Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Proposition 1) ist, dass es für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein $\xi \in (a,b)$ gibt, sodass $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$. Letztere Eigenschaft ist offensichtlich zu $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$ äquivalent.

Proposition 1. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,.$

1. *Beweis.* Nach dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es $m_1, m_2 \in [a,b]$ mit $f(m_1) \le f(x) \le f(m_2)$ für alle $x \in [a,b]$.

1. *Fall*: $f(m_1) = f(m_2)$. In diesem Fall gilt $f(x) = f(m_1)$ für alle $x \in [a,b]$. Wähle irgendein $\xi \in (a,b)$. Dann ist

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{=f(m_1)}\,dx = \underbrace{f(m_1)}_{=f(\xi)}(b-a) = f(\xi)(b-a)\,.$$

2. *Fall*: $f(m_1) < f(m_2)$. Es ist $f(x) \ge f(m_1)$ für alle $x \in [a,b]$ und es gibt ein $x \in [a,b]$ (nämlich $x = m_2$) mit $f(x) > f(m_1)$. Deshalb ist $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b f(m_1)\,dx = f(m_1)(b-a)$, also $f(m_1) < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$. Außerdem ist $f(x) \le f(m_2)$ für alle $x \in [a,b]$ und es gibt ein $x \in [a,b]$ (nämlich $x = m_1$) mit $f(x) < f(m_2)$. Daher ist $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b f(m_2)\,dx = f(m_2)(b-a)$, und somit $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < f(m_2)$.

Die Zahl $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ liegt also zwischen $f(m_1)$ und $f(m_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a,b]$, das zwischen m_1 und m_2 liegt, mit $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$. Da $f(m_1) < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < f(m_2)$ muss $\xi \ne m_1$ und $\xi \ne m_2$ gelten. Nachdem ξ zwischen m_1 und m_2 liegt, ist daher $\xi \ne a$ und $\xi \ne b$. Somit ist $\xi \in (a,b)$ und wegen $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$. $\square$

2. *Beweis.* Wegen des 2. Punktes des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung besitzt f eine Stammfunktion, also es gibt eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf (a,b) differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ erfüllt. Nach dem Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$F(b) - F(a) = \underbrace{F'(\xi)}_{=f(\xi)}(b-a) = f(\xi)(b-a)\,.$$

Der 3. Punkt des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung besagt, dass $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ gilt. Daher ist $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a)$. $\square$

Im 1. Beweis wurde nur der 1. Punkt des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung verwendet, während im 2. Beweis alle 3 Punkte des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung verwendet wurden. Im Zuge des hier gegebenen Beweises des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung sind beide Beweise des Mittelwertsatzes der Integralrechnung korrekt. Ein anderer Beweis des 2. Punktes des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung könnte unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gegeben werden. In diesem Fall müsste der 1. Beweis des Mittelwertsatzes verwendet werden – der 2. Beweis wäre dann ein Zirkelschluss.