Laurentreihen und Singularitäten

Wichtig: Zu jeder Laurentreihe das Konvergenzgebiet angeben!

Wichtig: Ob man eine Laurentreihe verwenden kann um damit Singularitäten klassifizieren und Residuen berechnen zu können hängt vom Konvergenzgebiet ab! Um mit einer Laurentreihe die Art der Singularität in z_0 zu bestimmen oder das Residuum in z_0 zu berechnen muss das Konvergenzgebiet von der Form $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ für ein $R > 0$ ($R = \infty$ ist zugelassen) sein! Es darf also **nicht** von der Form $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ mit $r > 0$ sein!

Besteht das Konvergenzgebiet einer Laurentreihe aus allen komplexen Zahlen außer z_0, so kann man es folgendermaßen schreiben:
1. $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
2. $\{z \in \mathbb{C} : z \neq z_0\}$. (schlampiger: $z \neq z_0$).
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > 0\}$. (schlampiger: $|z - z_0| > 0$).
4. $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \infty\}$. (schlampiger: $0 < |z - z_0| < \infty$).

Dabei wird man normalerweise die schlampigere Schreibweise (die ja genau so aussagekräftig ist) wählen. Welche der 4 Formen man wählt ist im Prinzip egal, man muss sich nur merken, dass sie zur 4. Form ($0 < |z - z_0| < \infty$) äquivalent ist, und daher **geeignet** ist, um damit die Art der Singularität in z_0 festzustellen und das Residuum in z_0 zu bestimmen.

Beispiel 1: Die Funktion f sei durch $f(z) := \dfrac{\sin(3z^2)}{z^2}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Bestimme $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

d) Berechne $\operatorname{Res}(f, 0)$.

Lösung: Wegen $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von $3z^2$ in diese Reihe, dass $\sin(3z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{4n+2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Durch Dividieren durch z^2 erhalten wir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{4n} =$$
$$= 3 - \frac{27}{6} z^4 + \frac{3^5}{5!} z^8 - \frac{3^7}{7!} z^{12} + \frac{3^9}{9!} z^{16} - \ldots$$

Konvergenzgebiet: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Das ist die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 0 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 0 geeignet, weil das Konvergenzgebiet als $0 < |z| < \infty$ geschrieben werden kann.

b) Die Laurentreihe aus a) besitzt nur positive Potenzen (auf das was oben steht kommt es an, nicht auf die Koeffizienten!), daher ist 0 eine hebbare Singularität von f.

c) Wegen b) gilt $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = a_0 = 3$ (a_0 ist der Koeffizient von $(z - z_0)^0$).

d) ($\mathrm{Res}(f, 0) = a_{-1}$, a_{-1} ist der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$). Aus der Laurentreihe in a) sieht man $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$. □

Beispiel 2: Die Funktion f sei durch $f(z) := \dfrac{\cos(z^3) - 1}{z}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Bestimme $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

d) Berechne $\mathrm{Res}(f, 0)$.

Lösung: Wegen $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von z^3 in diese Reihe, dass $\cos(z^3) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} - 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Durch Dividieren durch z erhalten wir:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n-1} =$$
$$= -\frac{1}{2} z^5 + \frac{1}{24} z^{11} - \frac{1}{6!} z^{17} + \frac{1}{8!} z^{23} - \frac{1}{10!} z^{29} + \ldots$$

Konvergenzgebiet: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Das ist die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 0 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 0 geeignet, weil das Konvergenzgebiet als $0 < |z| < \infty$ geschrieben werden kann.

b) Die Laurentreihe aus a) besitzt nur positive Potenzen, daher ist 0 eine hebbare Singularität von f.

c) Wegen b) gilt $\lim_{z\to 0} f(z) = a_0 = 0$.

d) Aus der Laurentreihe in a) sieht man $\operatorname{Res}(f,0) = 0$. □

Beispiel 3: Die Funktion f sei durch $f(z) := e^{\frac{1}{z}}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Bestimme $\lim_{z\to 0} f(z)$.

d) Berechne $\operatorname{Res}(f,0)$.

Lösung: Wegen $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von $\frac{1}{z}$ in diese Reihe, dass $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ für alle $z \neq 0$ gilt. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} + \dots \\ &\quad \text{Konvergenzgebiet: } \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Das ist die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 0 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 0 geeignet, weil das Konvergenzgebiet als $0 < |z| < \infty$ geschrieben werden kann.

b) Die Laurentreihe aus a) besitzt unendlich viele negative Potenzen, daher ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

c) Wegen b) existiert $\lim_{z\to 0} f(z)$ nicht. Die Funktion f nimmt in jeder Umgebung von 0 alle komplexen Zahlen mit Ausnahme von höchstens einer unendlich oft an.

d) Aus der Laurentreihe in a) sieht man $\operatorname{Res}(f,0) = 1$. □

Beispiel 4: Die Funktion f sei durch $f(z) := \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Bestimme $\lim_{z\to 0} f(z)$.

d) Berechne $\operatorname{Res}(f, 0)$.

