

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Proposition 1. Für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist $1^q = 1$.

Beweis. Sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten dann, dass $1^q = \underbrace{\sqrt[n]{1^m}}_{=1} = \sqrt[n]{1} = 1$. $\square$

Proposition 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und seien $q, r \in \mathbb{Q}$. Dann gelten:

- (1) $a^{q+r} = a^q a^r$.
- (2) $a^{q-r} = \frac{a^q}{a^r}$.
- (3) $(a^q)^r = a^{qr}$.
- (4) $(ab)^q = a^q b^q$.
- (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}$.

Beweis. Es seien $q = \frac{m_1}{n_1}$ und $r = \frac{m_2}{n_2}$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Die Funktionen $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ und $x \mapsto x^{n_1}$ sind bijektive Funktionen $(0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$.

(1) Hier ist $q + r = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \left(\underbrace{a^{q+r}}_{= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}}} \right)^{n_1 n_2} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = a^{m_1 n_2} a^{m_2 n_2} = \\ & = \left(\underbrace{a^{m_1}}_{=(\sqrt[n_1]{a^{m_1}})^{n_1}} \right)^{n_2} \left(\underbrace{a^{m_2}}_{=(\sqrt[n_2]{a^{m_2}})^{n_2}} \right)^{n_1} = \left(\underbrace{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}}_{=a^q} \right)^{n_1 n_2} \left(\underbrace{\sqrt[n_2]{a^{m_2}}}_{=a^r} \right)^{n_1 n_2} = (a^q a^r)^{n_1 n_2}. \end{aligned}$$

Nachdem $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ bijektiv ist, ergibt sich daraus, dass $a^{q+r} = a^q a^r$ gilt.

(2) Da $a^{q-r} a^r \underset{\text{wegen (1)}}{=} a^{q-r+r} = a^q$, ergibt sich, dass $a^{q-r} = \frac{a^q}{a^r}$ gilt.

(3) Es ist $qr = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$ und deshalb

$$\begin{aligned} ((a^q)^r)^{n_1 n_2} &= \left(\left(\underbrace{(a^q)^r}_{= \sqrt[n_2]{(a^q)^{m_2}}} \right)^{n_2} \right)^{n_1} = \left(\underbrace{\left(\sqrt[n_2]{(a^q)^{m_2}} \right)^{n_2}}_{=(a^q)^{m_2}} \right)^{n_1} = ((a^q)^{m_2})^{n_1} = \\ &= (a^q)^{m_2 n_1} = \left(\left(\underbrace{a^q}_{= \sqrt[n_1]{a^{m_1}}} \right)^{n_1} \right)^{m_2} = \left(\underbrace{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}} \right)^{n_1}}_{=a^{m_1}} \right)^{m_2} = (a^{m_1})^{m_2} = \\ &= \underbrace{a^{m_1 m_2}}_{\left(\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}} \right)^{n_1 n_2}} = \left(\underbrace{\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}}}_{=a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = a^{qr}} \right)^{n_1 n_2} = (a^{qr})^{n_1 n_2}. \end{aligned}$$

Weil $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ bijektiv ist, folgt daraus, dass $(a^q)^r = a^{qr}$ gilt.

(4) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left(\underbrace{(ab)^q}_{= \sqrt[n_1]{(ab)^{m_1}}} \right)^{n_1} &= \left(\sqrt[n_1]{(ab)^{m_1}} \right)^{n_1} = (ab)^{m_1} = \underbrace{a^{m_1}}_{= (\sqrt[n_1]{a^{m_1}})^{n_1}} \underbrace{b^{m_1}}_{= (\sqrt[n_1]{b^{m_1}})^{n_1}} = \\ &= \left(\underbrace{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}}_{= a^q} \right)^{n_1} \left(\underbrace{\sqrt[n_1]{b^{m_1}}}_{= b^q} \right)^{n_1} = (a^q)^{n_1} (b^q)^{n_1} = (a^q b^q)^{n_1}. \end{aligned}$$

Da $x \mapsto x^{n_1}$ bijektiv ist, ergibt sich, dass $(ab)^q = a^q b^q$ gilt.

(5) Wegen $\left(\frac{a}{b}\right)^q b^q = \left(\frac{a}{b}\right)^q = a^q$ erhalten wir $\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}$. □

Proposition 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und sei $q \in \mathbb{Q}$.

(1) Falls $q > 0$ ist, dann gilt $0 < a^q < b^q$.

(2) Falls $q < 0$ ist, dann gilt $a^q > b^q > 0$.

Beweis. (1) Es sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen $q > 0$ ist $m > 0$. Daher ist $0 < a^m < b^m$, und deshalb $0 < \underbrace{\sqrt[n]{a^m}}_{= a^q} < \underbrace{\sqrt[n]{b^m}}_{= b^q}$. Somit ist $0 < a^q < b^q$.

(2) Da $q < 0$ ist, gilt $-q > 0$. Wegen (1) gilt daher $0 < a^{-q} < b^{-q}$. Es ist $a^{-q} = a^{0-q} = \frac{a^0}{a^q} = \frac{1}{a^q}$, und deshalb auch $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$. Also ist $0 < \frac{1}{a^q} < \frac{1}{b^q}$, woraus sich $a^q > 0$, $b^q > 0$ und $b^q < a^q$ ergeben. □

Proposition 4. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und seien $q, r \in \mathbb{Q}$ mit $q < r$.

