. Statt $B(x,r)$ wird auch oft $B_r(x)$ verwendet und statt $\overline{B}(x,r)$ wird auch oft $\overline{B}_r(x)$ verwendet.

Definition. Sei (M,d) ein metrischer Raum, sei $x \in M$ und sei $r \in \mathbb{R}$.

- Für $r > 0$ heißt $B(x,r) := \{y \in M : d(y,x) < r\}$ die *offene Kugel* um x mit Radius r.
- Wenn $r \geq 0$ ist, nennt man $\overline{B}(x,r) := \{y \in M : d(y,x) \leq r\}$ die *abgeschlossene Kugel* um x mit Radius r.

2. Offene und abgeschlossene Mengen, Konvergenz und Stetigkeit

Die Begriffe offene, bzw. abgeschlossene Menge sollen in gewisser Weise die Begriffe offenes, bzw. abgeschlossenes Intervall im Eindimensionalen verallgemeinern. Dabei ergeben sich aber auch im Eindimensionalen z. B. offene Mengen, die keine offenen Intervalle mehr sind (weil sie nicht mehr Intervalle sind). Ab hier sind Schreibweisen wie „$r > 0$“ als „$r \in \mathbb{R}$, $r > 0$“ zu verstehen. Wir beginnen dieses Kapitel mit der Definition offener Mengen. Eine Menge heißt offen, wenn es um jeden Punkt dieser Menge eine offene Kugel gibt, die zur Gänze in der Menge liegt. Beachte, dass der Begriff „offen“ (und auch „abgeschlossen“) vom zugrunde gelegten Grundraum (M, d) abhängt! So ist z. B. $A := [0, 1]$ offen in $[0, 1]$, aber nicht offen in $\mathbb{R}$! Es wäre also oft günstiger statt „A ist offen“ zu sagen „A ist offen in (M, d)“.

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann heißt A offen, falls $A = \emptyset$ oder es zu jedem $x \in A$ ein $r > 0$ gibt, sodass $B(x, r) \subseteq A$.

Nachdem es eine gewisse Analogie zwischen offenen und abgeschlossenen Mengen gibt, definieren wir gleich hier abgeschlossene Mengen mit Hilfe von offenen Mengen. An und für sich ist das aber eine schlechte Definition von Abgeschlossenheit, die bessere Definition (mit der man hauptsächlich arbeiten sollte) wird später in Proposition 5 kommen.

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann heißt A abgeschlossen, falls $M \setminus A$ offen ist.

Zunächst zeigen wir, dass offene Kugeln offen und abgeschlossene Kugeln abgeschlossen sind. Auch wenn das selbstverständlich erscheint, muss diese Aussage unter Verwendung der Definitionen erst einmal bewiesen werden.

Proposition 1. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei $x \in M$.*

(1) *Für $r > 0$ ist $B(x, r)$ offen.*

(2) *Falls $r \geq 0$ ist, ist $\overline{B}(x, r)$ abgeschlossen.*

Beweis. (1) Sei $y \in B(x, r)$ beliebig. Dann ist $d(y, x) < r$. Setze $s := r - d(y, x)$. Es ist daher $s > 0$. Wir wollen zeigen, dass $B(y, s)$ in $B(x, r)$ enthalten ist. Sei $z \in B(y, s)$. Somit ist $d(z, y) < s$. Deshalb ergibt sich

$$d(z, x) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(z, y)}_{<s=r-d(y,x)} + d(y, x) < r - d(y, x) + d(y, x) = r \ ,$$

also $z \in B(x, r)$. Somit ist $B(y, s) \subseteq B(x, r)$ und daher ist $B(x, r)$ offen.

(2) Wenn $\overline{B}(x, r) = M$ gilt, ist $M \setminus \overline{B}(x, r) = \emptyset$, also offen, und deshalb ist $\overline{B}(x, r)$ abgeschlossen. Betrachte jetzt den Fall $\overline{B}(x, r) \neq M$. Sei $y \in M \setminus \overline{B}(x, r)$. Dann ist $d(y, x) > r$. Setze $s := d(y, x) - r$. Wir wollen zeigen, dass $B(y, s)$ in $M \setminus \overline{B}(x, r)$ enthalten ist. Dazu sei $z \in B(y, s)$. Angenommen es gelte $z \in \overline{B}(x, r)$. Dann gilt

$$d(y, x) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(y, z)}_{=d(z,y)<s=d(y,x)-r} + \underbrace{d(z, x)}_{\leq r} < d(y, x) - r + r = d(y, x) \ ,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist (die Zahl $d(y,x)$ kann ja nicht kleiner als sie selbst sein). Also muss $z \notin \overline{B}(x,r)$ gelten, woraus sich $B(y,s) \subseteq M \setminus \overline{B}(x,r)$ ergibt. Somit ist $M \setminus \overline{B}(x,r)$ offen, und deshalb ist die Menge $\overline{B}(x,r)$ abgeschlossen. $\square$

Jetzt zeigen wir einige Eigenschaften der Familie der offenen Mengen. Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen.

Proposition 2. *Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann gelten:*

(1) *Es sind $\emptyset$ und M offen.*

(2) *Falls $(U_j)_{j\in J}$ eine beliebige Familie offener Mengen ist, dann ist $\bigcup_{j\in J} U_j$ offen.*

(3) *Wenn für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ offen sind, dann ist auch $\bigcap_{j=1}^n U_j$ offen.*

Beweis. (1) Nach Definition ist $\emptyset$ offen. Wir zeigen jetzt, dass M offen ist. Es sei $x \in M$. Dann ist $B(x,1) \subseteq M$ und somit ist M offen.

(2) Sei $x \in \bigcup_{j\in J} U_j$. Dann gibt es ein $k \in J$ mit $x \in U_k$. Weil U_k offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq U_k$. Nachdem offensichtlich $U_k \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ erhalten wir $B(x,r) \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$. Daher ist $\bigcup_{j\in J} U_j$ offen.

(3) Jetzt sei $x \in \bigcap_{j=1}^n U_j$. Betrachte ein beliebiges $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Dann ist $x \in U_j$ und da U_j offen ist, gibt es ein $r_j > 0$ mit $B(x,r_j) \subseteq U_j$. Setze $r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Weil r das Minimum von endlich vielen positiven Zahlen ist, gilt $r > 0$. Wähle ein beliebiges $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Es gilt dann $B(x,r) \subseteq B(x,r_j) \subseteq U_j$. Deshalb ist $B(x,r) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j$ und somit ist $\bigcap_{j=1}^n U_j$ offen. $\square$

Es wurde bereits erwähnt, dass es eine Verallgemeinerung metrischer Räume gibt, die topologischen Räume. Eine Möglichkeit diese zu definieren ist es, eine Familie von offenen Mengen anzugeben, die die in Proposition 2 angeführten Eigenschaften erfüllt. Manche Eigenschaften von metrischen Räumen lassen sich auf solche viel abstraktere topologische Räume übertragen, andere jedoch nicht mehr (so muss in allgemeinen topologischen Räumen z. B. der Grenzwert einer Folge nicht mehr eindeutig bestimmt sein). Für uns sind jedoch nur metrische Räume wichtig.

Indem man verwendet, dass eine Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement offen ist, erhält man unter Anwendung der de Morgan'schen Gesetze auf Proposition 2 ein analoges Resultat für abgeschlossene Mengen. Dieses beschreiben wir gleich in Proposition 3, den Beweis haben wir soeben erwähnt. Natürlich könnte man das Resultat auch unter Verwendung von Proposition 5 beweisen. Es sind beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Proposition 3. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gelten:*

(1) *Die Mengen $\emptyset$ und M sind abgeschlossen.*

(2) *Wenn $(A_j)_{j\in J}$ eine beliebige Familie abgeschlossener Mengen ist, dann ist $\bigcap_{j\in J} U_j$ abgeschlossen.*

(3) *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ abgeschlossen. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ abgeschlossen.*

Schließlich definieren in diesem Zusammenhang noch den Begriff der Umgebung eines Punktes oder einer Menge. In gewissen Sinn ist dieser Begriff intuitiv. Offene Mengen, die den Punkt oder die Menge enthalten, sind Umgebungen, und auch alle Obermengen davon. Umgebungen müssen also nicht unbedingt offen sein. Auf jeden Fall ist aber der Punkt oder die Menge in ihrer Umgebung enthalten.

Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $U \subseteq M$.

- Für $x \in M$ heißt U *Umgebung* von x, falls es eine offene Menge $V \subseteq M$ gibt, sodass $x \in V$ und $V \subseteq U$ gelten.
- Sei $A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$. Dann heißt U *Umgebung* von A, wenn es eine offene Menge $V \subseteq M$ gibt, für die $A \subseteq V \subseteq U$ gilt.

Als nächstes definieren wir den Abschluss, das Innere und den Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes. Für eine abgeschlossene Menge A stimmt der Abschluss mit A überein, und für eine offene Menge U stimmt das Innere mit U überein. Der Abschluss einer Menge A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, das Innere von A ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist, und der Rand von A besteht aus jenen Punkten, die zwar im Abschluss, aber nicht im Inneren liegen. Bei „einfachen Mengen" entspricht der Rand der intuitiven Vorstellung.

Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei $A \subseteq M$.

(1) Dann heißt $\overline{A} := \bigcap\limits_{\substack{B\supseteq A\\ A \text{ abgeschlossen}}} B$ der *Abschluss* von A.

(2) Die Menge $A^{\circ} := \bigcup\limits_{\substack{B\subseteq A\\ A \text{ offen}}} B$ wird das *Innere* von A genannt.

(3) Man nennt $\partial A := \overline{A} \setminus A^{\circ}$ den *Rand* von A.

Wegen (2) aus Proposition 3 ist $\overline{A}$ stets abgeschlossen. Aus Eigenschaft (2) von Proposition 2 ist A° stets offen. Deshalb folgt wegen (2) aus Proposition 3, dass ∂A immer abgeschlossen ist.

Um ein Beispiel zu geben betrachten wir $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Metrik) und $A := [0,1)$. Dann ist $\overline{A} = [0,1]$, $A^{\circ} = (0,1)$ und $\partial A = \{0,1\}$. Betrachtet man im selben Grundraum die Menge $B := [0,1) \cap \mathbb{Q}$, so erhält man $\overline{B} = [0,1]$, $B^{\circ} = \emptyset$ und $\partial B = [0,1]$.

Betrachte jetzt $(\mathbb{N}, d)$, wobei d die diskrete Metrik ist. Dann ist $B(1,1) = \overline{B}(1,0) = \{1\}$ und $\overline{B}(1,1) = \mathbb{N}$ (1 ist der einzige Punkt, dessen Abstand von 1 kleiner als 1 ist, und alle anderen Punkte haben Abstand 1 von 1). Nachdem $\{1\} = \overline{B}(1,0)$ ist $\{1\}$ nach (2) von Proposition 1 abgeschlossen, und deshalb ist $\overline{B(1,1)} = \{1\}$. Also ist in diesem Beispiel $\overline{B(1,1)} \neq \overline{B}(1,1)$.

Eine weitere wichtige Definition ist die einer dichten Teilmengen. Als ein Beispiel dafür hätte man, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Definition. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann heißt $A \subseteq M$ *dicht* in M, wenn $\overline{A} = M$ gilt.

Jetzt definieren den Grenzwert einer Folge. Diese Definition stimmt in den entscheidenden Punkten mit der entsprechenden Definition in $\mathbb{R}$ überein.

Definition. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Weiters sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $x_0 \in M$. Dann nennt man x_0 den *Grenzwert* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Eigenschaft $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ gilt.

Man sagt im obigen Fall auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen x_0 und schreibt auch $x_n \to x_0$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *konvergent*, wenn es ein $x_0 \in M$ gibt, sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt. Eigentlich hängen Grenzwert und Konvergenz vom Grundraum und der Metrik ab, also es wäre korrekter zu sagen „$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in M bezüglich d gegen x_0“. Bezüglich der üblichen Metrik ist die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}$, aber nicht konvergent in $(0,1)$ (der Grenzwert 0 liegt ja nicht in $(0,1)$). Eine Folge, die nicht konvergiert, nennt man auch *divergent*.

Wie in $\mathbb{R}$ ist der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt (das gilt aber in allgemeinen topologischen Räumen nicht mehr). Um diese Eigenschaft zu zeigen, beweisen zuerst die folgende Eigenschaft.

Lemma 1. *Es sei (M,d) ein metrischer Raum, und es seien $x, y \in M$. Falls $d(x,y) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dann gilt $x = y$.*

Beweis. Angenommen es wäre $x \neq y$. Somit wäre $d(x,y) > 0$ und daher auch $\frac{d(x,y)}{2} > 0$. Nachdem $d(x,y)$ kleiner als jede positive Zahl ist, müsste $d(x,y) < \frac{d(x,y)}{2}$ gelten, woraus sich $2d(x,y) < d(x,y)$ ergibt. Also wäre $d(x,y) < 0$, was aber $d(x,y) > 0$ widerspricht. Deshalb muss $x = y$ gelten. □

Proposition 4. *Es sei (M,d) ein metrischer Raum, und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in M. Dann ist der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien $x_0, \widetilde{x}_0 \in M$ mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $\widetilde{x}_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Wir müssen jetzt zeigen, dass $\widetilde{x}_0 = x_0$ gilt. Dazu nehmen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N_1, sodass $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$ gilt, und es gibt ein N_2, sodass $d(x_n, \widetilde{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$ gilt. Wähle jetzt $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Es gilt dann

$$d(\widetilde{x}_0, x_0) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(\widetilde{x}_0, x_n)}_{=d(x_n\widetilde{x}_0)<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_n, x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Somit ist $d(\widetilde{x}_0, x_0) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1 ist $\widetilde{x}_0 = x_0$. □

Unsere nächste Proposition beschreibt abgeschlossene Mengen mit Hilfe von konvergenten Folgen. Die darin beschriebene Eigenschaft sollte als die vernünftige Definition der Abgeschlossenheit angesehen werden, und es sollte hauptsächlich mit ihr gearbeitet werden.

Proposition 5. *Es sei (M,d) ein metrischer Raum und es sei $A \subseteq M$. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn $A = \emptyset$ oder wenn für jede (in M) konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Für $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, also braucht man nur den Fall $A \neq \emptyset$ betrachten. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und es sei $x_0 \in M$ so, dass $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Wir müssen zeigen, dass $x_0 \in A$ gilt. Angenommen $x_0 \notin A$. Es ist dann $x_0 \in M \setminus A$, und weil A abgeschlossen ist, ist $M \setminus A$ offen. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subseteq M \setminus A$. Da $x_n \to x_0$ gibt es ein N mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wähle ein $n \geq N$. Dann ist $d(x_n, x_0)$, also $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ und somit $x_n \in M \setminus A$. Dies widerspricht aber $x_n \in A$ (die Folge ist ja in A). Deshalb ist $x_0 \in A$.

($\Leftarrow$) Wenn $A = \emptyset$, dann ist $M \setminus A = M$ offen und deshalb A abgeschlossen. Ähnlich gilt im Fall $A = M$, dass $M \setminus A = \emptyset$ offen und somit A abgeschlossen ist. Es bleibt also der Fall $A \neq \emptyset$ und $A \neq M$ zu betrachten. Betrachte ein beliebiges $x_0 \in M \setminus A$. Angenommen für jedes $\varepsilon > 0$ wäre $B(x_0, \varepsilon)$ nicht in $M \setminus A$ enthalten, also $B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein

$x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$. Daher ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und es gilt $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ für alle n. Somit ist $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ und es müsste $x_0 \in A$ gelten. Nachdem dies $x_0 \in M \setminus A$ widerspricht, muss es ein $\varepsilon > 0$ geben, sodass $B(x_0, \varepsilon) \subseteq M \setminus A$. Also ist $M \setminus A$ offen und somit A abgeschlossen. □

An dieser Stelle können wir jetzt die Eigenschaften „offen" und „abgeschlossen" bei einigen Beispielen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Metrik) behandeln. Zuerst betrachte $A := (-2, 4)$. Ist $x \in A$, dann folgt wegen $-2 < x < 4$, dass $x + 2 > 0$ und $4 - x > 0$. Deshalb ist $r := \min\{x + 2, 4 - x\} > 0$ und es gelten $-2 \leq x - r$ und $x + r \leq 4$. Für ein $y \in B(x, r)$ gilt $-2 \leq x - r < y < x + r \leq 4$, also $y \in A$. Daher ist $B(x, r) \subseteq A$ und somit ist A offen. Andererseits ist die Folge $\left(4 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, aber $\lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{1}{n}\right) = 4 \notin A$, und deshalb ist A nicht abgeschlossen. Die Menge A ist also offen und nicht abgeschlossen. Betrachte jetzt $B := [-3, 2]$. Wenn B offen wäre, müsste es ein $r > 0$ geben mit $B(-3, r) \subseteq B$. Es gilt aber $-3 - \frac{r}{2} \in B(-3, r)$ und $-3 - \frac{r}{2} \notin B$, also ist B nicht offen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B und $x_0 \in \mathbb{R}$ erfülle $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Weil $x_n \in B$ gilt, erhalten wir $-3 \leq x_n \leq 2$ für alle n. Deshalb gilt $-3 \leq x_0 \leq 2$ und somit ist $x_0 \in B$. Daher ist B abgeschlossen. Also ist die Menge B nicht offen und abgeschlossen (umgangssprachlich wäre die Formulierung „abgeschlossen und nicht offen" günstiger, aber mathematisch bezieht sich das Wort „nicht" hier sicher nicht auf das Wort „abgeschlossen"). Schließlich betrachte $C := (-5, 8]$. Wäre C offen so müsste es ein $r > 0$ geben mit $B(8, r) \subseteq C$. Weil jedoch $8 + \frac{r}{2} \in B(8, r)$ und $8 + \frac{r}{2} \notin C$ gelten, ist C nicht offen. Die Folge $\left(-5 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in C, aber $\lim_{n\to\infty} \left(-5 + \frac{1}{n}\right) = -5 \notin C$, also ist C nicht abgeschlossen. Somit ist die Menge C nicht offen und nicht abgeschlossen.

