1.3.

VO ANGEWANDTE MATHEMATIK

I. Lineare Gleichungen und Polynome

II. Differenzialgleichungen

III. Fourierreihen

IV. Weitere numerische Verfahren

EINLEITUNG

$f(x)$, $f'(x)$, $(e^x)' = e^x$, $x' = 1$

$x(t)$, $\dot{x}(t)$ 1. Ableitung

f'', $\ddot{x}$ $\qquad f^{(4)}, x^{(4)}$

Satz Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt eine differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann $\dot{x}(t) = a x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, wenn $\exists c \in \mathbb{R}$, sodass $x(t) = ce^{at}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. (bzw. $\dot{x} = ax \Leftrightarrow \exists c: x(t) = ce^{at}$)

<u>Beweis:</u>

$(\Leftarrow)$: $x(t) = ce^{at} \Rightarrow \dot{x}(t) = \underbrace{ce^{at}}_{=x(t)} \cdot a = a x(t)$

$(\Rightarrow)$: Setze $y(t) := x(t)\, e^{-at}$.

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)\, e^{-at} + x(t) e^{-at} \cdot (-a) = \underbrace{e^{-at} \cdot (\underbrace{\dot{x}(t)}_{=ax(t)} - ax(t))}_{=0} = 0 \Rightarrow y \text{ ist konstant}$$

Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists c: c = y(t) = x(t) e^{-at} \Rightarrow x(t) = ce^{at}$ $\square$

<u>Ist König Arthur an dem Tisch in Winchester gesessen?</u>

Alter bestimmen, C^{14}-Methode

Falls König Arthur wirklich gelebt hat, dann im 5./6. Jahrhundert.

radioaktiver Zerfall: $\dot{x} = -kx$ $(k > 0)$ $\Rightarrow x(t) = ce^{-kt}$

bei C^{14}: $k \approx 1{,}245 \cdot 10^{-4} / \text{Jahr}$

frisch gefällter Baum: 6,68
Tisch in Winchester (1976): 6,08

$$x(0) = c, \quad \frac{x(0)}{x(t)} = \frac{c}{ce^{-kt}} = \boxed{e^{kt} = \frac{6{,}68}{6{,}08}}$$

$$\Rightarrow kt = \log \frac{6{,}68}{6{,}08} \quad \Rightarrow t = \frac{1}{k} \cdot \log \frac{6{,}68}{6{,}08} \approx 756 \text{ Jahre}$$

Also stammt der Tisch aus dem 12./13. Jahrhundert, König Arthur ist nie an diesem Tisch gesessen.

König Arthur (Waliser) kämpft gegen England

$x(t)$ ... Mann/Frau der Armee von König Arthur
$y(t)$ ... Mann/Frau der Armee Englands

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{8} y(t) \qquad x(0) = 8000$$
$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{2} x(t) \qquad y(0) = 15000$$

System von Differenzialgleichungen, gekoppelte Differenzialgleichung

- $2\times$ 1. Gleichung + 2. Gleichung: $(2x+y)^\cdot = -\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}(y+2x)$

also $(2x+y)^\cdot = -\frac{1}{4}(2x+y) \Rightarrow 2x+y = c_1 e^{-\frac{1}{4}t}$

$t=0$: $c_1 = 2x(0) + y(0) = 31000 \Rightarrow 2x+y = 31000\, e^{-\frac{1}{4}t}$

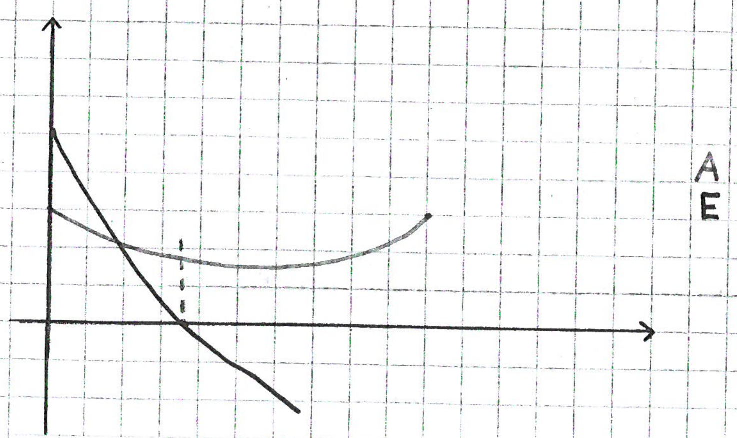
- $2\times$ 1. Gleichung − 2. Gleichung: $(2x-y)^\cdot = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(-y+2x)$

