Der Satz von Taylor

Wir wollen eine Funktion f durch ein Polynom p „approximieren“. Dabei sollen an der Stelle x_0 der Funktionswert, sowie alle Ableitungen bis zur n-ten mit denjenigen der Funktion übereinstimmen. Man kann sich überlegen, dass $p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ gelten muss. Den entstehenden Fehler definieren wir als $R_n(x, x_0) := f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$, und daher erhalten wir $f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + R_n(x, x_0)$. Es ist jetzt wichtig für dieses sogenannte Restglied $R_n(x, x_0)$ eine Darstellung anzugeben, mit deren Hilfe es abgeschätzt werden kann. Diese Resultate werden der Satz von Taylor genannt.

Für drei reelle Zahlen x_1, x_2 und y sagen wir, dass y zwischen x_1 und x_2 liegt, falls $x_1 < y < x_2$ im Fall $x_1 < x_2$, $x_2 < y < x_1$ im Fall $x_2 < x_1$ und $y = x_1 = x_2$ im Fall $x_1 = x_2$ gilt.

Proposition 1. *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es für jedes $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x und x_0, sodass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

gilt (also $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$).

Beweis. Für $x = x_0$ ist die behauptete Formel offensichtlich richtig. Deshalb nehmen wir im Folgenden $x \neq x_0$ an. Fixiere $x \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$. Definiere für $y \in (a, b)$ die Funktionen g und h durch $g(y) := R_n(x, y) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x - y)^j$ und $h(y) := (x - y)^{n+1}$. Die Funktionen g und h sind stetig. Es gelten $g(x_0) = R_n(x, x_0)$ und $g(x) = 0$. Weiters ist

$$g'(y) = -\frac{f'(y)}{0!} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x - y)^j + \underbrace{\frac{f^{(j)}(y)}{j!} j(x - y)^{j-1}(-1)}_{= -\frac{f^{(j)}(y)}{(j-1)!}(x-y)^{j-1}} \right) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x - y)^j - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x - y)^n + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(y)}{(j-1)!}(x - y)^{j-1}}_{= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x-y)^j} =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x - y)^n.$$

Außerdem gelten $h(x_0) = (x - x_0)^{n+1} \neq 0$, $h(x) = 0$ und $h'(y) = (n+1)(x - y)^n(-1) = -(n+1)(x-y)^n \neq 0$ für alle $y \neq x$. Nach dem Verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit $\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$. Es ist

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{0 - R_n(x, x_0)}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

und

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} .$$

Daraus erhalten wir $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. □

Eine andere Darstellung des Restgliedes erhält man mit Integralen. Wir formulieren und beweisen dieses Resultat der Vollständigkeit halber an dieser Stelle, obwohl Integrale eigentlich erst später besprochen werden.

Proposition 2. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$, sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in (a, b)$. Für jedes $x \in (a, b)$ gilt dann, dass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt$$

(also $R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$).

Beweis. Wir beweisen dieses Resultat durch Induktion nach n. Im Fall $n = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, dass

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \dot{f}(t) \, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\dot{f}(t)}{0!}(x - t)^0 \, dt ,$$

womit die gewünschte Formel in diesem Fall gezeigt ist.

Jetzt sei $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \, dt .$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\underbrace{(x-t)^{n-1}}_{\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right)^{\cdot}} dt = -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt =$$

$$= 0 - \left(-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt .$$

Somit ist $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$. □