Die nächste wichtige Eigenschaft, die wir behandeln ist die Stetigkeit. Auch diese sieht wieder der entsprechenden Eigenschaft in $\mathbb{R}$ ähnlich und hat auch ähnliche elementare Eigenschaften. Insbesondere gilt, dass der Grenzwert von Funktionswerten gleich dem Funktionswert des Grenzwerts ist (diese Eigenschaft ist die wichtigste im Zusammenhang mit der Definition der Stetigkeit).

Definition. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion.

(1) Für $x_0 \in M_1$ heißt f *stetig* in x_0, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in M_1$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$ die Eigenschaft $d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ gilt.

(2) Man nennt f *stetig*, wenn f stetig in x für alle $x \in M_1$ ist.

(3) Die Funktion f heißt *gleichmäßig stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in M_1$, die $d_1(x, y) < \delta$ erfüllen, die Eigenschaft $d_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ gilt.

Also f ist stetig, wenn es für alle $x \in M_1$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $y \in M_1$ mit $d_1(y, x) < \delta$ die Eigenschaft $d_2\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$ gilt. Dieses δ hängt also von f, ε und x ab. Im Gegensatz dazu hängt δ bei der gleichmäßigen Stetigkeit nur mehr von f und ε ab, aber nicht mehr von x.

Wenn eine Funktion f nicht stetig in x_0 ist, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit $x_n \to x_0$, sodass $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0$ für alle n gilt. Ist eine Funktion f nicht stetig, dann gibt es ein $x_0 \in M_1$, ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit $x_n \to x_0$, sodass $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0$ für alle n gilt. Falls eine Funktion f nicht gleichmäßig stetig ist, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit $d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, sodass $d_2\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0$ für alle n gilt.

Proposition 6. *Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, sei $x_0 \in M_1$ und sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig in x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1, die $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ erfüllt, die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Betrachte eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Weil f stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass aus $d_1(x, x_0) < \delta$ folgt, dass $d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ gilt. Nachdem $x_n \to x_0$ gilt, gibt es ein N, sodass $d_1(x_n, x_0) < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Sei jetzt $n \geq N$. Dann ist $d_1(x_n, x_0) < \delta$ und daher $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$. Somit ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Angenommen f wäre nicht stetig in x_0. Dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit $x_n \to x_0$, sodass $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0$ für alle n gilt. Wegen $x_n \to x_0$ gilt auch $f(x_n) \to f(x_0)$ und deshalb gibt es ein N, sodass $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon_0$ für alle $n \geq N$ gilt. Wähle $n \geq N$. Einerseits gilt dann $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0$, andererseits gilt aber auch $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon_0$. Daraus ergibt sich $\varepsilon_0 \leq d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon_0$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Daher ist f stetig in x_0. $\square$

Als nächstes beschreiben wir Eigenschaften, die äquivalent zur (globalen) Stetigkeit sind. Insbesondere erhalten wir, dass stetige Urbilder offener Mengen offen sind, und stetige Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Beachte aber, dass das stetige Bild einer offenen Menge nicht offen sein muss ($f(x) := x^2$, $U := (-1, 1)$ ist offen, aber $f(U) = [0, 1)$ ist nicht offen) und das stetige Bild einer abgeschlossenen Menge nicht abgeschlossen sein muss ($f(x) := \arctan x$, $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, aber $f(\mathbb{R}) = \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ ist nicht abgeschlossen).

Proposition 7. *Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Funktion f ist stetig.*

(2) *Für jede offene Menge $U \subseteq M_2$ ist $f^{-1}(U)$ offen in M_1.*

(3) *Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M_2$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M_1.*

(4) *Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1, die in M_1 konvergiert.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (3): Wenn $A \subseteq M_2$ abgeschlossen ist, dann ist $M_2 \setminus A$ offen. Somit ist $M_1 \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(M_2 \setminus A)$ offen, und daher $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(3) $\Rightarrow$ (2): Für $U \subseteq M_2$ offen ist $M_2 \setminus U$ abgeschlossen. Deshalb ist $M_1 \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(M_2 \setminus U)$ abgeschlossen, also $f^{-1}(U)$ offen.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $x \in f^{-1}(U)$. Es ist dann $f(x) \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Nachdem f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $d_2\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$ für alle $y \in M_1$ mit $d_1(y, x) < \delta$ gilt. Sei $y \in B(x, \delta)$. Dann gilt $d_1(y, x) < \delta$, und daher $d_2\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$. Also ist $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, und somit $f(y) \in U$, woraus sich $y \in f^{-1}(U)$ ergibt. Somit ist $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ und daher ist $f^{-1}(U)$ offen.

(2) $\Rightarrow$ (4): Betrachte eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1. Dann gibt es ein $x_0 \in M_1$ mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $B(f(x_0), \varepsilon)$ offen. Daher ist auch $f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$ offen. Nachdem offensichtlich $x_0 \in f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$ gilt, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$. Weil $x_n \to x_0$, gibt es ein N, sodass $d_1(x_n, x_0) < \delta$ für alle $n \geq N$. Sei $n \geq N$. Es ist dann $d_1(x_n, x_0) < \delta$, also $x_n \in B(x_0, \delta)$ und deshalb $x_n \in f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$. Somit ist $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ und daher $d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$. Deshalb gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Es sei $x \in M_1$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit $x_n \to x$, dass $f(x_n) \to f(x)$. Wegen Proposition 6 ist f stetig in x. Somit ist f stetig. □

Für topologische Räume kann man die Stetigkeit durch die Eigenschaft (2) aus Proposition 7 definieren. Weiters kann man dieses Resultat auch nützen um die Offenheit oder Abgeschlossenheit zu zeigen. Dazu betrachten wir als ein Beispiel die Menge $A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \frac{{x_1}^2}{25} + \frac{{x_2}^2}{4} < 1 \right\}$. Dann kann man die stetige Funktion $f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \frac{{x_1}^2}{25} + \frac{{x_2}^2}{4}$ betrachten und erhält $A = f^{-1}\big((-\infty, 1)\big)$. Weil $(-\infty, 1)$ offen ist, ist daher auch A als stetiges Urbild einer offenen Menge offen. Jetzt zeigen wir noch, dass die Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig ist.

Proposition 8. *Es seien* (M_1, d_1), (M_2, d_2) *und* (M_3, d_3) *metrische Räume,* $f_1 : M_1 \to M_2$ *und* $f_2 : M_2 \to M_3$ *Funktionen, und* $x_0 \in M_1$. *Falls* f_1 *stetig in* x_0 *und* f_2 *stetig in* $f_1(x_0)$ *sind, dann ist* $f_2 \circ f_1$ *stetig in* x_0.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Weil f_2 stetig in $f_1(x_0)$ ist, gibt es ein $\eta > 0$, sodass für alle $y \in M_2$ mit $d_2\big(y, f_1(x_0)\big) < \eta$ die Eigenschaft $d_3\big(f_2(y), f_2(f_1(x_0))\big) < \varepsilon$ gilt. Nachdem f_1 stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in M_1$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$ die Eigenschaft $d_2\big(f_1(x), f_1(x_0)\big) < \eta$ gilt. Jetzt sei $x \in M_1$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$. Dann ist $d_2\big(f_1(x), f_1(x_0)\big) < \eta$ und daher $d_3\big(f_2(f_1(x)), f_2(f_1(x_0))\big) < \varepsilon$. Wegen $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ und $(f_2 \circ f_1)(x_0) = f_2(f_1(x_0))$ erhalten wir daraus $d_3\big((f_2 \circ f_1)(x), (f_2 \circ f_1)(x_0)\big) < \varepsilon$. Somit ist $f_2 \circ f_1$ stetig in x_0. $\square$

3. Zusammenhängende Mengen

Als nächstes beschäftigen wir uns mit zusammenhängenden Mengen. Obwohl die Definition zunächst nicht sehr anschaulich aussieht, ist dieser Begriff für einfache Mengen anschaulich. So sind die Mengen A_1 in Abbildung 1 und A_3 in Abbildung 3 zusammenhängend, während A_2 in Abbildung 2 nicht zusammenhängend ist.

Abbildung 1: In diesem Beispiel ist die Menge A_1 zusammenhängend und einfach zusammenhängend.

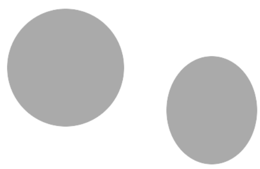

Abbildung 2: Die Menge A_2 ist nicht zusammenhängend.

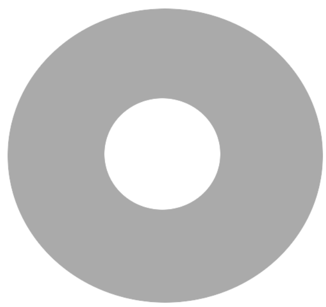

Abbildung 3: Hier ist die Menge A_3 zwar zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum, und sei $A \subseteq M$. Dann heißt A *zusammenhängend*, falls es keine offenen Mengen U_1 und U_2 gibt, die $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $A \subseteq U_1 \cup U_2$ erfüllen.

Bei der Menge A_2 aus Abbildung 2 kann man eine offene Menge U_1 um den linken Teil von A_2 und eine offene Menge U_2 um den rechten Teil von A_2

so legen, dass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Also ist A_2 nicht zusammenhängend. Bei den Mengen A_1 aus Abbildung 1 und A_3 aus Abbildung 3 überlege man sich intuitiv, dass man wie in der Definition geforderte offene Mengen U_1 und U_2 nicht finden kann. Deshalb sind diese Mengen zusammenhängend.

Jetzt wollen wir zeigen, dass in $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Metrik) genau die Intervalle zusammenhängend sind. Dabei heißt $A \subseteq \mathbb{R}$ *Intervall*, falls aus $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x < x_2$ folgt, dass $x \in A$.

Proposition 9. *Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A ein Intervall ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei A zusammenhängend. Angenommen A wäre kein Intervall. Dann gäbe es $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ und ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x < x_2$, sodass $x \notin A$. Setze $U_1 := (-\infty, x)$ und $U_2 := (x, +\infty)$. Dann sind U_1 und U_2 offen, wegen $x_1 \in U_1 \cap A$ ist $U_1 \cap A \neq \emptyset$ und wegen $x_2 \in U_2 \cap A$ ist $U_2 \cap A \neq \emptyset$, und offensichtlich ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Weiters gilt wegen $x \notin A$, dass $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x\} = U_1 \cup U_2$. Somit wäre A nicht zusammenhängend, was unserer Annahme widerspricht. Also muss A ein Intervall sein.

($\Leftarrow$) Jetzt sei A ein Intervall. Angenommen A wäre nicht zusammenhängend. Dann gäbe es offene Mengen U_1 und U_2 mit $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $A \subseteq U_1 \cup U_2$. Weil $U_1 \cap A \neq \emptyset$ gilt, gibt es ein $x_1 \in U_1 \cap A$, und wegen $U_2 \cap A \neq \emptyset$ gibt es ein $x_2 \in U_1 \cap A$. Da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist $x_1 \neq x_2$ und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 < x_2$ annehmen. Setze $U := U_1 \cap [x_1, x_2]$. Es ist dann $x_1 \in U$, also $U \neq \emptyset$, und x_2 ist eine obere Schranke von U, also U ist nach oben beschränkt. Daher besitzt U ein Supremum. Setze $s := \sup U$. Es ist $x_1 \leq s \leq x_2$, und da A ein Intervall ist und $x_1, x_2 \in A$ erhalten wir $s \in A$. Nehmen wir zunächst einmal an, dass $s \in U_1$ gilt. Weil $x_2 \notin U_1$, muss dann $s < x_2$ gelten. Da U_1 offen ist gibt es ein $r > 0$ mit $(s - r, s + r) \subseteq U_1$, und wegen $x_2 \notin U_1$ gilt $s + r \leq x_2$. Dann wäre $x_1 \leq s < s + \frac{r}{2} < s + r \leq x_2$, also $s + \frac{r}{2} \in U$, was $s = \sup U$ widerspricht. Deshalb muss $s \notin U_1$ gelten. Wegen $s \in A$ und $A \subseteq U_1 \cup U_2$ muss daher $s \in U_2$ gelten. Nachdem $x_1 \notin U_2$ gilt, erhält man $x_1 < s$. Weil U_2 offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $(s-r, s+r) \subseteq U_2$. Weiters folgt $x_1 \leq s-r$ aus $x_1 \notin U_2$. Wegen $s = \sup U$ gibt es ein $x \in U$ mit $x_1 \leq s-r < x \leq s \leq x_2$ und daher ist $x \in (s - r, s + r)$, also $x \in U_2$. Andererseits folgt aus $x \in U$, dass $x \in U_1$ gilt, was $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ widerspricht. Somit muss A zusammenhängend sein. □

Weil $M := (0, 1) \cup (2, 3)$ nicht zusammenhängend ist, $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ stetig ist, $\{0\}$ zusammenhängend ist und $f^{-1}(\{0\}) = M$ gilt, sieht man, dass das stetige Urbild zusammenhängender Mengen nicht zusammenhängend sein muss. Jetzt zeigen wir, dass stetige Bilder zusammenhängender

Mengen zusammenhängend sind. Als eine Folgerung davon wird sich in Proposition 11 der *Zwischenwertsatz* ergeben.

Proposition 10. *Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ eine stetige Funktion. Wenn $A \subseteq M_1$ zusammenhängend ist, dann ist $f(A)$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass $f(A)$ nicht zusammenhängend ist. Es gibt dann offene Mengen $U_1 \subseteq M_2$ und $U_2 \subseteq M_2$ mit $U_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $U_2 \cap f(A) \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $f(A) \subseteq U_1 \cup U_2$. Nach Proposition 7 sind $V_1 := f^{-1}(U_1)$ und $V_2 := f^{-1}(U_2)$ offene Teilmengen von M_1. Wäre $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, dann gäbe es ein $x \in V_1 \cap V_2$, woraus $f(x) \in U_1 \cap U_2$ folgt. Nachdem aber $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gilt, muss also $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gelten. Weil $U_1 \cap f(A) \neq \emptyset$ gibt es ein $y \in U_1 \cap f(A)$, und wegen $y \in f(A)$ gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Deshalb ist $x \in V_1$, und somit ist $V_1 \cap A \neq \emptyset$. Dasselbe Argument zeigt auch, dass $V_2 \cap A \neq \emptyset$. Sei $x \in A$. Dann ist $f(x) \in f(A) \subseteq U_1 \cup U_2$, und daher gilt $x \in f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = V_1 \cup V_2$, also $A \subseteq V_1 \cup V_2$. Es wäre also A nicht zusammenhängend, was unserer Annahme widerspricht. Deshalb ist $f(A)$ zusammenhängend. □

Proposition 11. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und $A \subseteq M$ zusammenhängend. Weiters sei $c \in \mathbb{R}$ so, dass es $x_1, x_2 \in A$ mit $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$ gibt. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = c$.*

Beweis. Nach Proposition 10 ist $f(A)$ zusammenhängend. Deshalb ist $f(A)$ wegen Proposition 9 ein Intervall. Da $f(x_1), f(x_2) \in f(A)$ erhalten wir $c \in f(A)$. Somit gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = c$. □

Jetzt werden wir Kurven definieren. Kurven haben einen Anfangs- und einen Endpunkt, sowie eine Orientierung (eine Richtung, in der sie durchlaufen werden). Stimmen Anfangs- und Endpunkt überein, so spricht man von einer *geschlossenen Kurve*. Im Gegensatz zur Umgangssprache nennt man in der Mathematik auch ein Geradenstück eine Kurve.