LÖSUNG: Wegen $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von $\frac{1}{z}$ in diese Reihe, dass $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ für alle $z \neq 0$ gilt. Durch Dividieren durch z^2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n-2} = \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^6} + \ldots \\ &\quad \text{Konvergenzgebiet: } \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Das ist die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 0 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 0 geeignet, weil das Konvergenzgebiet als $0 < |z| < \infty$ geschrieben werden kann.

b) Die Laurentreihe aus a) besitzt unendlich viele negative Potenzen, daher ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

c) Wegen b) existiert $\lim_{z\to 0} f(z)$ nicht. Die Funktion f nimmt in jeder Umgebung von 0 alle komplexen Zahlen mit Ausnahme von höchstens einer unendlich oft an.

d) Aus der Laurentreihe in a) sieht man $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. □

Beispiel 5: Die Funktion f sei durch $f(z) := z^5 e^{\frac{1}{z}}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Bestimme $\lim_{z\to 0} f(z)$.

d) Berechne $\operatorname{Res}(f, 0)$.

Lösung: Wegen $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von $\frac{1}{z}$ in diese Reihe, dass $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ für alle $z \neq 0$ gilt. Durch Multiplizieren mit z^5 erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n} &= z^5 + z^4 + \frac{1}{2!} z^3 + \frac{1}{3!} z^2 + \\ &+ \frac{1}{4!} z + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \frac{1}{z} + \frac{1}{7!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{8!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{9!} \frac{1}{z^4} + \dots \\ &\text{Konvergenzgebiet: } \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Das ist die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 0 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 0 geeignet, weil das Konvergenzgebiet als $0 < |z| < \infty$ geschrieben werden kann.

b) Die Laurentreihe aus a) besitzt unendlich viele negative Potenzen, daher ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

c) Wegen b) existiert $\lim_{z \to 0} f(z)$ nicht. Die Funktion f nimmt in jeder Umgebung von 0 alle komplexen Zahlen mit Ausnahme von höchstens einer unendlich oft an.

d) Aus der Laurentreihe in a) sieht man $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. □

Beispiel 6: Die Funktion f sei durch $f(z) := \dfrac{7z - 51}{z^2 - 12z + 27}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 3, bei der 10 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 3, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

c) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 3?

d) Bestimme $\lim_{z \to 3} f(z)$.

e) Berechne $\operatorname{Res}(f, 3)$.

Lösung: Die Partialbruchzerlegung von f liefert

$$f(z) = \frac{5}{z-3} + \frac{2}{z-9}.$$

Man schreibt

$$\frac{2}{z-9} = \frac{2}{(z-3) - 6}.$$

Jetzt kann man auf zwei Arten weiterrechnen:

1. $\frac{2}{z-9} = \frac{2}{(z-3)-6} = -\frac{2}{6}\frac{1}{1-(\frac{z-3}{6})}$. Aus der geometrischen Reihe erhalten wir für $\left|\frac{z-3}{6}\right| < 1 \iff |z-3| < 6$, dass $\frac{2}{z-9} = -\frac{2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{6^{n+1}}(z-3)^n$. Durch Addieren von $\frac{5}{z-3}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{5}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{6^{n+1}}(z-3)^n = \\ &= \frac{5}{z-3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{18}(z-3) - \frac{2}{6^3}(z-3)^2 - \frac{2}{6^4}(z-3)^3 - \frac{2}{6^5}(z-3)^4 - \ldots \\ &\quad \text{Konvergenzgebiet: } 0 < |z-3| < 6. \end{aligned}$$

Wegen $0 < |0-3| = 3 < 6$ ist das die Lösung von b). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 3 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 3 geeignet, weil das Konvergenzgebiet $0 < |z-3| < 6$ ist.

2. $\frac{2}{z-9} = \frac{2}{(z-3)-6} = \frac{2}{z-3}\frac{1}{1-(\frac{6}{z-3})}$. Aus der geometrischen Reihe erhalten wir für $\left|\frac{6}{z-3}\right| < 1 \iff |z-3| > 6$, dass $\frac{2}{z-9} = \frac{2}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{z-3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 6^n\frac{1}{(z-3)^{n+1}} = \frac{2}{(z-3)} + \frac{12}{(z-3)^2} + \frac{72}{(z-3)^3} + \frac{432}{(z-3)^4} + \frac{2592}{(z-3)^5} + \ldots$. Durch Addieren von $\frac{5}{z-3}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{7}{z-3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 6^n(z-3)^{-n-1} = \\ &= \frac{7}{z-3} + \frac{12}{(z-3)^2} + \frac{72}{(z-3)^3} + \frac{432}{(z-3)^4} + \frac{2592}{(z-3)^5} + \ldots \\ &\quad \text{Konvergenzgebiet: } 6 < |z-3|. \end{aligned}$$