also $(2x-y)^\cdot = \frac{1}{4}(2x-y) \Rightarrow 2x-y = c_2 e^{\frac{1}{4}t}$

$t=0$: $c_2 = 2x(0) - y(0) = 1000 \Rightarrow 2x-y = 1000\, e^{\frac{1}{4}t}$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} & 2x - y = 1000\, e^{\frac{1}{4}t} \\ + & 2x + y = 31000\, e^{-\frac{1}{4}t} \\ \hline & 4x = 31000\, e^{-\frac{1}{4}t} + 1000\, e^{\frac{1}{4}t} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(t) = 7750\, e^{-\frac{1}{4}t} + 250\, e^{\frac{1}{4}t} \\ y(t) = 15000\, e^{-\frac{1}{4}t} + 500\, e^{\frac{1}{4}t} \end{array}}$$



$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} y \\ -\frac{1}{2} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir haben die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisiert.

Also Eigenwerte und (Eigenvektoren) bestimmen.

$$p(x) = \det(A - x\,id) = \det \begin{pmatrix} -x & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & -x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{1}{16},$$

$$0 = p(x) = x^2 - \frac{1}{16} \iff x = \pm \frac{1}{4}$$

- **1. Methode: Eigenvektor**

Eigenvektor zu $\frac{1}{4}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $-\frac{1}{4}$: $\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x(t) = x_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ... Linearkombination

$$\dot{x}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \dot{x}_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dot{x}(t) = A \underbrace{x(t)}_{= x_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = x_1(t) \underbrace{A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} + x_2(t) \underbrace{A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{4} x_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} x_2(t) ($$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{1}{4} x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{4} x_2(t)$$

(bez. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ hat Matrix A die Gestalt $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$)

$$\Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{\frac{1}{4}t},\quad x_2(t) = c_2 e^{-\frac{1}{4}t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

... dafür muss die Matrix diagonalisierbar sein (bei 2×2: 2 verschiedene Eigenwerte haben)

$$\begin{pmatrix} 8\,000 \\ 15\,000 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem lösen: $x(t) = e^{\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 250 \\ -500 \end{pmatrix} + e^{-\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 7\,750 \\ 15\,500 \end{pmatrix}$

- **2. Methode:**

Lösung: $x(t) = e^{\frac{1}{4}t} v_1 + e^{-\frac{1}{4}t} v_2$

$\begin{pmatrix} 8\,000 \\ 15\,000 \end{pmatrix} = x(0) = v_1 + v_2$ ... 1. Gleichung

Ableitung berechnen: $\dot{x}(t) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}t} v_1 - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} v_2$

$\dot{x}(0) = \frac{1}{4} v_1 - \frac{1}{4} v_2$

$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x}(0) = A x(0)$

$$\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{x(0)}_{= \begin{pmatrix} 8000 \\ 15000 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1875 \\ -4000 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4} v_1 - \frac{1}{4} v_2 = \begin{pmatrix} -1875 \\ -4000 \end{pmatrix}$ ... 2. Gleichung

1. Gleichung + 4 × 2. Gleichung: $2v_1 = \begin{pmatrix} 8000 \\ 15000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7500 \\ -16000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -1000 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 250 \\ -500 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 7750 \\ 15500 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x(t) = e^{\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 250 \\ -500 \end{pmatrix} + e^{-\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 7750 \\ 15500 \end{pmatrix}$

Beispiel:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} \underset{\binom{x}{y}}{x}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte berechnen: $p(x) = \det(A - x\,\mathrm{id}) = \det \begin{pmatrix} 9-x & -10 \\ -10 & -12-x \end{pmatrix} = (9-x)(-12-x) - (-10)(-10) =$