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine *Kurve* in M ist eine stetige Funktion $c : [0, 1] \to M$.

Man könnte auch stetige Funktionen $c : [a, b] \to M$ als Kurven definieren, das ist eine kleine Variation dieser Definition. Meistens definiert man für Kurven $c_1 : [a_1, b_1] \to M$ und $c_2 : [a_2, b_2] \to M$ eine Äquivalenzrelation durch $c_1 \equiv c_2$, falls es eine bijektive stetige streng monoton wachsende Funktion $h : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ gibt, sodass $c_1(t) = c_2\big(h(t)\big)$ für alle $t \in [a_1, b_1]$

gilt. Als Kurve definiert man dann eine solche Äquivalenzklasse, c_1 nennt man einen Repräsentanten dieser Kurve. Hier gehen wir etwas weniger formal mit Kurven um. Wir definieren jetzt die Umkehrkurve (in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve) und die Zusammensetzung zweier Kurven. Beachte, dass wir die Umkehrkurve als $c^{(-1)}$ bezeichnen, während c^{-1} das Urbild der Funktion $c : [0,1] \to M$ beschreibt.

Definition. Es sei (M,d) ein metrischer Raum, und seien c_1, c_2, c Kurven in M.

(1) Man nennt $c^{(-1)} : [0,1] \to M$, $c^{(-1)}(t) := c(1-t)$ die *inverse Kurve* (oder *Umkehrkurve*) zu c.

(2) Wenn $c_2(0) = c_1(1)$ (also der Anfangspunkt von c_2 gleich dem Endpunkt von c_1 ist), dann nennt man $c_2 c_1 : [0,1] \to M$,

$$c_2 c_1(t) := \begin{cases} c_1(2t)\,, & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ c_2(2t-1)\,, & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

die *Zusammensetzung* der Kurven c_1 und c_2.

Anschaulicher als die Definition von „zusammenhängend“ ist die folgende Definition von „bogenweise zusammenhängend“. Eine Menge heißt bogenweise zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte dieser Menge gegeben sind, diese Punkte durch eine Kurve innerhalb dieser Menge verbunden werden können. Gleich danach werden wir besprechen, wie diese beiden Begriffe zusammenhängen. Eine bogenweise zusammenhängende Menge ist stets zusammenhängend, aber es gibt (auch in $\mathbb{R}^2$) Beispiele von zusammenhängenden Mengen, die nicht bogenweise zusammenhängend sind (wir werden hier allerdings diese Beispiele nicht besprechen). Allerdings ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ genau dann zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.

Definition. Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann heißt A *bogenweise zusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in A$ eine Kurve c in A gibt, die $c(0) = x$ und $c(1) = y$.

Proposition 12. *Sei (M,d) ein metrischer Raum. Wenn $A \subseteq M$ bogenweise zusammenhängend ist, dann ist A zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen A wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es dann offene Mengen $U_1 \subseteq M$ und $U_2 \subseteq M$ mit $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $A \subseteq U_1 \cup U_2$. Also gibt es ein $x_1 \in U_1 \cap A$ und ein $x_2 \in U_1 \cap A$. Nachdem A

bogenweise zusammenhängend ist, gibt es eine stetige Funktion $c : [0, 1] \to A$ mit $c(0) = x_1$ und $c(1) = x_2$. Wegen Proposition 7 sind $V_1 := c^{-1}(U_1)$ und $V_2 := c^{-1}(U_2)$ offene Teilmengen von $[0, 1]$. Wenn $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ wäre, dann gäbe es ein $x \in V_1 \cap V_2$, woraus sich $c(x) \in U_1 \cap U_2$ ergibt, was aber $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ widerspricht. Also ist $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Da $c(0) = x_1$ und $c(1) = x_2$ ist $0 \in V_1$ und $1 \in V_1$, also $V_1 \cap [0, 1] \neq \emptyset$ und $V_2 \cap [0, 1] \neq \emptyset$. Betrachte ein beliebiges $x \in [0, 1]$. Es ist $c(x) \in A \subseteq U_1 \cup U_2$, und deshalb $x \in c^{-1}(U_1) \cup c^{-1}(U_2) = V_1 \cup V_2$. Somit ist $[0, 1] \subseteq V_1 \cup V_2$, und $[0, 1]$ wäre nicht zusammenhängend. Das liefert aber einen Widerspruch, weil $[0, 1]$ nach Proposition 9 zusammenhängend ist. Also ist A zusammenhängend. $\square$

Satz 1. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^s$ eine nichtleere offene Menge. Dann ist G genau dann zusammenhängend, wenn G bogenweise zusammenhängend ist.*

Beweis. Wegen Proposition 12 ist G zusammenhängend, wenn G bogenweise zusammenhängend ist. Es bleibt also zu zeigen, dass G bogenweise zusammenhängend ist, wenn G zusammenhängend ist. Also sei G eine zusammenhängende Menge.

Seien $x, y \in G$. Setze

$$U := \{z \in G : \exists\, c \text{ Kurve in } G \text{ mit } c(0) = x \text{ und } c(1) = z\} .$$

Offensichtlich ist $x \in U$ und somit $U \neq \emptyset$. Wir wollen jetzt zuerst zeigen, dass U offen ist.

Betrachte ein beliebiges $z \in U$. Nachdem G offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq G$. Weil $z \in U$, gibt es eine Kurve c_1 in G mit $c_1(0) = x$ und $c_1(1) = z$. Sei $\widetilde{z} \in B(z, r)$. Definiere $c_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^s$ durch $c_2(t) := z + t(\widetilde{z} - z)$. Dann ist c_2 eine Kurve in $B(z, r)$ mit $c_2(0) = z = c_1(1)$ und $c_2(1) = \widetilde{z}$. Wegen $B(z, r) \subseteq G$ ist c_2 eine Kurve in G, und daher ist c_2c_1 eine Kurve in G. Diese erfüllt $c_2c_1(0) = c_1(0) = x$ und $c_2c_1(1) = c_2(1) = \widetilde{z}$. Somit ist $\widetilde{z} \in U$, also ist $B(z, r) \subseteq U$, und daher ist U offen.

Angenommen $U \neq G$. Es wäre dann $G \setminus U \neq \emptyset$. Sei $z \in G \setminus U$. Weil G offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq G$. Betrachte ein beliebiges $\widetilde{z} \in B(z, r)$. Wenn $\widetilde{z} \in U$ wäre, dann gäbe es eine Kurve c_1 in G mit $c_1(0) = x$ und $c_1(1) = \widetilde{z}$. Definiere $c_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^s$ durch $c_2(t) := \widetilde{z} + t(z - \widetilde{z})$. Dann ist c_2 eine Kurve in $B(z, r)$ mit $c_2(0) = \widetilde{z} = c_1(1)$ und $c_2(1) = z$. Da $B(z, r) \subseteq G$ ist c_2 eine Kurve in G, und deshalb ist c_2c_1 eine Kurve in G. Diese erfüllt $c_2c_1(0) = c_1(0) = x$ und $c_2c_1(1) = c_2(1) = z$, also wäre $z \in U$, was der Annahme $z \in G \setminus U$ widerspricht. Daher ist $\widetilde{z} \in G \setminus U$, woraus sich $B(z, r) \subseteq G \setminus U$ ergibt, und somit ist $G \setminus U$ offen. Jetzt sind U und $G \setminus U$ offen, $U \cap G \neq \emptyset$, $(G \setminus U) \cap G \neq \emptyset$, und offensichtlich gelten $U \cap (G \setminus U) = \emptyset$ und $U \cup (G \setminus U) = G \supseteq G$. Dann wäre G nicht zusammenhängend, was aber unserer Voraussetzung widerspricht. Somit gilt also $U = G$.

Aus $U = G$ ergibt sich $y \in U$. Nach der Definition von U gibt es eine Kurve c in G mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Deswegen ist G bogenweise zusammenhängend. □

Eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ nennt man ein *Gebiet*. In diesem Zusammenhang seien noch die Definitionen von konvexen, bzw. sternförmigen Teilmengen von $\mathbb{R}^s$ erwähnt. Man nennt $A \subseteq \mathbb{R}^s$ *konvex*, wenn für alle $x, y \in A$ auch $(1-t)x + ty \in A$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Das bedeutet, dass für alle $x, y \in A$ auch die Verbingsstrecke zwischen x und y in A liegt. Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^s$ heißt *sternförmig*, falls es ein $x_0 \in A$ gibt, sodass für alle $x \in A$ auch $(1-t)x+tx_0 \in A$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Es gibt also einen Punkt, bei dem die Verbindungsstrecke zu jedem anderen Punkt in A liegt. Wenn A sternförmig ist und $x, y \in A$ gilt, dann verbindet die Kurve, die zuerst die Verbindungsstrecke von x zu x_0 und dann die Verbindungsstrecke von x_0 zu y ist, den Punkt x mit y, also ist A bogenweise zusammenhängend. Offensichtlich ist jede konvexe Menge sternförmig (man kann x_0 beliebig wählen). Es ist also jede konvexe Menge sternförmig, jede sternförmige Menge bogenweise zusammenhängend, und jede bogenweise zusammenhängende Menge zusammenhängend.

Unsere nächste Definition ist die Homotopie zwischen zwei geschlossenen Kurven. Zwei geschlossene Kurven heißen homotop, falls sie stetig ineinander übergeführt werden können. Für $s \in (0,1)$ kann man $t \mapsto H(t,s)$ als „Zwischenkurven“ auffassen. Anschaulich bedeutet diese Definition, dass „es keine Löcher zwischen den beiden Kurven gibt“.

Definition. Es sei (M,d) ein metrischer Raum und seien c_1 und c_2 geschlossene Kurven in M. Dann heißt c_1 *homotop* zu c_2, falls es eine stetige Funktion $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ gibt, die

(1) $H(t,0) = c_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$,

(2) $H(t,1) = c_2(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und

(3) $H(0,s) = H(1,s)$ für alle $s \in [0,1]$ erfüllt.

Definition. Sei (M,d) ein metrischer Raum und sei c eine geschlossene Kurve in M. Man nennt c *nullhomotop*, falls es ein $x_0 \in M$ gibt, sodass c homotop zu x_0 ist (das heißt homotop zur durch $x_0(t) := x_0$ definierten Kurve).

Definition. Es sei (M,d) ein metrischer Raum und es sei $A \subseteq M$. Dann heißt A *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve in A nullhomotop in A ist.

Anschaulich ist eine Kurve nullhomotop, wenn es „innerhalb“ der Kurve keine Löcher gibt. Also eine Menge „ohne Löcher“ ist einfach zusammenhängend. So ist die Menge A_1 in Abbildung 1 einfach zusammenhängend, dagegen ist die Menge A_3 aus Abbildung 3 nicht einfach zusammenhängend.

Betrachte jetzt eine sternförmige Menge A. Es gibt also ein $x_0 \in A$, sodass für jeden Punkt die Verbindungsstrecke von x_0 zu diesem Punkt in A liegt. Sei c eine geschlossene Kurve in A. Definiere $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ durch $H(t,s) := (1-s)c(t) + sx_0$. Dann ist offensichtlich H eine Homotopie von c zu x_0, also ist c nullhomotop und daher A einfach zusammenhängend. Somit ist jede konvexe Menge sternförmig und jede sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend.

4. Kompaktheit und Vollständigkeit

Weitere wichtige Begriffe sind die Vollständigkeit und die Kompaktheit. Wir beginnen damit den Begriff „vollständig“ vorzubereiten. Dazu erinnern wir uns an die Definition des Grenzwerts einer Folge. Ohne den Grenzwert konkret zu kennen ist es mit der Definition des Grenzwerts nicht möglich die Konvergenz einer Folge zu zeigen. Deshalb sucht man nach Möglichkeiten die Konvergenz einer Folge zu beweisen ohne den Grenzwert kennen zu müssen. Betrachte eine konvergente Folge (x_n), ihren Grenzwert nennen wir x_0. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N, sodass $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Seien $n, m \geq N$. Man erhält

$$d(x_n, x_m) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(x_n, x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_0, x_m)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $m \geq N$ gilt.

Wir haben oben gezeigt, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Es wäre schön, wenn jede Cauchyfolge konvergent wäre, weil man ohne den Grenzwert zu kennen nachrechnen kann, dass eine Folge eine Cauchyfolge ist. Leider ist das im allgemeinen nicht so. Wenn man den metrischen Raum $\mathbb{Q}$ betrachtet und die Folge (x_n) durch $x_1 := 2$ und $x_n := \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}}$ definiert, so erhält man eine Folge in $\mathbb{Q}$. In $\mathbb{R}$ konvergiert diese Folge gegen $\sqrt{2}$, also ist (x_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und daher auch eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$. Nachdem $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt, konvergiert (x_n) nicht in $\mathbb{Q}$.

Man nennt einen metrischen Raum vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Beachte, dass diese Eigenschaft in $\mathbb{R}$ nicht dazu äquivalent ist, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Allerdings ist die Eigenschaft, dass jede Cauchyfolge konvergiert, zusammen mit dem Archimedischen Axiom (wenn $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < na$) äquivalent zur Eigenschaft, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Nach der folgenden formalen Definition der Vollständigkeit werden wir beweisen, dass $\mathbb{R}^s$ vollständig ist, wobei wir den Satz von Bolzano-Weierstraß voraussetzen (jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^s$ besitzt eine konvergente Teilfolge).

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq M$. Dann heißt A *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in A konvergent in A ist.

Proposition 13. *Für $s \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^s$ (mit der üblichen Metrik) vollständig.*

Beweis. Es sei (x_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^s$. Dann gibt es ein L mit $|x_n - x_m| < 1$ für alle $n, m \geq L$. Setze $R := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_L|, |x_L| + 1\}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls $n \leq L$, dann ist offensichtlich $|x_n| \leq R$. Ist dagegen $n \geq L$, dann ist $|x_n| - |x_L| \leq |x_n - x_L| < 1$, und deswegen $|x_n| \leq |x_L| + 1 \leq R$. Also ist (x_n) beschränkt.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von x_n und ein $x_0 \in \mathbb{R}^s$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N, sodass $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$ gilt, und es gibt ein K mit $|x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K$. Betrachte ein beliebiges $n \geq N$. Wähle ein k mit $k \geq K$ und $n_k \geq N$. Wir erhalten

$$|x_n - x_0| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_k} - x_0|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Somit gilt $x_n \to x_0$, und deshalb ist (x_n) konvergent. Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{R}^s$ vollständig ist. □

Proposition 14. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei $A \subseteq M$.*

(1) *Falls A vollständig ist, dann ist A abgeschlossen.*

(2) *Wenn M vollständig und A abgeschlossen ist, dann ist A vollständig.*

Beweis. (1) Betrachte eine Folge (x_n) in A, die $x_n \to x_0$ für ein $x_0 \in M$ erfüllt. Da (x_n) konvergent in M ist, ist (x_n) eine Cauchyfolge in M und deshalb auch eine Cauchyfolge in A. Weil A vollständig ist konvergiert (x_n) in A und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts muss x_0 der Grenzwert von (x_n) sein. Also ist $x_0 \in A$ und daher ist A abgeschlossen.

(2) Sei (x_n) eine Cauchyfolge in A. Dann ist (x_n) auch eine Cauchyfolge in M und wegen der Vollständigkeit von M gibt es ein $x_0 \in M$ mit $x_n \to x_0$. Nachdem A abgeschlossen ist und (x_n) eine Folge in A ist, ergibt sich $x_0 \in A$. Somit konvergiert (x_n) in A und deshalb ist A vollständig. □

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Kompaktheit. Neben „kompakten Mengen" werden wir auch gleich „folgenkompakte Mengen" definieren. Eine Menge C heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt. Man nennt C folgenkompakt, wenn jede Folge in C eine Teilfolge besitzt, die in C konvergiert. Es wird sich zeigen, dass in metrischen Räumen diese beiden Begriffe äquivalent sind. In allgemeinen topologischen Räumen sind sie jedoch nicht äquivalent! Nach der Definition werden wir zeigen, dass kompakte Mengen immer beschränkt sind.

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $C \subseteq M$.

(1) Dann heißt C *kompakt*, falls es für jede Familie $(U_j)_{j\in J}$ von offenen Mengen mit $C \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ eine endliche Teilmenge $J_0 \subseteq J$ gibt, sodass $C \subseteq \bigcup_{j\in J_0} U_j$ gilt.

(2) Man nennt C *folgenkompakt*, falls es zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x_0 \in C$ gibt, sodass $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ gilt.