Wegen $6 < |10-3| = 7$ ist das die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist **nicht** zum Feststellen welche Art von Singularität in 3 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 3 geeignet, weil das Konvergenzgebiet $6 < |z-3|$ ist!

c) Die Laurentreihe aus b) besitzt die Potenz -1 und sonst nur höhere Potenzen, daher ist 3 ein Pol 1. Ordnung von f.

d) Wegen c) gilt $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$.

e) Aus der Laurentreihe in b) sieht man $\operatorname{Res}(f,3) = 5$. □

Beispiel 7: Die Funktion f sei durch $f(z) := \dfrac{3z^2 + 212z - 8740}{z^3 - 38z^2 - 527z + 23064}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 31, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 31, bei der 100 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

c) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 31?

d) Bestimme $\lim_{z\to 31} f(z)$.

e) Berechne $\operatorname{Res}(f,31)$.

LÖSUNG: Die Partialbruchzerlegung von f liefert

$$f(z)=\frac{7}{z-31}+\frac{13}{(z-31)^2}-\frac{4}{z+24}.$$

Man schreibt

$$\frac{-4}{z+24}=\frac{-4}{(z-31)+55}.$$

Jetzt kann man auf zwei Arten weiterrechnen:

1. $\frac{-4}{z+24}=\frac{-4}{(z-31)+55}=-\frac{4}{55}\frac{1}{1-(-\frac{z-31}{55})}$. Aus der geometrischen Reihe erhalten wir für $\left|-\frac{z-31}{55}\right|<1 \iff |z-31|<55$, dass $\frac{-4}{z+24}=-\frac{4}{55}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-31}{55}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{55^{n+1}}(z-31)^n$. Durch Addieren von $\frac{7}{z-31}+\frac{13}{(z-31)^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{13}{(z-31)^2}+\frac{7}{z-31}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{55^{n+1}}(z-31)^n=\\&=\frac{13}{(z-31)^2}+\frac{7}{z-31}-\frac{4}{55}+\frac{4}{3025}(z-31)-\frac{4}{55^3}(z-31)^2+\\&\qquad+\frac{4}{55^4}(z-31)^3-\frac{4}{55^5}(z-31)^4+\dots\end{aligned}$$

Konvergenzgebiet: $0<|z-31|<55$.

Wegen $0<|0-31|=31<55$ ist das die Lösung von a). Diese Laurentreihe ist zum Feststellen welche Art von Singularität in 31 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 31 geeignet, weil das Konvergenzgebiet $0<|z-31|<55$ ist.

2. $\frac{-4}{z+24}=\frac{-4}{(z-31)+55}=\frac{-4}{z-31}\frac{1}{1-(-\frac{55}{z-31})}$. Wegen der geometrischen Reihe erhalten wir dann für $\left|-\frac{55}{z-31}\right|<1 \iff |z-31|>55$, dass $\frac{-4}{z+24}=\frac{-4}{z-31}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{55}{z-31}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 4\cdot 55^n\frac{1}{(z-31)^{n+1}}=-\frac{4}{z-31}+\frac{220}{(z-31)^2}-\frac{12100}{(z-31)^3}+\frac{4\cdot 55^3}{(z-31)^4}-\frac{4\cdot 55^4}{(z-31)^5}+\frac{4\cdot 55^5}{(z-31)^6}-\dots$. Durch Addieren von $\frac{7}{z-31}+\frac{13}{(z-31)^2}$

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{3}{z-31} + \frac{233}{(z-31)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot 55^n (z-31)^{-n-1} = \\
&= \frac{3}{z-31} + \frac{233}{(z-31)^2} - \frac{12100}{(z-31)^3} + \\
&\quad + \frac{4 \cdot 55^3}{(z-31)^4} - \frac{4 \cdot 55^4}{(z-31)^5} + \frac{4 \cdot 55^5}{(z-31)^6} - \dots \\
&\quad \text{Konvergenzgebiet: } 55 < |z-31|.
\end{aligned}$$

Wegen $55 < |100 - 31| = 69$ ist das die Lösung von b). Diese Laurentreihe ist **nicht** zum Feststellen welche Art von Singularität in 31 vorliegt und zum Berechnen des Residuums in 31 geeignet, weil das Konvergenzgebiet $55 < |z - 31|$ ist!

c) Die Laurentreihe aus a) besitzt die Potenz -2 und sonst nur höhere Potenzen, daher ist 31 ein Pol 2. Ordnung von f.

d) Wegen c) gilt $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$.

e) Aus der Laurentreihe in b) sieht man $\mathrm{Res}(f, 31) = 7$. □