„charakteristisches Polynom"

$= -108 + 12x - 9x + x^2 - 100 = x^2 + 3x - 208$

$x^2 + 3x - 208 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{9}{4} + 208}}_{= \frac{29}{2}} = -16, 13$

Eigenwerte: $-16, 13$

- 1. Methode:

Eigenvektoren: -16: $\left(\begin{array}{cc|c} 25 & -10 & 0 \\ -10 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{:5,\ :2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 0 \\ \cancel{-5} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \overset{\text{da } A \text{ symmetrisch}}{\Longrightarrow} v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x(t) = c_1 e^{-16t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{13t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gauß-Verfahren: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2 \times 2.\text{Zeile} - 5 \times 1.\text{Zeile}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 7 \\ 0 & -29 & -29 \end{array}\right) \rightarrow c_2 = 1 \rightarrow c_1 = 1$

$x(t) = e^{-16t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + e^{13t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

- 2. Methode:

$x(t) = e^{-16t} v_1 + e^{13t} v_2$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = x(0) = v_1 + v_2$ ... 1. Gleichung

$\dot{x}(t) = -16 e^{-16t} v_1 + 13 e^{13t} v_2 \Rightarrow \dot{x}(0) = -16 v_1 + 13 v_2$

$\dot{x}(0) = A x(0) = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -106 \end{pmatrix}$, also: $-16 v_1 + 13 v_2 = \begin{pmatrix} 33 \\ -106 \end{pmatrix}$ ... 2. Gleichung

16 × 1. Gleichung + 2. Gleichung: $29 v_2 = \begin{pmatrix} 145 \\ -58 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = e^{-16t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + e^{13t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

I. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND POLYNOME

1, Gauß-Verfahren

Beispiel Marssonde:

2 Tests ergeben:
$$3\,814\cdot 10^{-4}x_1 + 0{,}7128\,x_2 = 8{,}586$$
$$0{,}1872\,x_1 + 0{,}1626\,x_2 = 9{,}612$$

(„exakte Lösung": $\begin{pmatrix}40{,}9126\\12{,}0236\end{pmatrix}$)

$Ax=b$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Erlaubt:
- * Zeilen vertauschen (Achtung: für die Determinante mitzählen, bei einer ungeraden Anzahl an Tauschen ändert sich das Vorzeichen der Determinante)
- * mit Vorbehalt: Spalten vertauschen (Achtung: für die Determinante mitzählen)

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ x_1 & x_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ x_2 & x_1 & \end{array}$$

- * Man nimmt eine Ausgangszeile und zählt zu einer anderen Zeile ein Vielfaches der Ausgangszeile hinzu.

Beispiel:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 28,$$
$$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 61,$$
$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 55$$

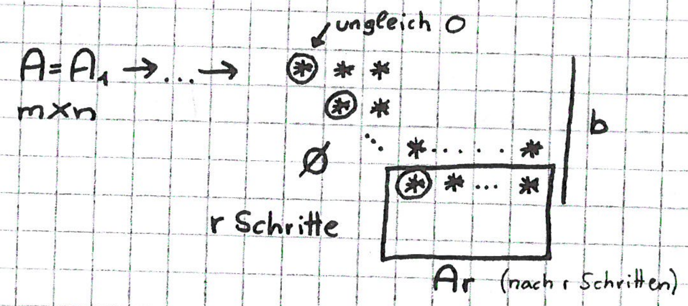
Ausgangszeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 2 & -3 & 7 & 61 \\ 1 & 2 & 8 & 55 \end{array}\right) \xrightarrow[-\text{Ausg.}]{-2\times\text{Ausg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{-4\times\text{Ausg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Ausgangszeile

$\rightarrow x_3 = 7,\ x_2 = -2,\ x_1 = 3 \ \rightarrow$ Lösung: $x = \begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}$

det A = „Produkt der Diagonalelemente" = 1



$$A_r = \left(a_{j,k}^{(r)}\right)_{j=r,\ k=r}^{m\quad n}$$

$$a_{j,k}^{(r+1)} = a_{j,k}^{(r)} - \frac{a_{j,r}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}}\, a_{r,k}^{(r)}$$ (Formel für Gauß-Verfahren)