Proposition 15. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei $C \subseteq M$. Wenn C kompakt ist, dann ist C beschränkt.*

Beweis. Wähle ein beliebiges $x_0 \in M$. Offensichtlich ist $C \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n)$, und nach Proposition 1 ist $B(x_0, n)$ offen. Weil C kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. In diesem Fall bedeutet das, dass es ein N gibt, sodass $C \subseteq B(x_0, N)$. Also ist C beschränkt. □

Man kann zu jeder Metrik eine „äquivalente" Metrik finden, die nur Werte kleiner als 1 annimmt. Beschränktheit ist daher in metrischen Räumen kein wirklich aussagekräftiger Begriff. Von größerer Bedeutung ist der Begriff „totalbeschränkt", den wir jetzt definieren werden. Eine totalbeschränkte Menge kann für jedes $\varepsilon > 0$ von endlich vielen ε-Kugeln überdeckt werden. Nach der Definition werden wir zuerst zeigen, dass es nicht darauf ankommt, ob die Mittelpunkte der Kugeln in der Menge oder in der Grundmenge liegen. Danach zeigen wir, dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^s$ genau dann totalbeschränkt ist, wenn sie beschränkt ist.

Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei $A \subseteq M$. Man nennt A *totalbeschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ gibt, sodass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$ gilt.

Proposition 16. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (M, d) ist genau dann totalbeschränkt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ gibt, sodass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$ gilt.*

Beweis. ($\Leftarrow$) ist offensichtlich, da $A \subseteq M$.

($\Rightarrow$) Betrachte ein $\varepsilon > 0$. Weil A totalbeschränkt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, y_2, \dots, y_n \in M$ mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Indem wir einfach diejenigen j weglassen, für die $A \cap B(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$ gilt (und eventuell umnummerieren), können wir annehmen, dass $A \cap B(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Für ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt es daher ein $x_j \in A \cap B(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Insbesondere gilt dann $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$. Sei jetzt $x \in A$. Dann gibt es ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $x \in B(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Wegen $x_j \in B(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$ gilt

$$d(x, x_j) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(x, y_j)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(y_j, x_j)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, ,$$

also $x \in B(x_j, \varepsilon)$. Deswegen ist $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$. □

Proposition 17. *Wenn eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (M, d) totalbeschränkt ist, dann ist A auch beschränkt.*

Beweis. Wähle ein beliebiges $x_0 \in M$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, 1)$. Setze

$$R := 1 + \max\bigl\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), \dots, d(x_0, x_n)\bigr\} \, .$$

Jetzt sei $x \in A$. Dann gibt es ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $x \in B(x_j, 1)$. Deshalb gilt

$$d(x, x_0) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(x, x_j)}_{<1} + d(x_j, x_0) < \underbrace{d(x_0, x_j) + 1}_{\leq R} \leq R \, ,$$

also $x \in B(x_0, R)$. Somit ist $A \subseteq B(x_0, R)$ und A ist beschränkt. □

Proposition 18. *Für $s \in \mathbb{N}$ ist $A \subseteq \mathbb{R}^s$ genau dann totalbeschränkt, wenn A beschränkt ist.*

Beweis. Wenn A totalbeschränkt ist, dann ist A nach Proposition 17 beschränkt. Wir nehmen jetzt an, dass A beschränkt ist. Dann gibt es ein $R > 0$

mit $A \subseteq B(0, R)$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $N := 1 + \left[\frac{R\sqrt{s}}{\varepsilon}\right]$, wobei $[r]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich r ist, bezeichnet. Weiters sei $J := \{-N, -N+1, \ldots, N-1, N\}^s$ und für $j = (j_1, j_2, \ldots, j_s)^t \in J$ setze $x_j := \left(j_1 \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}, j_2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}, \ldots, j_s \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}\right)^t$. Dann ist offensichtlich J endlich und $x_j \in \mathbb{R}^s$ für alle $j \in J$. Sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)^t \in A$. Für $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ setze $n_k(x) := \left[\frac{x_k\sqrt{s}}{\varepsilon}\right]$. Es ist dann $n(x) := \big(n_1(x), n_2(x), \ldots, n_s(x)\big) \in J$ und wegen

$$\left|x_k - n_k(x)\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}\right| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} \underbrace{\left|\frac{x_k\sqrt{s}}{\varepsilon} - n_k(x)\right|}_{<1} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}$$

erhalten wir

$$|x - x_{n(x)}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left|x_k - n_k(x)\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}\right|^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{s}}} < \sqrt{\sum_{k=1}^{s} \frac{\varepsilon^2}{s}} = \varepsilon\ ,$$

also $x \in B(x_{n(x)}, \varepsilon)$. Deshalb ist $A \subseteq \bigcup_{j \in J} B(x_j, \varepsilon)$ und somit ist A totalbeschränkt. $\square$

Wichtig ist das folgende Resultat, das äquivalente Bedingungen zur Kompaktheit in allgemeinen metrischen Räumen beschreibt. Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist. Weiters ist genau dann kompakt, wenn sie vollständig und totalbeschränkt ist. Nach dem Beweis werden wir zeigen, dass kompakte Mengen immer abgeschlossen sind, und abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen immer kompakt sind.

Satz 2. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $C \subseteq M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Menge C ist kompakt.*

(2) *Es ist C folgenkompakt.*

(3) *Die Menge C ist vollständig und totalbeschränkt.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Zuerst zeigen wir die folgende Aussage.
Behauptung. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C. Falls es ein $x_0 \in C$ gibt, sodass es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ gibt, dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.
Beweis der Behauptung. Mit Induktion zeigen wir zunächst, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ gibt, sodass $x_{n_j} \in B\big(x_0, \frac{1}{j}\big)$

für alle $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt. Für $k = 1$ folgt aus der Existenz von unendlich vielen n mit $x_n \in B(x_0, 1)$, dass es ein n_1 gibt mit $x_{n_1} \in B(x_0, 1)$. Sei jetzt $k > 1$ und seien nach Induktionsvoraussetzung $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ so, dass $x_{n_j} \in B\big(x_0, \frac{1}{j}\big)$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ gilt. Es gibt dann unendlich viele n mit $x_n \in B\big(x_0, \frac{1}{k}\big)$. Deswegen gibt es ein $n_k > n_{k-1}$ mit $x_{n_k} \in B\big(x_0, \frac{1}{k}\big)$.

Wir erhalten also eine Folge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ von natürlichen Zahlen, und daher eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wähle ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein K mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Sei $k \geq K$. Wegen $x_{n_k} \in B\big(x_0, \frac{1}{k}\big)$ gilt $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Also ist $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. $\diamondsuit$

Es sei C kompakt. Wir nehmen indirekt an, dass C nicht folgenkompakt wäre. Dann gäbe es eine Folge (x_n) in C, die keine in C konvergente Teilfolge besitzt. Wegen der oben bewiesenen Behauptung gibt es für alle $x \in C$ ein $\varepsilon_x > 0$ sodass $\big\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon_x)\big\}$ endlich ist. Offensichtlich ist $C \subseteq \bigcup_{x\in C} B(x, \varepsilon_x)$, und $B(x, \varepsilon_x)$ ist nach Proposition 1 offen. Da C kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$ mit $C \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon_{x_j})$. Dann ist $\mathbb{N} = \big\{n \in \mathbb{N} : x_n \in C\big\} = \bigcup_{j=1}^{k}\big\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x_j, \varepsilon_{x_j})\big\}$ endlich, was aber ein Widerspruch ist. Somit muss C folgenkompakt sein.

(2) $\Rightarrow$ (3): Hier sei C folgenkompakt. Wir beginnen mit dem Beweis der Vollständigkeit. Dazu sei (x_n) eine Cauchyfolge in C. Weil C folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in C$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N, sodass $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Weiters gibt es ein K mit $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K$. Jetzt sei $n \geq N$. Wähle k so, dass $k \geq K$ und $n_k \geq N$ gelten. Dadurch erhalten wir

$$d(x_n, x_0) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Somit gilt $x_n \to x_0$, und daher ist C vollständig.

Um zu zeigen, dass C totalbeschränkt ist, nehmen wir indirekt an, dass C nicht totalbeschränkt ist. Dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass C nicht durch endlich viele Kugeln mit Radius ε_0 überdeckt werden kann. Zunächst zeigen wir durch Induktion, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$ gibt, sodass $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon_0$ für $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$ gilt. Im Fall $n = 1$ kann man $x_1 \in C$ beliebig wählen. Sei $n > 1$ und es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in C$ so, dass $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon_0$ für $j, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ mit $j \neq k$ gilt. Weil sich C nicht durch endlich viele Kugeln mit Radius ε_0 überdecken lässt, muss $C \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, \varepsilon_0)\Big) \neq \emptyset$ gelten. Deshalb gibt es ein $x_n \in C \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, \varepsilon_0)\Big)$. Somit ist $x_n \in C$ und für $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ gilt $d(x_n, x_k) \geq \varepsilon_0$.

Damit erhalten wir eine Folge (x_n) in C, die $d(x_n, x_k) \geq \varepsilon_0$ für $n \neq k$ erfüllt. Nachdem C folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n)

und ein $x_0 \in C$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Also gibt es ein K mit $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ für alle $k \geq K$. Wähle ein $k \geq K$. Es ist dann auch $k+1 \geq K$ und wegen $n_k \neq n_{k+1}$ gilt $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \geq \varepsilon_0$. Daraus erhält man

$$\varepsilon_0 \leq d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{d(x_0, x_{n_{k+1}})}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \ ,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist (es kann ja nicht $\varepsilon_0 < \varepsilon_0$ gelten). Es muss also C totalbeschränkt sein.

(3) $\Rightarrow$ (1): Schließlich sei C vollständig und totalbeschränkt. Wir nehmen indirekt an, dass C nicht kompakt ist. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von C (es gilt also $C \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$), sodass C nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann.

Behauptung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C$, sodass $C \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n$ und $A_k \subseteq B\big(y_k, \frac{1}{k}\big)$ für $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gelten, und für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge A_k nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann.

Beweis der Behauptung. Zunächst setzen wir $A_0 := C$ und beweisen dann die Behauptung mit Induktion. Wenn $n = 0$ ist, dann kann A_0 nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann. Jetzt sei $n > 0$ und $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in C$ seien so, dass $C = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_{n-1}$, $A_k \subseteq B\big(y_k, \frac{1}{k}\big)$ für $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ die Menge A_k nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann. Da C totalbeschränkt ist, gibt es nach Proposition 16 ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_m \in C$ mit $C \subseteq \bigcup_{j=1}^m B\big(x_j, \frac{1}{n}\big)$. Nachdem $A_{n-1} \subseteq C$ muss es ein $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ geben, sodass $A_{n-1} \cap B\big(x_j, \frac{1}{n}\big)$ nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann. Definiere $A_n := A_{n-1} \cap B\big(x_j, \frac{1}{n}\big)$ und $y_n := x_j$. Dann ist $A_n \subseteq A_{n-1}$, $A_n \subseteq B\big(y_n, \frac{1}{n}\big)$ und die Menge A_n kann nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden. $\diamondsuit$

Durch diese Behauptung erhalten wir $C \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ und eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \subseteq B\big(y_n, \frac{1}{n}\big)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann die Menge A_n nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden. Jetzt zeigen wir, dass (y_n) eine Cauchyfolge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Seien $n, m \geq N$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $n \leq m$ annehmen. Es ist dann $A_m \subseteq A_n$ und weil A_m nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann ist $A_m \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $x \in A_m$. Wegen $x \in A_m$ ist $d(x, y_m) < \frac{1}{m}$ und wegen $A_m \subseteq A_n$ ist $x \in A_n$ und somit $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Daraus ergibt sich

$$d(y_n, y_m) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(y_n, x)}_{<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, y_m)}_{<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Deshalb ist (y_n) eine Cauchyfolge.

Nachdem C vollständig ist, konvergiert (y_n) in C. Es gibt also ein $x_0 \in C$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$. Weil $x_0 \in C$ und $C \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ gelten, gibt es ein $j_0 \in J$ mit $x_0 \in U_{j_0}$. Da U_{j_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass $B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{j_0}$. Weiters gibt es wegen $y_n \to x_0$ und $\frac{1}{n} \to 0$ ein N, sodass $d(y_n, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ und $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ für alle $n \geq N$ gelten. Fixiere ein $n \geq N$.
Behauptung. Es gilt $A_n \subseteq U_{j_0}$.
Beweis der Behauptung. Sei $x \in A_n$. Dann gilt $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$, da $A_n \subseteq B(y_n, \frac{1}{n})$. Wegen $d(y_n, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ und $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ ergibt sich daraus

$$d(x, x_0) \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{d(x, y_n)}_{<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{d(y_n, x_0)}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \, .$$

Somit ist $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ und wegen $B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{j_0}$ gilt $x \in U_{j_0}$, wodurch $A_n \subseteq U_{j_0}$ gezeigt ist. $\diamondsuit$

Da $A_n \subseteq U_{j_0}$ kann A_n durch ein einziges Element der Familie $(U_j)_{j\in J}$ überdeckt werden. Deshalb kann A_n durch endlich viele U_j überdeckt werden. Andererseits kann nach der Konstruktion der Mengen A_k die Menge A_n nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden, woraus sich offensichtlich ein Widerspruch ergibt. Daher muss C kompakt sein. $\square$

Proposition 19. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei $C \subseteq M$.*

(1) *Falls C kompakt ist, dann ist C abgeschlossen.*

(2) *Wenn M kompakt ist und C abgeschlossen ist, dann ist C kompakt.*

Beweis. (1) Zunächst sei C kompakt. Weiters sei (x_n) eine Folge in C, die in M konvergiert. Dann gibt es ein $x_0 \in M$ mit $x_n \to x_0$. Nach Satz 2 ist C folgenkompakt, und deshalb gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $y_0 \in C$ mit $x_{n_k} \to y_0$. Andererseits muss wegen $x_n \to x_0$ auch $x_{n_k} \to x_0$ gelten, und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts ist somit $x_0 = y_0 \in C$. Deshalb ist C abgeschlossen.

(2) Betrachte eine Folge (x_n) in C. Weil M kompakt ist, ist M nach Satz 2 auch folgenkompakt, und deshalb gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in M$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Es ist (x_{n_k}) eine Folge in C, und weil C abgeschlossen ist, erhalten wir $x_0 \in C$. Also besitzt jede Folge in C eine in C konvergente Teilfolge, womit C folgenkompakt ist. Wegen Satz 2 ist C kompakt. $\square$

Einfach wird die Charakterisierung kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^s$. Eine Teilmenge ist nämlich genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Die Äquivalenz von kompakt zu beschränkt und abgeschlossen nennt man auch den *Satz von Heine-Borel* und die Äquivalenz von folgenkompakt zu beschränkt und abgeschlossen nennt man auch den *Satz von Bolzano-Weierstraß*. Der hier gegebene Beweis kann nicht als guter Beweis für diese Sätze angesehen werden, weil nämlich die entscheidenden Beweisschritte nicht sichtbar sind. Diese entscheidenden Schritte sind in den Beweisen der hier verwendeten Resultate „versteckt".

Proposition 20. *Für $s \in \mathbb{N}$ und eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^s$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist C kompakt.*

(2) *Die Menge C ist folgenkompakt.*

(3) *Es ist C beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Wegen Satz 2 ist (1) zu (2) äquivalent. Zuerst zeigen wir (1) $\Rightarrow$ (3). Dazu sei C kompakt. Dann ist nach Proposition 15 C beschränkt und aus Proposition 19 folgt die Abgeschlossenheit von C. Schließlich zeigen wir (3) $\Rightarrow$ (1). Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^s$ beschränkt und abgeschlossen. Weil $\mathbb{R}^s$ wegen Proposition 13 vollständig ist und $C \subseteq \mathbb{R}^s$ abgeschlossen ist, ist C nach Proposition 14 vollständig. Weiters folgt aus Proposition 18 wegen der Beschränktheit von C, dass C totalbeschränkt ist. Nach Satz 2 ist C daher kompakt. $\square$

Wenn man die durch $f(x) := 0$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet, sieht man, dass f stetig ist und $\{0\}$ als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^1$ nach Proposition 20 kompakt ist. Dagegen ist aber $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ wegen Proposition 20 nicht kompakt, weil diese Menge nicht beschränkt ist. Es muss also das stetige Urbild einer kompakten Menge nicht kompakt sein. Dagegen sind stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt, wie unser nächstes Resultat zeigt.