(1) Falls $a > 1$ ist, dann gilt $a^q < a^r$.

(2) Falls $a < 1$ ist, dann gilt $a^q > a^r$.

Beweis. (1) Da $q < r$ gilt, ist $r - q > 0$. Aus $a > 1$ folgt wegen (1) von Proposition 3, dass $1^{r-q} < a^{r-q}$. Nach Proposition 1 ist $1^{r-q} = 1$, und aus (2) von Proposition 2 folgt, dass $a^{r-q} = \frac{a^r}{a^q}$ gilt. Somit erhalten wir $1 = 1^{r-q} < a^{r-q} = \frac{a^r}{a^q}$, woraus sich $a^q < a^r$ ergibt.

(2) Aus $0 < a < 1$ folgt, dass $\frac{1}{a} > 1$ gilt. Wegen (1) erhält man $\left(\frac{1}{a}\right)^q < \left(\frac{1}{a}\right)^r$. Es ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^q \underset{\text{nach (5) von Proposition 2}}{=} \frac{1^q}{a^q} \underset{\text{wegen Proposition 1}}{=} \frac{1}{a^q},$$

und daher auch $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$. Das ergibt $\frac{1}{a^q} < \frac{1}{a^r}$, und da $a^q > 0$ und $a^r > 0$ gelten, erhalten wir daraus $a^r < a^q$. □

Potenzfunktionen mit reellen Exponenten

Proposition 5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- (1) $a^{x+y} = a^x a^y$.
- (2) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
- (3) $(ab)^x = a^x b^x$.
- (4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Beweis. Es seien $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = y$. Dann ist auch $(q_n + r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n + r_n) = x + y$.

(1) Weil $(q_n + r_n) \rightarrow x + y$ erhalten wir

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a^{q_n + r_n}}_{= a^{q_n} a^{r_n} \text{ (wegen (1) von Proposition 2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a^{q_n}}_{\rightarrow a^x} \underbrace{a^{r_n}}_{\rightarrow a^y} = a^x a^y.$$

(2) Aus $a^{x-y} a^y = a^{x-y+y} = a^x$, erhalten wir $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

(3) Es ist

$$(ab)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(ab)^{q_n}}_{= a^{q_n} b^{q_n} \text{ (wegen (4) von Proposition 2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a^{q_n}}_{\rightarrow a^x} \underbrace{b^{q_n}}_{\rightarrow b^x} = a^x b^x.$$

(4) Weil $\left(\frac{a}{b}\right)^x b^x = \left(\frac{a}{b} b\right)^x = a^x$ ergibt sich $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$. □

Lemma 1. Seien $a, x \in \mathbb{R}$. Wenn $a > 1$ und $x > 0$ gelten, dann ist $a^x > 1$.

Beweis. Nachdem $x > 0$ und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q < x$. Wegen (1) von Proposition 3 ist $a^q > 1^q =$ nach Proposition 1 1 . Da $a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$ ist $a^x \geq a^q > 1$. □

Proposition 6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und sei $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Falls $x > 0$ ist, dann gilt $0 < a^x < b^x$.
- (2) Falls $x < 0$ ist, dann gilt $a^x > b^x > 0$.

Beweis. (1) Wegen $0 < a < b$ ist $\frac{b}{a} > 1$. Nach Lemma 1 ist

$$1 < \left(\frac{b}{a}\right)^x \underset{\text{nach (4) von Proposition 5}}{=} \frac{b^x}{a^x}.$$

Weil $a^x > 0$ ist, erhält man daraus, dass $a^x < b^x$ gilt.

(2) Da $x < 0$ ist, erhalten wir $-x > 0$. Nach (1) gilt $0 < a^{-x} < b^{-x}$. Es ist $a^{-x} = a^{0-x} \underset{\text{wegen (2) aus Proposition 5}}{=} \frac{a^0}{a^x} = \frac{1}{a^x}$, und somit auch $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$. Daher ist $0 < \frac{1}{a^x} < \frac{1}{b^x}$. Wegen $a^x > 0$, $b^x > 0$ erhalten wir daraus $b^x < a^x$. $\square$

Proposition 7. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

(1) Falls $a > 1$ ist, dann gilt $a^x < a^y$.

(2) Falls $a < 1$ ist, dann gilt $a^x > a^y$.

Beweis. (1) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Weil $a > 1$ ist, gilt nach Lemma 1, dass $1 < a^{y-x} \underset{\text{nach (2) von Proposition 5}}{=} \frac{a^y}{a^x}$. Daraus erhält man wegen $a^x > 0$, dass $a^x < a^y$ gilt.

(2) Nachdem $0 < a < 1$ ist, gilt $\frac{1}{a} > 1$. Wegen (1) ergibt sich $\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y$. Es ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x \underset{\text{nach (4) von Proposition 5}}{=} \frac{\overbrace{1^x}^{=1}}{a^x} = \frac{1}{a^x},$$

und deshalb auch $\left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y}$. Also ist $\frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y}$. Weil $a^x > 0$ und $a^y > 0$, erhält man daraus $a^y < a^x$. $\square$