Zeilen- bzw. Spaltenaustauschungen:

PAQ, P, Q Permutationsmatrix (det kann nur +1 oder −1 sein)
Matrix, wo in jeder Zeile und Spalte genau ein Einser steht und sonst nur Nuller,
also z.B.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = LR$

beim letzten Beispiel: $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ → det = 1, 2-fache von (I) abgezogen, (I) abgezogen

R ist oben Dreiecksmatrix, L ist unten Dreiecksmatrix
$\det A = \det L \cdot \det R$
↘ standardmäßig 1

Was geht noch mit Gauß?

- Geht auch gut bei nicht eindeutigen Lösungen.
- Simultanes Lösen von Gleichungssystemen.
- Matrizen invertieren. (im Prinzip gehört das zum simultan Lösen)

• Simultanes Lösen:

Bsp: $\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 11 \end{array}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{-\text{(I)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\text{(II)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. Gleichung: Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 2. Gleichung: Lösung: $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

• Matrizen invertieren:

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2\times\text{(II)}]{-2\times\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4\times\text{(III)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[+2\times\text{(III)}]{-4\times\text{(III)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -4 & -23 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{+3\times \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 2 & 10 & -7 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Beispiel mit x_1 bis x_4:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$$
$$2x_1 - 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 7 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-2\times \mathrm{I}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

spezielle Lösung: Wähle $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 3$ also $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

homogen:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

1.Vektor: $x_2 = 1,\ x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.Vektor: $x_2 = 0,\ x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -3$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Determinanten

Wie kann man Determinanten ausrechnen? Bei konkreten Matrizen: Gauß-Verfahren.

Entwickle nach Zeile oder Spalte:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{j,k} \cdot \det A_{j,k} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{j,k} \cdot \det A_{j,k} \quad \text{wobei } A_{j,k} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

j-Zeile

k-Spalte

streichen

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \pm\, * \det\left(\cdots\right) \pm \text{usw.}$$

2×2 Matrizen: $\det\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \bullet - \bullet$

3×3 Matrizen (Regel von SARRUS): $\det\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \bullet - \bullet$

Bsp: $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot3\cdot2 + 1\cdot0\cdot1 - 1\cdot1\cdot2 - 2\cdot0\cdot2 - 1\cdot3\cdot1 =$

$= 2 + 12 + 0 - 2 - 0 - 3 = 9$

3) Gauß-Verfahren für spezielle Matrizen

Def: Eine Matrix $A=(a_{j,k})$ heißt diagonaldominant, falls

$$\forall\, a_{j,j} > \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{j,k}|$$

Proposition: Falls A diagonaldominant ist, dann ist auch A_r diagonaldominant.
(Beweis: Übung)

Def: Eine $n\times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ heißt positiv definit, falls $A^t = A$ (symmetrisch)

und $\forall x\neq 0$: $x^t A x > 0$. ($x^t A x \geq 0 \Rightarrow$ positiv semidefinit)

Positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte >0

Proposition: Sei A positiv definit. Dann $\exists k$, sodass $a_{k,k} \geq |a_{r,s}|\ \forall r,s$.
Weiters ist $a_{k,k}>0$.

Beweis:

Wähle j,k so, dass $|a_{j,k}| \geq |a_{r,s}|\ \forall r,s$. Es ist $|a_{j,k}|>0$, weil sonst: $A=0$ nicht positiv definit.