Proposition 21. *Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ eine stetige Funktion. Falls $C \subseteq M_1$ kompakt ist, dann ist auch $f(C)$ kompakt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(C)$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in f(C)$ und deshalb gibt es ein $y_n \in C$ mit $x_n = f(y_n)$. Damit erhalten wir eine Folge (y_n) in C. Da C kompakt ist, ist C nach Satz 2 folgenkompakt. Deshalb gibt es eine Teilfolge (y_{n_k}) von (y_n) und ein $y_0 \in C$ mit $y_{n_k} \to y_0$. Weil f stetig ist, folgt aus Proposition 6, dass $x_{n_k} = f(y_{n_k}) \to f(y_0)$. Offensichtlich ist $f(y_0) \in f(C)$, weil $y_0 \in C$. Somit ist $f(C)$ folgenkompakt und deshalb wegen Satz 2 auch kompakt. $\square$

Betrachtet man die durch $f(x) := x$ für $x \in [0,1]$ und $f(x) := x - 1$ für $x \in (2,3]$ definierte Funktion $f : [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$, so ist diese Funktion stetig und bijektiv. Wegen $x_n := 1 + \frac{1}{n} \to 1$ und $f^{-1}(x_n) = 2 + \frac{1}{n} \to 2 \neq 1 = f^{-1}(1)$ ist aber f^{-1} nicht stetig. Es muss also die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion nicht stetig sein. Unser nächstes Resultat zeigt, dass die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion eines kompakten metrischen Raumes in einem metrischen Raum immer stetig ist.

Proposition 22. *Es sei (M_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (M_2, d_2) ein metrischer Raum und $f : M_1 \to M_2$ eine bijektive stetige Funktion. Dann ist f^{-1} stetig.*

Beweis. Für $A \subseteq M_1$ gilt $(f^{-1})^{-1}(A) = \{x \in M_2 : f^{-1}(x) \in A\} = f(A)$, da $y = f^{-1}(x) \in A$ wegen der Bijektivität von f zu $x = f(y) \in f(A)$ äquivalent ist. Es sei A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von M_1. Dann ist A nach Proposition 19 kompakt. Wegen Proposition 21 ist daher auch $f(A)$ kompakt, und somit nach Proposition 19 abgeschlossen. Deshalb ist für alle abgeschlossenen $A \subseteq M_1$ auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ abgeschlossen. Aus Proposition 7 folgt, dass f^{-1} stetig ist. $\square$

Man kann den *Satz vom Minimum und Maximum* für kompakte Mengen beweisen. Dieser besagt, dass jede stetige Funktion von einem kompakten metrischen Raum in die reellen Zahlen ein Minimum und ein Maximum besitzt. Beachte, dass für ein $m_1 \in C$ die Eigenschaft $f(m_1) \leq f(x)$ für alle $x \in C$ zu $f(m_1) = \min\{f(x) : x \in C\}$ äquivalent ist, und für ein $m_2 \in C$ die Eigenschaft $f(m_2) \geq f(x)$ für alle $x \in C$ zu $f(m_2) = \max\{f(x) : x \in C\}$ äquivalent ist. Insbesondere erhalten wir, dass eine stetige Funktion von einem kompakten metrischen Raum in die reellen Zahlen stets beschränkt ist.

Satz 3. *Sei (C, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $f : C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $m_1, m_2 \in C$ mit $f(m_1) \leq f(x) \leq f(m_2)$ für alle $x \in C$.*

Beweis. Es genügt die Existenz des Maximums zu beweisen, weil man die Existenz des Minimums analog beweisen kann, oder verwenden kann, dass das Minimum von f gleich $-m$ ist, wobei m das Maximum von $-f$ ist.

Setze

$$s := \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in C\}\,, & \text{falls } f \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ +\infty\,, & \text{falls } f \text{ nicht nach oben beschränkt ist.} \end{cases}$$

Es ist also s das Supremum der Funktionswerte von f, wobei wir für das Supremum den Wert $+\infty$ zulassen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$s_n := \begin{cases} s - \frac{1}{n}, & \text{falls } f \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ n, & \text{falls } f \text{ nicht nach oben beschränkt ist.} \end{cases}$$

Somit ist $s_n < s$. Nachdem s das Supremum der Funktionswerte ist, gibt es ein $x_n \in C$ mit $f(x_n) > s_n$.

Damit erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C. Nachdem C kompakt ist, ist C nach Satz 2 auch folgenkompakt. Deshalb gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $m_2 \in C$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = m_2$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(m_2)$. Nachdem $f(x_{n_k}) > s_{n_k}$ und wegen $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (sowohl im Fall, dass f nach oben beschränkt ist, als auch im Fall, dass f nicht nach oben beschränkt ist) auch $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s$ gilt, erhalten wir, dass $f(m_2) \geq s$. Wäre f nicht nach oben beschränkt, so wäre die relle Zahl $f(m_2)$ größer oder gleich $+\infty$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit muss f nach oben beschränkt sein, und $s \in \mathbb{R}$. Andererseits war $s = \sup\{f(x) : x \in C\}$, also ist $f(m_2) \leq s$. Daraus ergibt sich, dass $f(m_2) = s$. Für ein beliebiges $x \in C$ gilt $f(x) \leq s = f(m_2)$. □

Schließlich zeigen wir noch, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum gleichmäßig stetig ist. Auf einem kompakten metrischen Raum genügt es also die Stetigkeit zu zeigen, wenn man die gleichmäßige Stetigkeit beweisen will.

Proposition 23. *Sei (C, d) ein kompakter metrischer Raum, sei (M_2, d_2) ein metrischer Raum und sei $f : C \to M_2$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen (x_n) und (y_n) in C mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d_2\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0$. Da C kompakt ist, ist C wegen Satz 2 auch folgenkompakt. Somit gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in C$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Weil f stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ für alle $x \in C$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ sodass $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2}$ für alle $k \geq K$ gilt. Weiters gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Wähle $k \geq K$ so, dass $n_k \geq N$ gilt. Es ist dann $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2} < \delta$ und deshalb $d_2\big(f(x_{n_k}), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Weiters ist

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{d(y_{n_k}, x_{n_k})}_{<\frac{1}{n_k}<\frac{\delta}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{<\frac{\delta}{2}} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

und daher $d_2\big(f(y_{n_k}), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Daraus ergibt sich

$$d_2\big(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})\big) \le \underbrace{d_2\big(f(x_{n_k}), f(x_0)\big)}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{d_2\big(f(x_0), f(y_{n_k})\big)}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \,,$$

was aber $d_2\big(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})\big) \ge \varepsilon_0$ widerspricht. Deswegen muss f gleichmäßig stetig sein. □

5. Räume stetiger Funktionen

Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Dann bezeichnet man mit $C(M_1, M_2)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : M_1 \to M_2$ (eigentlich sollte man genauer $C\big((M_1, d_1), (M_2, d_2)\big)$ schreiben, weil diese Menge ja auch von den Metriken abhängt). Wichtige Spezialfälle sind $C(M, \mathbb{R})$ und für $s \in \mathbb{N}$ der Raum $C(M, \mathbb{R}^s)$, wobei (M, d) ein metrischer Raum ist. Diese Spezialfälle beinhalten bereits $C(M, \mathbb{C})$ und $C(M, \mathbb{C}^s)$, da man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}^s$ als $\mathbb{R}^{2s}$ auffassen kann.

Proposition 24. *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und es sei $s \in \mathbb{N}$.*

(1) *Für $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ ist $\sup\limits_{x\in X} |f(x)| \in \mathbb{R}$. Weiters ist $\sup\limits_{x\in X} |f(x)| = \max\limits_{x\in X} |f(x)|$.*

(2) *Definiert man $\|f\|_\infty$ für $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$, so ist $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $C(X, \mathbb{R}^s)$. Insbesondere bildet $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ einen metrischen Raum (der Abstand zwischen f_1 und f_2 wird durch $\|f_1 - f_2\|_\infty$ definiert).*

(3) *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C(X, \mathbb{R}^s)$ und ist $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$, so konvergiert f_n gegen f in $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ genau dann, wenn f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, also wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ gilt.*

Beweis. (1) Die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ ist eine stetige Funktion von X nach $\mathbb{R}$. Daher besitzt sie nach dem Satz vom Minimum und Maximum (Satz 3) ein Maximum. Also ist $\sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)| \in \mathbb{R}$.

(2) Offensichtlich gelten $\|f\|_\infty \ge 0$ und $\|0\|_\infty = 0$. Sei $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ mit $\|f\|_\infty = 0$. Falls $x \in X$ gilt, dann gilt $0 \le |f(x)| \le \|f\|_\infty = 0$. Deshalb ist $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, woraus $f = 0$ folgt. Jetzt sei $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ und

$c \in \mathbb{R}$. Wegen |(cf)(x)|=|c||f(x)| für alle $x \in X$ erhalten wir $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$. Schließlich seien $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{R}^s)$. Für ein beliebiges $x \in X$ gilt

$$|(f_1 + f_2)(x)| \leq \underbrace{|f_1(x)|}_{\leq \|f_1\|_\infty} + \underbrace{|f_2(x)|}_{\leq \|f_2\|_\infty} \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \,,$$

woraus sich $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$ ergibt. Somit ist $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $C(X, \mathbb{R}^s)$, und deshalb wird durch $d(f_1, f_2) := \|f_1 - f_2\|_\infty$ eine Metrik auf $C(X, \mathbb{R}^s)$ definiert.

(3) Es gelte $f_n \to f$ in $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N, sodass $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Jetzt sei $n \geq N$. Weiters sei $x \in X$. Dann ist $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, also f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

Schließlich konvergiere f_n gleichmäßig gegen f. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$ gilt. Sei $n \geq N$. Dann ist $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also $f_n \to f$ in $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$. □

Bemerkung. Ganz genauso wie in Proposition 24 kann man auch zeigen, dass durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ eine Norm auf $C(X, \mathbb{C}^s)$ definiert ist, und daher $\big(C(X, \mathbb{C}^s), \|.\|_\infty\big)$ einen metrischen Raum bildet. In diesem Fall folgt das nicht direkt aus Proposition 24 selbst, weil man hier $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ für alle $c \in \mathbb{C}$ zeigen muss. Wie soeben erwähnt kann diese eine Eigenschaft aber ganz analog nachgerechnet werden. Damit gibt es kein Problem alle Resultate dieses Abschnitts auch auf $C(X, \mathbb{C}^s)$ anwenden zu dürfen.

Jetzt wollen wir zeigen, dass für einen kompakten metrischen Raum (X, d) der Raum $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ vollständig ist. Als ein Korollar dazu werden wir Teilmengen von $C(X, \mathbb{R}^s)$ angeben, die ebenfalls vollständig sind.

Satz 4. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $s \in \mathbb{N}$. Dann ist $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ vollständig.*

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$. Wir führen den Beweis in drei Schritten. Im dritten Schritt wird dann gezeigt werden, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ konvergiert.

1. *Schritt*: Hier zeigen wir, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ konvergiert. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise.

Behauptung. Für jedes $x \in X$ konvergiert $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis der Behauptung. Fixiere ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ ist, gibt es ein N, sodass $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Jetzt sei $x \in X$. Weiters seien $n, m \geq N$. Dann gilt

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Damit ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^s$. Weil $\mathbb{R}^s$ nach Proposition 13 vollständig ist, konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. $\diamondsuit$

2. *Schritt*: Definiere $f : X \to \mathbb{R}^s$ durch $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in X$. Das ist möglich, weil für jedes $x \in X$ wegen des 1. Schritts die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zunächst wissen wir nicht, dass dieses f stetig ist, werden aber jetzt beweisen, dass f stetig ist.

Behauptung. Die Funktion f ist stetig, also $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$.

Beweis der Behauptung. Es sei $x_0 \in X$ und es sei $\varepsilon > 0$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\big(C(X,\mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ ist, gibt es ein N_1, sodass $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n, m \geq N_1$ gilt. Nachdem $f_n(x_0) \to f(x_0)$ gibt es ein N_2 mit $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n \geq N_2$. Setze $N := \max\{N_1, N_2\}$. Da f_N stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Fixiere ein $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$. Wegen $f_n(x) \to f(x)$ gibt es ein N_3 mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n \geq N_3$. Wähle n so, dass $n \geq \max\{N, N_3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|f_n(x) - f_N(x)|}_{\leq\|f_n - f_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}} + \\ + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Somit ist f stetig in x_0, und da $x_0 \in X$ beliebig war, ist f stetig auf X. $\diamondsuit$

3. *Schritt*: Jetzt zeigen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Nachdem $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\big(C(X,\mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ ist, gibt es ein N, sodass $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Fixiere ein $n \geq N$. Weiters sei $x \in X$. Wegen $f_n(x) \to f(x)$ gibt es ein N_x mit $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \geq N_x$. Wähle k so, dass $k \geq \max\{N, N_x\}$. Wir erhalten

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_k(x)|}_{\leq\|f_n - f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}\,.$$

Daraus ergibt sich $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Da nach dem 2. Schritt $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ gilt, erhält man daraus, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\big(C(X,\mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ konvergiert. Somit ist $\big(C(X,\mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ vollständig. $\square$

Korollar 4.1. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $s \in \mathbb{N}$.*

(1) *Falls $D \subseteq \mathbb{R}^s$ abgeschlossen ist, dann ist $\big(C(X, D), \|.\|_\infty\big)$ vollständig.*

(2) *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^s$ abgeschlossen, $x_0 \in X$ und $y_0 \in D$. Definiere*

$$C(X, D; f(x_0) = y_0) := \big\{f \in C(X, D) : f(x_0) = y_0\big\}\,.$$

Dann ist $\big(C(X, D; f(x_0) = y_0), \|.\|_\infty\big)$ vollständig.

Beweis. (1) Es sei (f_n) eine Folge in $C(X,D)$ und es sei $f \in C(X,\mathbb{R}^s)$ so, dass $f_n \to f$ in $\big(C(X,\mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$. Fixiere ein $x \in X$. Dann ist $(f_n(x))$ eine Folge in D, $f(x) \in \mathbb{R}^s$ und es gilt $f_n(x) \to f(x)$. Nachdem D abgeschlossen ist, gilt $f(x) \in D$. Deshalb ist $f(x) \in D$ für alle $x \in X$ und daher ist $f \in C(X,D)$. Somit ist $C(X,D)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $C(X,\mathbb{R}^s)$. Da $\big(C(X,\mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ nach Satz 4 vollständig ist, folgt aus Proposition 14, dass $\big(C(X,D), \|.\|_\infty\big)$ vollständig ist.

(2) Jetzt sei (f_n) eine Folge in $C(X,D; f(x_0)=y_0)$ und es sei $f \in C(X,D)$ so, dass $f_n \to f$ in $\big(C(X,D), \|.\|_\infty\big)$. Dann gilt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x_0)}_{=y_0} = y_0\,.$$

Also ist $C(X,D; f(x_0)=y_0)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $C(X,D)$. Wegen (1) ist $\big(C(X,D), \|.\|_\infty\big)$ vollständig. Daher ist nach Proposition 14 $\big(C(X,D; f(x_0)=y_0), \|.\|_\infty\big)$ vollständig. □

Für $\mathcal{F} \subseteq C(M_1,M_2)$ definieren jetzt die gleichgradige Stetigkeit. Während man bei der Stetigkeit für jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den passenden Eigenschaften findet, aber für verschiedene f verschiedene δ erhält, so kann man bei der gleichgradigen Stetigkeit zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von $f \in \mathcal{F}$ unabhängiges $\delta > 0$ mit den passenden Eigenschaften finden.

Definition. Seien (M_1,d_1) und (M_2,d_2) metrische Räume und sei $\mathcal{F} \subseteq C(M_1,M_2)$.

(1) Für $x_0 \in M_1$ heißt $\mathcal{F}$ *gleichgradig stetig* in x_0, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$ und für alle $x \in M_1$ mit $d_1(x,x_0) < \delta$ die Eigenschaft $d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ gilt.

(2) Man nennt $\mathcal{F}$ *gleichgradig stetig*, wenn $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in x für alle $x \in M_1$ ist.

(3) Die Familie $\mathcal{F}$ nennt man *gleichmäßig gleichgradig stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$ und für alle $x,y \in M_1$, die $d_1(x,y) < \delta$ erfüllen, die Eigenschaft $d_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ gilt.

Offensichtlich folgt aus der gleichmäßigen gleichgradigen Stetigkeit die gleichgradige Stetigkeit. Ähnlich wie in Proposition 23 kann man zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig ist, wenn $\mathcal{F} \subseteq C(X,M_2)$ gleichgradig stetig ist, und X kompakt ist. Anschließend zeigen wir, dass für kompakte X eine gleichgradig stetige Teilmenge $\mathcal{F}$ von $C(X,\mathbb{R}^s)$ genau dann beschränkt (bezüglich $\|.\|_\infty$) ist, wenn $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist, also $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ für jedes $x \in X$ beschränkt ist.

