Satz 1. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine absolut konvergente Reihe, und sei* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine bijektive Funktion. Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Beweis. Setze $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ und $B := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N_0, sodass

$$|A - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |B - B_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N_0$ gilt. Setze $N := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(N_0)\}$. Sei $n \geq N$. Definiere $r := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Dann gilt

$$\Bigg|A - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}}_{=\sum_{k=1}^{N_0} a_k + \sum_{\substack{k=1 \\ \sigma(k)>N_0}}^{n} a_{\sigma(k)}}\Bigg| \leq \underbrace{|A - A_{N_0}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ \sigma(k)>N_0}}^{n} |a_{\sigma(k)}|}_{\leq \sum_{k=N_0+1}^{r} |a_k|} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\sum_{k=N_0+1}^{r} |a_k|}_{=B_r - B_{N_0}} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{|B - B_r|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|B - B_{N_0}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \ .$$

Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$. □

Satz 2. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine bedingt konvergente Reihe, und weiters sei* $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Dann gibt es eine bijektive Funktion* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *sodass* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$ *gilt.*

Beweisidee. Sei $J_1 := \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ und $J_2 := \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in J_1} a_n + \sum_{n \in J_2} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n \in J_1} a_n - \sum_{n \in J_2} a_n$. Wären sowohl $\sum_{n \in J_1} a_n$ als auch $\sum_{n \in J_2} a_n$ konvergent, dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent. Falls eine dieser Reihen konvergent und die andere divergent wäre, dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Also müssen sowohl $\sum_{n \in J_1} a_n$ als auch $\sum_{n \in J_2} a_n$ divergent sein. Weiters ist $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, weil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Wähle jetzt so lange Indizes aus J_1, bis die Summe größer als r ist (bzw. gr̈ßer als 1 im Fall $r = +\infty$, bzw. 0 im Fall $r = -\infty$). Dann wähle so lange

Indizes aus J_2 bis die Summe kleiner als r ist (bzw. 0, bzw. -2), dann wieder so lange aus J_1 bis die Summe größer als r ist (bzw. 3, bzw. -1), und so weiter. Damit erhalten wir eine Umordnung, die gegen r konvergiert. $\square$

Satz 3. *Seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen. Dann ist das Cauchyprodukt* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *mit* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) .$$

Beweis. Setze $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $R_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ und $R := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ und $S := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ und $D_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}|$$

und

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \underbrace{\sum_{j=0}^{n-k} |b_j|}_{=S_{n-k} \leq S} \leq S \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |a_k|}_{=R_n \leq R} \leq RS .$$

Daher ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, und deshalb konvergiert diese Folge. Setze $D := \lim_{n\to\infty} D_n$. Wegen $|c_n| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}|$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ nach dem Majorantentest, also $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut. Setze $C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} A_n B_n = AB$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|C - C_n| < \frac{\varepsilon}{4} , \quad |AB - A_n B_n| < \frac{\varepsilon}{4} , \quad \text{und} \quad |D - D_n| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle $n \geq N$. Sei $n \geq N$. Dann ist

$$|C - AB| \leq \underbrace{|C - C_n|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + |C_n - A_n B_n| + \underbrace{|A_n B_n - AB|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \Bigg| \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}}_{=\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j} - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right)}_{=\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j} \Bigg| = \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} a_k b_j \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} |a_k||b_j|}_{\underbrace{\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|}_{=D_{2n}-D_n}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|D_{2n} - D|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|D - D_n|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon \,.$$

Somit ist $C = AB$. □