1. Fall: $j=k$: Setze $x=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\cdots k$. $0< x^t A x = (a_{k1}\ \cdots\ a_{kn})\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = a_{kk}$

2. Fall: $j\neq k$: Es kann $a_{j,k}>0$ oder $a_{j,k}<0$ sein. O.B.d.A können wir $a_{j,k}>0$ annehmen.

Setze $x=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ -1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdots j\\ \\ \cdots k\\ \\ \\ \end{matrix}$. $\left(\text{bei } a_{j,k}<0: \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right)$

$$\Rightarrow 0 < x^t A x = (a_{1,j}-a_{1,k}\quad a_{2,j}-a_{2,k}\ \cdots\ a_{n,j}-a_{n,k})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ -1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= a_{j,j}-a_{j,k}-(\underbrace{a_{k,j}}_{=a_{j,k}}-a_{k,k}) = a_{j,j}+a_{k,k}-2a_{j,k}$$

$$\Rightarrow 2a_{j,k} < a_{j,j}+a_{k,k} \Rightarrow a_{j,j} > |a_{j,k}| \text{ oder } a_{k,k} > |a_{j,k}|.\ \square$$

Proposition: Sei A positiv definit. Dann sind auch die im Gauß-Verfahren auftretenden Matrizen A_r positiv definit.

Beweis:

Induktion nach r:

Für $r=1$: $A_1 = A$ positiv definit.

Sei $r\in\{1,\ldots,n-1\}$ und sei A_r positiv definit.

$$A_{r+1} = \left(a_{j,k}^{(r+1)}\right)_{j,k=r+1}^{n},\quad a_{j,k}^{(r+1)} = a_{j,k}^{(r)} - \frac{a_{j,r}^{(r)}\cdot a_{r,k}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}}$$

$$a_{k,j}^{(r+1)} = \underbrace{a_{k,j}^{(r)}}_{=a_{j,k}^{(r)}} - \underbrace{\frac{a_{k,r}^{(r)}\cdot a_{r,j}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}}}_{\frac{a_{r,k}^{(r)}\cdot a_{j,r}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}}} = a_{j,k}^{(r+1)}$$, also A_{r+1} ist symmetrisch.

Sei $x = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$. Setze $\hat{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$.

(A_r positiv definit)

$$\Longrightarrow \quad 0 < \hat{x}^t \underbrace{A_r}_{\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)} \hat{x} = a_{r,r} \frac{1}{(a_{r,r}^{(r)})^2} \left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s\right)^2 + \underbrace{2 \sum_{k=r+1}^{n} x_k a_{r,k}^{(r)} \left(-\frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s\right)}_{= -2 \frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \underbrace{\left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s\right)\left(\sum_{k=r+1}^{n} a_{r,k}^{(r)} x_k\right)}_{= \left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s\right)^2}} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{j,k}^{(r)} x_j x_k =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s\right)^2}_{\sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} \left(-\frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \underbrace{a_{r,j}^{(r)}}_{= a_{j,r}^{(r)}} a_{r,k}^{(r)} x_j x_k\right)} + \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{j,k}^{(r)} x_j x_k =$$

$$= \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} \Big(\underbrace{a_{j,k}^{(r)} - \frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} a_{j,r}^{(r)} a_{r,k}^{(r)}}_{= a_{j,k}^{(r+1)}}\Big) x_j x_k = x^t A_{r+1} x$$

Somit ist A_{r+1} positiv definit. $\square$

4) Überbestimmte Gleichungssysteme

„mehr Gleichungen als Unbekannte" $\rightarrow$ Im Normalfall keine Lösung.

Bei Marssonde:

$0,1392\, x_1 + 0,3485\, x_2 = 9,891$

Def: Sei A eine $m \times n$-Matrix ($m \geq n$) und $b \in \mathbb{R}^m$.

Dann heißt $x (\in \mathbb{R}^n)$ eine „beste Lösung" von $Ax = b$, falls

$|Ax - b| \leq |Ay - b| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.

Berechnen: x „beste Lösung" $\Longleftrightarrow A^t A x = A^t b$

$A^t A$ ist positiv semidefinit, weil...

$(A^t A)^t = A^t \underbrace{(A^t)^t}_{= A} = A^t A$, also $A^t A$ symmetrisch.

Für $x \neq 0$ ist $\underbrace{x^t A^t}_{= (Ax)^t} A x = |Ax|^2 \geq 0$.