Proposition 25. *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, (M_2, d_2) ein metrischer Raum und sei $\mathcal{F} \subseteq C(X, M_2)$. Falls $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig.*

Beweis. Angenommen $\mathcal{F}$ wäre nicht gleichmäßig gleichgradig stetig. Dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $(x_n), (y_n)$ in X mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ für alle n und eine Folge $f_n \in \mathcal{F}$, sodass $d_2\big(f_n(x_n), f_n(y_n)\big) \geq \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nachdem X kompakt ist, ist X nach Satz 2 auch folgenkompakt. Somit gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in X$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Da $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Es gibt dann ein $K \in \mathbb{N}$ sodass $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2}$ für alle $k \geq K$ gilt. Außerdem existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Wähle $k \geq K$ so, dass $n_k \geq N$ gilt. Wir erhalten $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2} < \delta$ und daher $d_2\big(f_{n_k}(x_{n_k}), f_{n_k}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Weiters ist

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{d(y_{n_k}, x_{n_k})}_{<\frac{1}{n_k}<\frac{\delta}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{<\frac{\delta}{2}} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

und deshalb $d_2\big(f_{n_k}(y_{n_k}), f_{n_k}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Deswegen erhalten wir

$$\begin{aligned} d_2\big(f_{n_k}(x_{n_k}), f_{n_k}(y_{n_k})\big) &\leq \underbrace{d_2\big(f_{n_k}(x_{n_k}), f_{n_k}(x_0)\big)}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{d_2\big(f_{n_k}(x_0), f_{n_k}(y_{n_k})\big)}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} < \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \,, \end{aligned}$$

was jedoch $d_2\big(f_{n_k}(x_{n_k}), f_{n_k}(y_{n_k})\big) \geq \varepsilon_0$ widerspricht. Es muss also $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig sein. □

Proposition 26. *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $s \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^s)$ gleichgradig stetig. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann beschränkt (bezüglich $\|.\|_\infty$), wenn für jedes $x \in X$ die Menge $\big\{f(x) : f \in \mathcal{F}\big\}$ beschränkt ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Da $\mathcal{F}$ beschränkt ist, gibt es ein $R \in \mathbb{R}$, sodass $\|f\|_\infty \leq R$ für alle $f \in \mathcal{F}$ ist. Sei $x \in X$. Für jedes $f \in \mathcal{F}$ gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty \leq R$. Also ist $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt.

($\Leftarrow$) Wir nehmen indirekt an, dass $\mathcal{F}$ nicht beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit $\|f_n\|_\infty > n$. Für ein festes n gibt es wegen der Definition von $\|.\|_\infty$ und wegen $\|f_n\|_\infty > n$ ein $x_n \in X$ mit $|f_n(x_n)| > n$. Weil X kompakt ist, ist X nach Satz 2 auch folgenkompakt. Es gibt deswegen eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in X$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Nachdem $\mathcal{F}$

gleichgradig stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$ die Eigenschaft $|f(x) - f(x_0)| < 1$ gilt. Da $\{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt ist, gibt es ein $R \in \mathbb{R}$ mit $|f(x_0)| \leq R$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Weiters folgt aus $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ die Existenz eines $K \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_{n_k}, x_0) < \delta$ für alle $k \geq K$ gilt. Wähle $k \geq K$ so, dass $n_k \geq R + 1$ gilt. Wir erhalten, dass $|f_{n_k}(x_{n_k})| > n_k \geq R + 1$. Wegen $d(x_{n_k}, x_0) < \delta$ gilt daher $|f_{n_k}(x_{n_k})| - |f_{n_k}(x_0)| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| < 1$, woraus sich

$$|f_{n_k}(x_0)| \geq \underbrace{|f_{n_k}(x_{n_k})|}_{>R+1} - 1 > R + 1 - 1 = R$$

ergibt. Offensichtlich widerspricht das $f_{n_k}(x_0) \leq R$. Deshalb muss $\mathcal{F}$ beschränkt sein. $\square$

Jetzt wollen wir die kompakten Teilmengen $\mathcal{F}$ von $C(X, \mathbb{R}^s)$ charakterisieren, wobei X kompakt ist. Dabei verwenden einfach das Wort „beschränkt“ für beschränkt bezüglich $\|.\|_\infty$, wobei ja diese Eigenschaft nach Proposition 26 für gleichgradig stetige Mengen zu punktweise beschränkt äquivalent ist. Zunächst erinnern wir uns an Proposition 20, wo gezeigt wurde, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Ganz so schön ist die Charakterisierung kompakter Teilmengen von $C(X, \mathbb{R}^s)$ nicht, aber sie ist fast so schön. Es ist nämlich $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^s)$ genau dann kompakt, wenn $\mathcal{F}$ beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist. Dieses Resultat nennt man den *Satz von Arzelà-Ascoli.*

Satz 5. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $s \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^s)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Menge $\mathcal{F}$ ist kompakt.*

(2) *Es ist $\mathcal{F}$ folgenkompakt.*

(3) *Die Menge $\mathcal{F}$ ist beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig.*

(4) *Es ist $\mathcal{F}$ beschränkt, abgeschlossen und gleichmäßig gleichgradig stetig.*

Beweis. Wegen Satz 2 ist (1) zu (2) äquivalent. Aus Proposition 25 folgt, dass (3) zu (4) äquivalent ist. Deshalb genügt es zu zeigen, dass aus (1) die Eigenschaft (4) folgt, und dass aus (3) die Eigenschaft (1) folgt.

(1) $\Rightarrow$ (4): Es sei $\mathcal{F}$ kompakt. Aus Proposition 15 folgt, dass $\mathcal{F}$ beschränkt ist. Weiters folgt aus Proposition 19, dass $\mathcal{F}$ abgeschlossen ist. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{F}$ auch gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Offensichtlich ist $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} B(f, \frac{\varepsilon}{3})$, und für jedes f ist $B(f, \frac{\varepsilon}{3})$

offen. Weil $\mathcal{F}$ kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$. Betrachte ein beliebiges $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Da f_j stetig ist, ist f_j nach Proposition 23 gleichmäßig stetig. Deshalb gibt es ein $\delta_j > 0$, sodass $|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta_j$ gilt. Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Dann ist $\delta > 0$. Sei $f \in \mathcal{F}$ und seien $x, y \in X$ so, dass $d(x, y) < \delta$. Weil $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$ gilt, gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Aus $d(x, y) < \delta \le \delta_j$ ergibt sich

$$|f(x) - f(y)| \le \underbrace{|f(x) - f_j(x)|}_{\le \|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_j(x) - f_j(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_j(y) - f(y)|}_{\le \|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Somit ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig.

(3) $\Rightarrow$ (1): Jetzt sei $\mathcal{F}$ beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig. Weil $C(X, \mathbb{R}^s)$ nach Satz 4 vollständig ist, ist $\mathcal{F}$ als abgeschlossene Teilmenge von $C(X, \mathbb{R}^s)$ wegen Proposition 14 vollständig.

Wähle ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Nachdem $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, gibt es für jedes $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $y \in X$ mit $d(y, x) < \delta_x$ die Eigenschaft $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5}$ gilt. Für jedes $x \in X$ ist $B(x, \delta_x)$ offen, und es gilt $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$. Wegen der Kompaktheit von X gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ mit $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \delta_{x_j})$. Betrachte ein beliebiges $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Es ist dann $\{f(x_j) : f \in \mathcal{F}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^s$, weil $\mathcal{F}$ beschränkt ist. Aus Proposition 18 folgt, dass $\{f(x_j) : f \in \mathcal{F}\}$ totalbeschränkt ist, also es gibt ein $n_j \in \mathbb{N}$ und es gibt $y_{j,1}, y_{j,2}, \ldots, y_{j,n_j} \in \mathbb{R}^s$ mit $\{f(x_j) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcup_{q=1}^{n_j} B(y_{j,q}, \frac{\varepsilon}{5})$. Setze $\mathcal{A}_0 := \big\{(q_1, q_2, \ldots, q_k) : q_j \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$ für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, k\}\big\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{A}_0$ eine endliche Menge.

Wir definieren jetzt $\mathcal{A}$ als die Menge aller $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \mathcal{A}_0$, für die es ein $f \in \mathcal{F}$ gibt, das $f(x_j) \in B(y_{j,q_j}, \frac{\varepsilon}{5})$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ erfüllt. Als Teilmenge der endlichen Menge $\mathcal{A}_0$ muss $\mathcal{A}$ ebenfalls endlich sein. Zu jedem $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \mathcal{A}$ fixiere ein $f_{(q_1, q_2, \ldots, q_k)} \in \mathcal{F}$, das $|f_{(q_1, q_2, \ldots, q_k)}(x_j) - y_{j,q_j}| < \frac{\varepsilon}{5}$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ erfüllt. Sei $f \in \mathcal{F}$. Betrachte ein beliebiges $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Wegen $\{g(x_j) : g \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcup_{q=1}^{n_j} B(y_{j,q}, \frac{\varepsilon}{5})$ gibt es ein $q_j \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$ mit $|f(x_j) - y_{j,q_j}| < \frac{\varepsilon}{5}$. Man erhält daraus, dass $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \mathcal{A}$. Jetzt sei $x \in X$. Da $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \delta_{x_j})$ gilt, gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $d(x, x_j) < \delta_{x_j}$. Deshalb gilt $|g(x) - g(x_j)| < \frac{\varepsilon}{5}$ für alle $g \in \mathcal{F}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}(x)\right| \leq \underbrace{\left|f(x) - f(x_j)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{5}} + \underbrace{\left|f(x_j) - y_{j,q_j}\right|}_{<\frac{\varepsilon}{5}} + \\ + \underbrace{\left|y_{j,q_j} - f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}(x_j)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{5}} + \underbrace{\left|f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}(x_j) - f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}(x)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{5}} < \\ < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.\end{aligned}$$

Somit erhält man $\left\|f - f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}\right\|_\infty = \sup_{x\in X}\left|f(x) - f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}(x)\right| \leq \frac{4\varepsilon}{5} < \varepsilon$. Daraus folgt, dass

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)\in\mathcal{A}} B\big(f_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}, \varepsilon\big)$$

gilt. Deshalb ist $\mathcal{F}$ totalbeschränkt.

Es ist also $\mathcal{F}$ vollständig und totalbeschränkt. Nach Satz 2 ist $\mathcal{F}$ deswegen kompakt. □

6. Der Banach'sche Fixpunktsatz

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einem wichtigen Satz, dem Banach'schen Fixpunktsatz. Dieser besagt, dass jede Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt, und für jeden Startwert die Folge der Iterationen dieser Kontraktion gegen diesen Fixpunkt konvergiert. Für eine Funktion $T : M \to M$, wobei M eine nichtleere Menge ist, schreiben wir einfach Tx für $T(x)$. Man nennt $x \in M$ einen *Fixpunkt* von T, wenn $Tx = x$ gilt. Weiters definiere $T^0 := \mathrm{id}_M$, also die identische Abbildung auf M, und für $n \in \mathbb{N}$ definiere $T^n := T \circ T^{n-1}$ (also die n-te Iterierte von T). Es ist $T^1 = T \circ T^0 = T \circ \mathrm{id}_M = T$.

Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, so nennt man eine Funktion $f : M_1 \to M_2$ *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq Ld_1(x,y)$ für alle $x, y \in M_1$ gilt. Dabei nennt man L eine *Lipschitz-Konstante* für f. Weil für eine Lipschitz-Konstante L offensichtlich auch $\max\{L, 1\}$ eine Lipschitz-Konstante ist, gibt es zu jeder Lipschitz-stetigen Funktion f eine positive Lipschitz-Konstante. Man kann also stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L > 0$ annehmen. Für ein $\varepsilon > 0$ ist dann $\delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0$. Es seien $x, y \in M_1$ mit $d_1(x,y) < \delta$. Dann ist $d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq Ld_1(x,y) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

Betrachte einen metrischen Raum (M, d) und eine Abbildung $T : M \to M$. Die Abbildung heißt *Kontraktion*, falls es ein $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ gibt, sodass $d(Tx, Ty) \le qd(x, y)$ für alle $x, y \in M$ gilt. Man nennt dabei q eine *Kontraktionskonstante* für T. Das bedeutet, dass T genau dann eine Kontraktion ist, wenn es Lipschitz-stetig ist und es eine Lipschitz-Konstante L gibt, die $L < 1$ erfüllt.

Setzt man $M := \mathbb{Q} \cap [1, 2]$, so ist M ein metrischer Raum, der nicht vollständig ist. Die durch $Sx := \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ definierte Funktion $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $S(M) \subseteq M$ und $\sup_{x\in[1,2]} |S'(x)| \le \frac{1}{2}$. Wegen des Mittelwertsatzes gilt $|Sx - Sy| \le \frac{1}{2}|x - y|$ für alle $x, y \in [1, 2]$. Deswegen ist $T := S\big|_M$ eine Kontraktion auf M. Allerdings hat T keinen Fixpunkt, denn wäre $x_0 \in M$ Fixpunkt von T, dann müsste $Sx_0 = x_0$ gelten, und der einzige Punkt $x_0 \in [1, 2]$ mit dieser Eigenschaft ist $\sqrt{2}$, und wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist $\sqrt{2} \notin M$. Eine Kontraktion auf einem metrischen Raum muss also keinen Fixpunkt besitzen.

Anders ist die Situation eben auf vollständigen metrischen Räumen. Hier besitzt jede Kontraktion einen eindeutig bestimmten Fixpunkt. Man kann sogar ohne diesen Fixpunkt zu kennen angeben, wie groß der Abstand von $T^n x$ zum Fixpunkt höchstens sein kann. Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt den *Banach'schen Fixpunktsatz* formulieren und beweisen.

Satz 6. *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Kontraktion. Dann besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x_0. Weiters gilt für alle $x \in M$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$. Außerdem gilt $d(T^n x, x_0) \le \frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n$ für alle $x \in M$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$, falls q eine Kontraktionskonstante für T ist.*

Beweis. Diesen Beweis führen wir in mehreren Schritten.

1. *Schritt*: Zuerst zeigen wir, dass T nicht zwei verschiedene Fixpunkte haben kann.

Behauptung. Falls es einen Fixpunkt gibt, dann ist er eindeutig bestimmt.

Beweis der Behauptung. Es seien $x_0 \in M$ und $y_0 \in M$ Fixpunkte, also es gelte $Tx_0 = x_0$ und $Ty_0 = y_0$. Dann gilt

$$d(\underbrace{x_0}_{=Tx_0}, \underbrace{y_0}_{=Ty_0}) = \underbrace{d(Tx_0, Ty_0)}_{\le qd(x_0,y_0)} \le qd(x_0, y_0)\,.$$

Wegen $q < 1$ muss $d(x_0, y_0) = 0$ gelten, und deshalb ist $y_0 = x_0$. $\diamondsuit$

2. *Schritt*: Als nächstes zeigen wir, dass für jedes $x \in M$ die Folge $(T^n x)$ konvergiert.

Behauptung. Für jedes $x \in M$ konvergiert die Folge $\big(T^n x\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters gilt $d\big(T^n x, \lim_{k\to\infty} T^k x\big) \le \frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis der Behauptung. Man erhält für beliebige $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$, dass

$$d(T^n x, T^m x) \leq d(T^n x, T^{n+1} x) + \underbrace{d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q d(T^n x, T^{n+1} x)} + \underbrace{\underbrace{d(T^{n+2} x, T^{n+3} x)}_{\leq q \underbrace{d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q d(T^n x, T^{n+1} x)}}}_{\leq q^2 d(T^n x, T^{n+1} x)} +$$

$$+ \cdots + \underbrace{\underbrace{\underbrace{d(T^{m-1} x, T^m x)}_{\leq q d(T^{m-2} x, T^{m-1} x)}}_{\vdots}}_{\leq q^{m-n-1} d(T^n x, T^{n+1} x)} \leq$$

$$\leq \underbrace{(1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-n-1})}_{\underbrace{=}_{\text{endliche geometrische Reihe}} \frac{1-q^{m-n}}{1-q} \leq \frac{1}{1-q}} d(T^n x, T^{n+1} x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-q} \underbrace{\underbrace{\underbrace{d(T^n x, T^{n+1} x)}_{\leq q d(T^{n-1} x, T^n x)}}_{\vdots}}_{\leq q^n d(x, Tx) = q^n d(Tx, x)} \leq \frac{d(Tx, x)}{1-q} q^n < .$$

Fixiere ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N, sodass $\frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Es seien $n, m \geq N$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $n < m$ annehmen. Deshalb ist $d(T^n x, T^m x) \leq \frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n < \varepsilon$. Damit ist $(T^n x)$ eine Cauchyfolge in M. Nachdem M vollständig ist, konvergiert $(T^n x)$.

Setze $y := \lim_{k\to\infty} T^k x$. Nun sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein K mit $d(T^m x, y) < \varepsilon$ für alle $m \geq K$. Wähle ein $m \geq K$ so, dass $m > n$. Wir erhalten wegen der oben bewiesenen Ungleichung $d(T^n x, T^m x) \leq \frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n$, dass

$$d(T^n x, y) \leq \underbrace{d(T^n x, T^m x)}_{\leq \frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n} + \underbrace{d(T^m x, y)}_{< \varepsilon} < \frac{d(Tx, x)}{1-q} q^n + \varepsilon$$

gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich daraus $d(T^n x, y) \leq \frac{d(Tx,x)}{1-q} q^n$. $\Diamond$

3. *Schritt*: Wenn $x \in M$ ist, dann wissen wir aus dem 2. Schritt, dass die Folge $(T^n x)$ konvergiert. Hier wollen wir jetzt zeigen, dass dieser Grenzwert ein Fixpunkt ist.

Behauptung. Es sei $x \in M$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} T^n x$ ein Fixpunkt von T, also es gilt $T(\lim_{n\to\infty} T^n x) = \lim_{n\to\infty} T^n x$.

Beweis der Behauptung. Wir setzen $y := \lim_{n\to\infty} T^n x$. Wähle ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Wegen $y := \lim_{n\to\infty} T^n x$ gibt es ein N, sodass $d(T^n x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Fixiere ein $n \geq N$. Dann ist auch $n+1 \geq N$ und es gilt

$$d(Ty, y) \leq \underbrace{d(Ty, T^{n+1}x)}_{\leq \underbrace{q}_{<1} \underbrace{d(y, T^n x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{d(T^{n+1}x, y)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $d(Ty, y) = 0$ sein, und daher $Ty = y$ gelten. $\diamondsuit$

4. *Schritt*: Jetzt wählen wir ein $x_1 \in M$. Aus dem 2. Schritt folgt, dass die Folge $(T^n x_1)$ konvergiert. Es gibt also ein $x_0 \in M$ mit $\lim_{n\to\infty} T^n x_1 = x_0$. Nach dem 3. Schritt gilt $Tx_0 = x_0$. Somit besitzt T einen Fixpunkt x_0. Wegen des 1. Schritts ist dieser Fixpunkt eindeutig. Schließlich sei $x \in M$. Dann konvergiert $(T^n x)$ wegen des 2. Schritts. Aus dem 3. Schritt folgt, dass dieser Grenzwert ein Fixpunkt ist. Nachdem x_0 der einzige Fixpunkt von T ist, gilt $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$. Unter Verwendung des 2. Schritts ergibt sich $d(T^n x, x_0) \leq \frac{d(Tx,x)}{1-q}\, q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Der Banach'sche Fixpunktsatz wird in der Mathematik oft verwendet. So kann er etwa verwendet werden um zu zeigen, dass das Newtonverfahren gegen eine Nullstelle konvergiert, soferne man nahe genug an der Nullstelle startet. Hier werden wir als eine Anwendung den Satz von Stone-Weierstraß besprechen. Dazu betrachten wir wieder den Raum $\big(C(X, \mathbb{R}^s), \|.\|_\infty\big)$ für einen kompakten metrischen Raum (X, d). Für eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^s)$ sind die Aussagen „für jedes $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$", „für jedes $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$", „zu jedem $f \in C(X, \mathbb{R}^s)$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$" und „$\mathcal{F}$ ist dicht in $C(X, \mathbb{R}^s)$" offensichtlich äquivalent zueinander. Erfüllt $\mathcal{F}$ die im nächsten Resultat in (5) beschriebene Eigenschaft, dass es für $x \neq y \in X$ ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt, so nennt man $\mathcal{F}$ *punktetrennend*. Jetzt formulieren und beweisen wir den *Approximationssatz von Stone-Weierstraß*.

Satz 7. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Weiters sei $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ so, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(1) *Für $f, g \in \mathcal{F}$ ist auch $f + g \in \mathcal{F}$.*

(2) *Ist $f \in \mathcal{F}$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $cf \in \mathcal{F}$.*

(3) *Falls $f, g \in \mathcal{F}$ sind, dann ist $fg \in \mathcal{F}$.*

(4) *Es ist $1 \in \mathcal{F}$.*

(5) *Wenn $x, y \in X$ mit $x \neq y$, dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

Dann gibt es zu jedem $f \in C(X,\mathbb{R})$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

Beweis. Zunächst definieren wir $\overline{\mathcal{F}}$ als die Menge aller $f \in C(X,\mathbb{R})$, für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{F}$ gibt, sodass $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ gilt. Es ist damit zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{F}} = C(X,\mathbb{R})$ gilt. Offensichtlich ist $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$.

1. *Schritt*: Hier zeigen wir einige Eigenschaften von $\overline{\mathcal{F}}$.

Behauptung. Es gelten die folgenden Eigenschaften.

(1) *Wenn $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ sind, dann ist $f+g \in \overline{\mathcal{F}}$.*

(2) *Falls $f \in \overline{\mathcal{F}}$ und $c \in \mathbb{R}$ gelten, dann ist $cf \in \overline{\mathcal{F}}$.*

(3) *Sind $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$, so ist auch $fg \in \overline{\mathcal{F}}$.*

(4) *Es gilt $1 \in \overline{\mathcal{F}}$.*

(5) *Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

(6) *Falls es für $f \in C(X,\mathbb{R})$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ gibt, dann gilt $f \in \overline{\mathcal{F}}$.*

Beweis der Behauptung. (1): Betrachte $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathcal{F}$ mit $\|f-\widetilde{f}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|g-\widetilde{g}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus erhalten wir $\widetilde{f}+\widetilde{g} \in \mathcal{F}$ und $\|(f+g)-(\widetilde{f}+\widetilde{g})\|_\infty \leq \|f-\widetilde{f}\|_\infty + \|g-\widetilde{g}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Damit ist $f+g \in \overline{\mathcal{F}}$.

(2): Sei $f \in \overline{\mathcal{F}}$, $c \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ mit $\|f-\widetilde{f}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\max\{|c|,1\}}$. Somit ist $c\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ und es gilt $\|(cf)-(c\widetilde{f})\|_\infty \leq |c|\|f-\widetilde{f}\|_\infty < |c|\frac{\varepsilon}{\max\{|c|,1\}} \leq \varepsilon$. Deswegen ist $cf \in \overline{\mathcal{F}}$.

(3): Jetzt seien $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ und es sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathcal{F}$ mit $\|f-\widetilde{f}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+1}$ und $\|g-\widetilde{g}\|_\infty < \min\left\{\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+1}, 1\right\}$. Insbesondere ist $\|\widetilde{g}\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 1$. Daraus ergibt sich $\widetilde{f}\widetilde{g} \in \mathcal{F}$ und

$$\begin{aligned}
\|(fg)-(\widetilde{f}\widetilde{g})\|_\infty &\leq \underbrace{\|fg - f\widetilde{g}\|_\infty}_{\leq \|f\|_\infty \|g-\widetilde{g}\|_\infty} + \underbrace{\|f\widetilde{g} - \widetilde{f}\widetilde{g}\|_\infty}_{\leq \|f-\widetilde{f}\|_\infty \|\widetilde{g}\|_\infty} \leq \\
&\leq \|f\|_\infty \underbrace{\|g-\widetilde{g}\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+1}} + \underbrace{\|\widetilde{g}\|_\infty}_{\leq \|g\|_\infty+1} \underbrace{\|f-\widetilde{f}\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+1}} < \\
&< \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+1} + \big(\|g\|_\infty+1\big)\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+1} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Daher ist $fg \in \overline{\mathcal{F}}$.

(4) und (5): Nachdem $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ und $1 \in \mathcal{F}$ gelten, erhält man $1 \in \overline{\mathcal{F}}$. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Es gibt ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Wegen $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ ist $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

(6): Die Funktion $f \in C(X, \mathbb{R})$ erfülle, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ gibt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $h \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $\|f - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Weil $h \in \overline{\mathcal{F}}$ ist, gibt es ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist $\|f - g\|_\infty \leq \|f - h\|_\infty + \|h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist $f \in \overline{\mathcal{F}}$. $\diamondsuit$

2. *Schritt*: Jetzt zeigen wir, dass für eine nichtnegative Funktion $f \in \overline{\mathcal{F}}$ auch $\sqrt{f}$ in $\overline{\mathcal{F}}$ liegt.

Behauptung. Sei $f \in \overline{\mathcal{F}}$ und es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Dann ist $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{F}}$.

Beweis der Behauptung. Zuerst sei $f \in \overline{\mathcal{F}}$ so, dass $\|f - 1\|_\infty < 1$ und $\|f\|_\infty < 1$ gelten. Offensichtlich gilt dann $0 < 1 - \|f - 1\|_\infty \leq f(x) \leq \|f\|_\infty < 1$ für alle $x \in X$. Die Zahl $r := \max\big\{\|f\|_\infty, \|f - 1\|_\infty\big\}$ erfüllt dann $0 < r < 1$. Definiere $\mathcal{A}$ als die Menge aller $h \in C(X, \mathbb{R})$ mit $\|h\|_\infty \leq r$. Als abgeschlossene Kugel ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen. Weil $C(X, \mathbb{R})$ nach Satz 4 vollständig ist, ist $\mathcal{A}$ wegen Proposition 14 vollständig. Für $h \in \mathcal{A}$ definiere $T_f h := \frac{1}{2}(h^2 + (1 - f))$. Es ist $T_f h \in C(X, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\| \underbrace{T_f h}_{=\frac{1}{2}(h^2+(1-f))} \|_\infty \leq \frac{1}{2}\big(\underbrace{\|h\|_\infty}_{\leq r}{}^2 + \underbrace{\|1 - f\|_\infty}_{\leq r}\big) \leq \frac{1}{2}(\underbrace{r^2}_{\leq r} + r) = \frac{1}{2}(r + r) = r\,.$$

Damit ist $T_f h \in \mathcal{A}$, also $T_f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Für $h_1, h_2 \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\| \underbrace{T_f h_1}_{=\frac{1}{2}({h_1}^2+(1-f))} - \underbrace{T_f h_2}_{=\frac{1}{2}({h_2}^2+(1-f))} \|_\infty = \left\| \frac{1}{2}({h_1}^2 - {h_2}^2) \right\|_\infty = \\
&= \frac{1}{2}\|(h_1 + h_2)(h_1 - h_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\big(\underbrace{\|h_1 + h_2\|_\infty}_{\leq \underbrace{\|h_1\|_\infty}_{\leq r} + \underbrace{\|h_2\|_\infty}_{\leq r}} \|h_1 - h_2\|_\infty\big) \leq \\
&\leq \frac{1}{2}(r + r)\|h_1 - h_2\|_\infty = r\|h_1 - h_2\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Somit ist T_f eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $\mathcal{A}$. Nach Satz 6 (Banach'scher Fixpunktsatz) besitzt T_f einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $h_0 \in \mathcal{A}$. Es gilt also $h_0 = T_f h_0 = \frac{1}{2}({h_0}^2 + (1 - f))$, woraus sich für $x \in X$ ergibt, dass $h_0(x) = 1 - \sqrt{f(x)}$ oder $h_0(x) = 1 + \sqrt{f(x)}$ gilt. Da $h_0(x) \leq \|h_0\|_\infty \leq r < 1$, muss also $h_0(x) = 1 - \sqrt{f(x)}$ für alle $x \in X$ gelten, wodurch wir $h_0 = 1 - \sqrt{f}$ erhalten.

Weil $f \in \mathcal{A}$ gilt, folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz (Satz 6), dass $\lim_{n\to\infty}\big\|{T_f}^n f - h_0\big\|_\infty = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze $f_n := {T_f}^n f$, wodurch wir $\lim_{n\to\infty}\|f_n - h_0\|_\infty = 0$ erhalten. Durch Induktion zeigen wir, dass $f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Es ist $f_0 = f \in \overline{\mathcal{F}}$. Sei $n > 0$ und es sei $f_{n-1} \in \overline{\mathcal{F}}$. Dann ist $f_n = T_f f_{n-1} = \frac{1}{2}({f_{n-1}}^2 + (1 - f))$. Wegen der Eigenschaften (1), (2), (3) und (4) aus dem 1. Schritt ist $f_n \in \overline{\mathcal{F}}$. Nachdem $f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ und $\lim_{n\to\infty}\|f_n - h_0\|_\infty = 0$ folgt aus der Eigenschaft (6) im 1. Schritt, dass $h_0 = 1 - \sqrt{f} \in \overline{\mathcal{F}}$. Deshalb ist wegen den Eigenschaften (1) und (2) im 1. Schritt auch $\sqrt{f} = (-1)h_0 + 1 \in \overline{\mathcal{F}}$. Wir haben bisher gezeigt, dass $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{F}}$ für alle $f \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $\|f - 1\|_\infty < 1$ und $\|f\|_\infty < 1$ gilt.

Als nächstes betrachten wir ein $f \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $\inf_{x\in X} f(x) > 0$. Wähle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \inf_{x\in X} f(x) \leq \|f\|_\infty < \beta$. Aus der Eigenschaft (2) im 1. Schritt erhalten wir, dass $\frac{1}{\beta} f \in \overline{\mathcal{F}}$. Weiters ist $0 < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\beta} f(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\beta} < 1$ und daher $\big\|\frac{1}{\beta} f - 1\big\|_\infty \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1$ und $\big\|\frac{1}{\beta} f\big\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\beta} < 1$. Deshalb ist $\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{f} = \sqrt{\frac{1}{\beta} f} \in \overline{\mathcal{F}}$ und wegen der Eigenschaft (2) aus dem 1. Schritt auch $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{F}}$.

Schließlich sei $f \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Klarerweise ist dann $\sqrt{f} \in C(X, \mathbb{R})$. Weiters sei $\varepsilon > 0$. Es ist dann wegen der Eigenschaften (1) und (4) aus dem 1. Schritt auch $f + \varepsilon^2 \in \overline{\mathcal{F}}$. Offensichtlich ist $\inf_{x\in X}(f + \varepsilon^2)(x) \geq \varepsilon^2 > 0$. Deshalb ist $\sqrt{f + \varepsilon^2} \in \overline{\mathcal{F}}$. Für jedes $x \in X$ erhalten wir wegen $f(x) \geq 0$, dass $\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} + \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{0 + \varepsilon^2} + \sqrt{0} = \varepsilon$, also $\frac{1}{\sqrt{f(x)+\varepsilon^2} + \sqrt{f(x)}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Daraus ergibt sich

$$\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} - \sqrt{f(x)} = \big(\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} - \sqrt{f(x)}\big)\frac{\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} + \sqrt{f(x)}} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} + \sqrt{f(x)}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{f(x) + \varepsilon^2} + \sqrt{f(x)}}}_{\leq \frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 = \varepsilon\,.$$

Also ist $\|\sqrt{f + \varepsilon^2} - \sqrt{f}\|_\infty \leq \varepsilon$. Weil zu jedem $\varepsilon > 0$ die Funktion $\sqrt{f + \varepsilon^2} \in \overline{\mathcal{F}}$ und $\|\sqrt{f + \varepsilon^2} - \sqrt{f}\|_\infty \leq \varepsilon$ erfüllt, folgt aus Eigenschaft (6) im 1. Schritt, dass $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{F}}$ gilt, womit unsere Behauptung gezeigt ist. $\diamondsuit$

3. *Schritt*: Unter Verwendung des 2. Schritts können wir jetzt zeigen, dass mit $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ auch $|f|, \max(f, g), \min(f, g) \in \overline{\mathcal{F}}$ sind.

Behauptung. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $f, f_1, f_2, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{F}}$. Dann ist $|f| \in \overline{\mathcal{F}}$, $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{F}}$ und $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{F}}$.

Beweis der Behauptung. Wegen $|f| = \sqrt{f^2}$ folgt aus Eigenschaft (3) im 1. Schritt und dem 2. Schritt, dass $|f| \in \overline{\mathcal{F}}$. Unter Verwendung der elementaren Formeln $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \max\bigl(\max(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}), f_n\bigr)$ und $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \min\bigl(\min(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}), f_n\bigr)$ zeigen wir jetzt durch Induktion, dass $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{F}}$ und $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{F}}$. Im Fall $n = 1$ ist das offensichtlich. Also sei $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $g_1 := \max(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}) \in \overline{\mathcal{F}}$ und $g_2 := \min(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}) \in \overline{\mathcal{F}}$. Es ist zu beweisen, dass $\max(g_1, f_n)$ und $\min(g_2, f_n)$ in $\overline{\mathcal{F}}$ liegen. Wegen der Eigenschaften (1) und (2) aus dem 1. Schritt gelten $g_1 - f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ und $g_2 - f_n \in \overline{\mathcal{F}}$. Weil wir bereits gezeigt haben, dass aus $f \in \overline{\mathcal{F}}$ auch $|f| \in \overline{\mathcal{F}}$ folgt, erhalten wir, dass $|g_1 - f_n| \in \overline{\mathcal{F}}$ und $|g_2 - f_n| \in \overline{\mathcal{F}}$. Da $\max(g_1, f_n) = \frac{1}{2}\bigl(g_1 + f_n + |g_1 - f_n|\bigr)$ und $\min(g_2, f_n) = \frac{1}{2}\bigl(g_2 + f_n - |g_2 - f_n|\bigr)$ gelten, ergibt sich daraus unter Verwendung der Eigenschaften (1) und (2), dass $\max(g_1, f_n) \in \overline{\mathcal{F}}$ und $\min(g_2, f_n) \in \overline{\mathcal{F}}$, womit wir die Behauptung gezeigt haben. $\diamondsuit$

4. *Schritt*: Wir benötigen noch die folgende Eigenschaft.