Einschub:

Vektoren in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{R}^n$ | $\mathbb{C}^n$

- $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = y^t x$ | $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} = \underbrace{y^*}_{= \bar{y}^t} x$ ... inneres Produkt

- $|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \langle x, x \rangle = \begin{cases} x^t x \\ x^* x \end{cases}$

- M heißt Teilraum, falls $\forall x,y \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) und $x+\lambda y \in M$.
- Orthogonalraum zu M

  $M^\perp = \{v : \langle v,x\rangle = 0 \ \forall x \in M\}$

- Falls $v \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) $\Rightarrow \exists!\, v_1 \in M, v_2 \in M^\perp$ sodass $v = v_1 + v_2$
- A eine $n \times m$-Matrix entspricht einer linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$

  ($\varphi(x+\lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$ $\forall$ Vektoren x,y $\forall$ Zahlen λ)

  $\{x : Ax = 0\}$ bildet einen Teilraum ($\ker A$, Kern von A).

- $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$, $x_0 \in \mathbb{R}^s$

  $df(x_0)$ ($= Df(x_0) = f'(x_0)$) eine $r \times s$-Matrix heißt Ableitung von f an der Stelle x_0, falls

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

  $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ partielle Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ... nur nach x_j differenzieren, alle anderen Variablen konstant lassen

Proposition: Falls f differenzierbar in x_0 ist, dann $\exists$ alle partiellen Ableitungen und es gilt $df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_s}\right)$

Satz: Falls alle partiellen Ableitungen stetig sind, dann ist f differenzierbar. Man nennt dann f stetig differenzierbar (C_1).

Satz: Falls $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist und falls x_0 ein lokales Extremum von f ist, dann gilt $df(x_0) = 0$.

Wir suchen das Minimum von $x \mapsto |Ax - b|$.
Weil $x \mapsto x^2$ streng monoton steigend ist auf $\{x : x \geq 0\}$ haben $|Ax-b|$ und $|Ax-b|^2$ an der selben Stelle das Minimum.

$$f(x) = |Ax-b|^2 = \underbrace{(Ax-b)^t}_{=x^tA^t - b^t}(Ax-b) = x^tA^tAx - b^tAx - \underbrace{x^tA^tb}_{=b^tAx} + b^tb = x^t\underbrace{A^tA}_{(c_{j,k})}x - 2\underbrace{b^tA}_{(d_j)}x + b^tb =$$

$$= \sum_{j=1}^n c_{j,j}x_j^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^n 2c_{j,k}x_jx_k - 2\sum_{j=1}^n d_jx_j + \underbrace{b^tb}_{\text{fällt beim Ableiten weg}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \overset{?}{=} \sum_{j=1}^n 2c_{j,j}x_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^n 2c_{j,k} - 2d_j = 2\Big(\sum_{k=1}^n \underbrace{c_{j,k}x_k}_{=x_kc_{k,j} \text{ weil Matrix symmetrisch}} - d_j\Big) = 2(x^tA^tA - b^tA)_j \text{ ist stetig}$$

partielle Ableitungen sind stetig

Funktion

Daher ist f differenzierbar, und es gilt $df(x) = 2(x^tA^tA - b^tA)$.

$$0 = df(x) = 2(x^tA^tA - b^tA) \Rightarrow x^tA^tA - b^tA = 0 \Rightarrow A^tAx - A^tb = 0 \Rightarrow A^tAx = A^tb$$

1. Ableitung 0 setzen

Ist das wirklich ein globales Minimum? Dafür müssen wir uns den Rand anschauen (nicht die 2. Ableitung): In unserem Fall $x \to \infty$.
Angenommen wir sind in einem Teilraum M, wo $Ax \neq 0 \quad \forall x \in M \setminus \{0\}$.

$C := \{x \in M : |x| = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen ($\Rightarrow$ kompakt) (Vorstellung: Kugel)

Satz von Minimum und Maximum $\Rightarrow \exists x_1 \in C$, sodass $|Ax_1| \leq |Ax| \quad \forall x \in C$.