Behauptung. Falls $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind, dann gibt es ein $f \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$.

Beweis der Behauptung. Da $\mathcal{F}$ punktetrennend ist, gibt es ein $g \in \mathcal{F}$ mit $g(x) \neq g(y)$. Definiere $f := \frac{\alpha-\beta}{g(x)-g(y)}\bigl(g - g(y)\bigr) + \beta$. Aus den Eigenschaften (1) und (2) für $\mathcal{F}$ folgt, dass $f \in \mathcal{F}$ und wegen $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ ist $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Offensichtlich gilt auch $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$. $\diamondsuit$

5. *Schritt*: Schließlich sei $f \in C(X, \mathbb{R})$. Weiters sei $\varepsilon > 0$. Zunächst fixiere ein beliebiges $x \in X$. Zu jedem $y \in X$ gibt es nach dem 4. Schritt eine Funktion $g_y \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $g_y(x) = f(x)$ und $g_y(y) = f(y)$. Weil $g_y - f$ stetig ist, gibt es ein $\delta_y > 0$, sodass $|g_y(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in X$ mit $d(t, y) < \delta_y$ gilt. Ist $t \in X$ so, dass $d(t, y) < \delta_y$, dann ist $g_y(t) - f(t) \leq |g_y(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $g_y(t) < f(t) + \frac{\varepsilon}{2}$. Nachdem für jedes $y \in X$ die Menge $B(y, \delta_y)$ offen ist und $X \subseteq \bigcup_{y \in X} B(y, \delta_y)$ gilt, folgt aus der Kompaktheit von X, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ gibt mit $X \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(y_j, \delta_{y_j})$. Definiere $f_x := \min(g_{y_1}, g_{y_2}, \ldots, g_{y_n})$. Aus dem 3. Schritt folgt, dass $f_x \in \overline{\mathcal{F}}$. Nachdem $g_{y_j}(x) = f(x)$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ erhalten wir $f_x(x) = f(x)$. Jetzt sei $y \in X$ beliebig. Dann gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $d(y, y_j) < \delta_{y_j}$. Deshalb ist $f_x(y) \leq g_{y_j}(y) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Somit haben wir gezeigt, dass es ein $f_x \in \overline{\mathcal{F}}$ gibt mit $f_x(x) = f(x)$ und $f_x(y) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in X$.

Wegen der Stetigkeit von $f - f_x$ gibt es ein $\eta_x > 0$, sodass $|f(y) - f_x(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in X$ mit $d(y, x) < \eta_x$ gilt. Für $y \in X$ mit $d(y, x) < \eta_x$ gilt $f(y) - f_x(y) \leq |f(y) - f_x(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, und somit $f_x(y) > f(y) - \frac{\varepsilon}{2}$. Es ist $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \eta_x)$ und für jedes $x \in X$ ist $B(x, \eta_x)$ offen. Weil X kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ mit $X \subseteq \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \eta_{x_j})$. Setze $g := \max(f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_k})$. Man erhält aus dem 3. Schritt, dass $g \in \overline{\mathcal{F}}$. Betrachte ein beliebiges $x \in X$. Weil $f_{x_j}(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ergibt sich $g(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Weiters gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $d(x, x_j) < \eta_{x_j}$. Daher ist $g(x) \geq f_{x_j}(x) > f(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt also $f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $x \in X$. Somit ist $\|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Nachdem auch $g \in \overline{\mathcal{F}}$ gilt ist unser Satz bewiesen. □

Als erste Folgerung des Approximationssatzes von Stone-Weierstraß beweisen wir jetzt seine komplexe Version. Bei dieser muss man zusätzlich fordern, dass mit jeder Funktion auch ihre komplex Konjugierte in $\mathcal{F}$ liegt. Somit kommen wir zur *komplexen Version des Approximationssatzes von Stone-Weierstraß*.

Korollar 7.1. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Weiters sei $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{C})$ so, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(1) *Wenn $f, g \in \mathcal{F}$ sind, dann ist $f + g \in \mathcal{F}$.*

(2) *Ist $f \in \mathcal{F}$ und $c \in \mathbb{C}$, so ist auch $cf \in \mathcal{F}$.*

(3) *Für $f, g \in \mathcal{F}$ ist auch $fg \in \mathcal{F}$.*

(4) *Es ist $1 \in \mathcal{F}$.*

(5) *Falls $x, y \in X$ mit $x \neq y$, dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

(6) *Für $f \in \mathcal{F}$ ist auch $\overline{f} \in \mathcal{F}$.*

Dann gibt es zu jedem $f \in C(X, \mathbb{C})$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Beweis. Setze $\mathcal{F}_1 := \{\mathrm{Re}(f) : f \in \mathcal{F}\}$. Es ist damit $\mathcal{F}_1 \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Wegen $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ ist $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$. Jetzt zeigen wir, dass $\mathcal{F}_1 = \{\mathrm{Im}(f) : f \in \mathcal{F}\}$. Für $f \in \mathcal{F}_1$ ist $f \in \mathcal{F}$ und daher auch $if \in \mathcal{F}$. Wegen $\mathrm{Im}(if) = f$ liegt f in $\{\mathrm{Im}(g) : g \in \mathcal{F}\}$. Nun sei $f \in \mathcal{F}$. Dann ist $\mathrm{Re}(-if) = \mathrm{Im}(f)$ und wegen $-if \in \mathcal{F}$ gilt $\mathrm{Im}(f) \in \mathcal{F}_1$, womit $\mathcal{F}_1 = \{\mathrm{Im}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ gezeigt ist.

Wegen $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ ist sofort ersichtlich, dass $\mathcal{F}_1$ die Eigenschaften (1), (2), (3) und (4) aus Satz 7 erfüllt. Um zu zeigen, dass $\mathcal{F}_1$ auch punktetrennend ist, betrachten wir $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Es gibt dann ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Soferne $\mathrm{Re}(f(x)) \neq \mathrm{Re}(f(y))$ gilt, ist $g := \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{F}_1$ und $g(x) \neq g(y)$. Andernfalls ist $\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f(y))$ und wegen $f(x) \neq f(y)$ muss $\mathrm{Im}(f(x)) \neq \mathrm{Im}(f(y))$ gelten. In diesem Fall ist $g := \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{F}_1$ und $g(x) \neq g(y)$, wodurch wir gezeigt haben, dass $\mathcal{F}_1$ auch punktetrennend ist. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (Satz 7) gibt es zu jedem $f \in C(X, \mathbb{R})$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{F}_1$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Schließlich sei $f \in C(X,\mathbb{C})$. Setzt man $f_1 := \mathrm{Re}(f)$ und $f_2 := \mathrm{Im}(f)$, so ist $f = f_1 + if_2$, wobei $f_1, f_2 \in C(X,\mathbb{R})$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_1$ mit $\|f_1 - g_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|f_2 - g_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ folgt, dass $g := g_1 + ig_2 \in \mathcal{F}$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\|f-g\|_\infty &= \|(f_1+if_2)-(g_1+ig_2)\|_\infty \leq \\ &\leq \underbrace{\|f_1-g_1\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|i|}_{=1}\underbrace{\|f_2-g_2\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + 1\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Daher gibt es zu jedem $f \in C(X,\mathbb{C})$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. □

Ein weiterer Spezialfall des Satzes von Stone-Weierstraß ist der folgende klassische *Approximationssatz von Weierstraß*. Dieser besagt, dass jede stetige Funktion von einem abgeschlossenen Intervall nach $\mathbb{R}$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Korollar 7.2. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p mit $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$.*

Beweis. Sind p_1, p_2 Polynome und $c \in \mathbb{R}$, so sind offensichtlich auch $p_1 + p_2$, cp_1 und p_1p_2 Polynome. Also erfüllt die Menge $\mathcal{P}$ aller Polynome die Eigenschaften (1), (2) und (3) aus Satz 7. Da 1 ein Polynom ist, ist auch Eigenschaft (4) aus Satz 7 erfüllt. Definiert man $p(x) := x$ für alle x, so ist p ein Polynom (also $p \in \mathcal{P}$). Für $x, y \in [a,b]$ mit $x \neq y$ ist dann $p(x) = x \neq y = p(y)$, also $\mathcal{P}$ erfüllt auch die Eigenschaft (5) aus Satz 7. Deshalb folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß (Satz 7), dass es zu jedem $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}$ gibt, das $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$ erfüllt, womit unser Resultat bewiesen ist. □

Jetzt wollen wir als weitere Folgerung des Satzes von Stone-Weierstraß zeigen, dass jede stetige Funktion von einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^{s_1}$ nach $\mathbb{R}^{s_2}$ gleichmäßig durch Lipschitz-stetige Funktionen approximiert werden kann. Vorher zeigen wir, dass eine Funktion genau dann Lipschitz-stetig ist, wenn jede ihrer Komponenten Lipschitz-stetig ist.

Lemma 2. *Es seien $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ und es sei $X \subseteq \mathbb{R}^{s_1}$ nichtleer. Dann ist eine Funktion $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{s_2} \end{pmatrix} : X \to \mathbb{R}^{s_2}$ genau dann Lipschitz-stetig, wenn für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, s_2\}$ die Funktion f_j Lipschitz-stetig ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Funktion f sei Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Weiters sei $j \in \{1, 2, \ldots, s_2\}$ beliebig. Dann gilt für $x, y \in X$, dass $|f_j(x) - f_j(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Deswegen ist f_j Lipschitz-stetig für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, s_2\}$.

($\Leftarrow$) Nun sei für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, s_2\}$ die Funktion f_j Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L_j. Es ist dann $L := \sqrt{\sum_{j=1}^{s_2} {L_j}^2} \in \mathbb{R}$. Betrachte $x, y \in X$. Man erhält für ein beliebiges $j \in \{1, 2, \ldots, s_2\}$, dass $|f_j(x) - f_j(y)|^2 \leq {L_j}^2 |x - y|^2$. Daraus ergibt sich

$$|f(x) - f(y)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{s_2} |f_j(x) - f_j(y)|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{s_2} {L_j}^2 |x - y|^2} = \\ = \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{s_2} {L_j}^2}}_{=L} |x - y| = L|x - y|\,,$$

womit gezeigt ist, dass f Lipschitz-stetig ist. □

Korollar 7.3. *Seien $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, sei $X \subseteq \mathbb{R}^{s_1}$ nichtleer und kompakt und sei $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$. Weiters sei $f : X \to \mathbb{R}^{s_2}$ eine stetige Funktion, die $|f(x)| \leq R$ für alle $x \in X$ erfüllt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Lipschitz-stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}^{s_2}$ mit $|g(x)| \leq R$ für alle $x \in X$, sodass $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fall $s_2 = 1$. Wir definieren $\mathcal{F}$ als die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Seien $f, g \in \mathcal{F}$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L_1|x - y|$ und $|g(x) - g(y)| \leq L_2|x - y|$ für alle $x, y \in X$. Es ist dann

$$\big|(f + g)(x) - (f + g)(y)\big| \leq \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq L_1|x-y|} + \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\leq L_2|x-y|} \leq \\ \leq L_1|x - y| + L_2|x - y| = (L_1 + L_2)|x - y|$$

für alle $x, y \in X$, also $f + g$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L_1 + L_2$, wodurch $\mathcal{F}$ die Eigenschaft (1) aus Satz 7 erfüllt. Außerdem gilt

$$\big|(cf)(x) - (cf)(y)\big| \leq |c|\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq L_1|x-y|} \leq (|c|L_1)|x - y|$$

für alle $x, y \in X$, wodurch cf Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $|c|L_1$ ist und $\mathcal{F}$ auch die Eigenschaft (2) aus Satz 7 erfüllt. Nachdem jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist folgt aus Proposition 24, dass $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \in \mathbb{R}$ und

$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ und $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ für alle $x \in X$ gelten. Man erhält

$$\begin{aligned}\big|(fg)(x) - (fg)(y)\big| &= \big|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)\big| \leq \\ &\leq \underbrace{\big|f(x) - f(y)\big|}_{\leq L_1|x-y|}\underbrace{\big|g(x)\big|}_{\leq \|g\|_\infty} + \underbrace{\big|f(y)\big|}_{\leq \|f\|_\infty}\underbrace{\big|g(x) - g(y)\big|}_{\leq L_2|x-y|} \leq \\ &\leq L_1\|g\|_\infty|x-y| + L_2\|f\|_\infty|x-y| = (L_1\|g\|_\infty + L_2\|f\|_\infty)|x-y|\end{aligned}$$

für alle $x, y \in X$. Somit ist die Funktion fg Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L_1\|g\|_\infty + L_2\|f\|_\infty$, also erfüllt $\mathcal{F}$ auch die Eigenschaft (3) aus Satz 7. Offensichtlich ist $|1(x) - 1(y)| = |1 - 1| = 0 \leq 0|x - y|$, also 1 ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 0 und $\mathcal{F}$ erfüllt auch die Eigenschaft (4) aus Satz 7.

Betrachte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{s_1} \end{pmatrix} \in X$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{s_1} \end{pmatrix} \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, s_1\}$ mit $x_j \neq y_j$. Für $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{s_1} \end{pmatrix} \in X$ definiere $f(t) := t_j$. Es gilt dann $|f(t) - f(s)| = |t_j - s_j| \leq |t - s|$ für alle $t, s \in X$. Das bedeutet, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist, also $f \in \mathcal{F}$. Weiters ist $f(x) = x_j \neq y_j = f(y)$, wodurch $\mathcal{F}$ auch die Eigenschaft (5) aus Satz 7 erfüllt. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (Satz 7) gibt es zu jedem $f \in C(X, \mathbb{R})$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{F}$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Schließlich wollen wir das Resultat auch für beliebige s_2 zeigen. Dazu sei $f : X \to \mathbb{R}^{s_2}$ eine stetige Funktion mit $|f(x)| \leq R$ für alle $x \in X$. Weiters sei $\varepsilon > 0$. Wir schreiben $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{s_2} \end{pmatrix}$. Dann gibt es für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, s_2\}$ eine Lipschitz-stetige Funktion g_j mit $\|f_j - g_j\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{s_2}}$. Setze $\widetilde{g} := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{s_2} \end{pmatrix}$. Nach Lemma 2 ist $\widetilde{g} : X \to \mathbb{R}^{s_2}$ Lipschitz-stetig. Es ist

$$\sum_{j=1}^{s_2} \underbrace{\|f_j - g_j\|_\infty{}^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{4s_2}} < \sum_{j=1}^{s_2} \frac{\varepsilon^2}{4s_2} = \frac{\varepsilon^2}{4}\,.$$

Für jedes $x \in X$ gilt

$$\big|(f - \widetilde{g})(x)\big|^2 = \sum_{j=1}^{s_2} \big(\underbrace{\big|f_j(x) - g_j(x)\big|}_{\leq \|f_j - g_j\|_\infty}\big)^2 \leq \sum_{j=1}^{s_2} \|f_j - g_j\|_\infty{}^2\,,$$

woraus man

$$\|f-\widetilde{g}\|_\infty{}^2 \leq \sum_{j=1}^{s_2} \|f_j - g_j\|_\infty{}^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

erhält. Daraus ergibt sich $\|f-\widetilde{g}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere gilt wegen $\|\widetilde{g}\|_\infty - \|f\|_\infty \leq \|f-\widetilde{g}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, dass

$$\|\widetilde{g}\|_\infty \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq R} + \frac{\varepsilon}{2} \leq R + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Definiere $g := \dfrac{R}{R+\frac{\varepsilon}{2}}\,\widetilde{g}$. Es ist dann g Lipschitz-stetig und es gilt $\|g\|_\infty = \frac{R}{R+\frac{\varepsilon}{2}}\,\|\widetilde{g}\|_\infty \leq \frac{R}{R+\frac{\varepsilon}{2}}\,(R+\frac{\varepsilon}{2}) = R$, und deshalb $|g(x)| \leq R$ für alle $x \in X$. Weiters gilt

$$\|\widetilde{g} - \underbrace{g}_{=\frac{R}{R+\frac{\varepsilon}{2}}\widetilde{g}}\|_\infty = \left|1 - \frac{R}{R+\frac{\varepsilon}{2}}\right| \|\widetilde{g}\|_\infty = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{R+\frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\|\widetilde{g}\|_\infty}_{\leq R+\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{R+\frac{\varepsilon}{2}}\left(R+\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Daher erhalten wir

$$\|f-g\|_\infty \leq \underbrace{\|f-\widetilde{g}\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|\widetilde{g}-g\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

womit das gewünschte Resultat bewiesen ist. $\square$