Sei $x \in M$ beliebig, $x \neq 0$. $\frac{x}{|x|} \in C \Rightarrow \underbrace{|Ax_1|}_{\neq 0} \leq |A\frac{x}{|x|}| = \frac{1}{|x|}|Ax|$

$\Rightarrow |Ax| \geq |x|\,|Ax_1|$

$\Rightarrow |Ax-b| \geq \underbrace{|Ax|}_{\geq |x|\,|Ax_1| \xrightarrow[x\to\infty]{}} - |b| \geq \underbrace{|x|}_{+\infty}\,\underbrace{|Ax_1|}_{>0} - |b| \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$

In diesem Fall haben wir bei $A^tAx = A^tb$ ein Minimum.

<u>Allgemeiner Fall:</u> $\underbrace{\overset{\text{Menge aller } x \text{, für die } Ax=0 \text{ ist}}{\{x : Ax = 0\}}}_{\ker A}$ – Kern von A, Sei $M := \{x : Ax = 0\}^\perp$
Orthogonalraum zum Kern von A
= Menge der Vektoren, die normal auf die Vektoren aus dem Kern von A stehen
→ Skalarprodukt ist 0

Auf M $\exists x_0 \in M$, sodass $|Ax_0 - b| \leq |Ax - b|$.
(Satz von Minimum und Maximum!)

Sei $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x_1 \in \underbrace{\{x : Ax = 0\}}_{\ker A} \; \exists x_2 \in \underbrace{\{x : Ax = 0\}^\perp}_{\text{Orthogonalraum zu } \ker A}$, sodass $x = x_1 + x_2$.

$|A\underbrace{x}_{x_1+x_2} - b| = |\underbrace{Ax_1}_{=0 \text{ (weil } x_1 \in \ker A)} + Ax_2 - b| \geq |Ax_0 - b|$.
siehe 2. Zeile

Wann ist x ein Minimum? $x = x_0 + x_1$, wobei $Ax_1 = 0$

Weiters ist $Ax = Ax_0$.

Proposition: (gerade bewiesen) Sei A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten:

(1) $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|Ax_0 - b| \leq |Ax - b| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. (es gibt eine beste Lösung)

(2) Falls $x \in \mathbb{R}^n$ die Bedingung $|Ax - b| \leq |Ay - b| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, dann ist $Ax = Ax_0$.

(3) $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $|Ax - b| \leq |Ay - b| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $A^tAx = A^tb$.

<u>Beispiel, beste Lösung suchen:</u>

$15x_1 + 9x_2 = 122,$
$10x_1 + 6x_2 = 81,$
$25x_1 + 15x_2 = 206.$

exakt: $\emptyset$ (es gibt keine exakte Lösung, keine Gleichung ist Vielfache einer anderen)

„beste Lösung": $A^tAx = A^tb$

$$A=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 10 & 6\\ 25 & 15\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}122\\ 81\\ 206\end{pmatrix}$$

$$A^tA=\begin{pmatrix}950 & 570\\ 570 & 342\end{pmatrix},\quad A^tb=\begin{pmatrix}7790\\ 4674\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}950 & 570 & 7790\\ 570 & 342 & 4674\end{array}\right) \xrightarrow[:114]{:190} \left(\begin{array}{cc|c}5 & 3 & 41\\ \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{41}\end{array}\right)$$

$$5 \quad 3 \mid 0$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}}$$

Beispiel:

$x=a_1$

$x=a_2$ „beste Lösung"

$\vdots$

$x=a_n$

$$A=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$A^tAx=A^tb$$

$$A^tA=(n),\quad A^tb=\sum_{j=1}^{n} a_j$$

$$x=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \text{ Mittelwert}$$

5) Das Horner-Schema

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n} \underbrace{a_j}_{\in K(=\mathbb{C},\mathbb{R})} x^j = a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0$$

$a_n \neq 0 \Rightarrow$ Grad von p ist n

x_0, wollen $p(x_0)$ bestimmen:

- Naiv: $p(x_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0$

  Multiplikationen: $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}\left(\approx\frac{n^2}{2}\right)$

22.3.

- Hornerschema:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	b

  Multiplikationen: n

Proposition: Sei $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom und sei x_0 eine Zahl.
Setze $b_{n-1} := a_n$ und für $k \in \{0,1,\dots,n-2\}$ setze $b_k := b_{k+1}x_0 + a_{k+1}$
und setze $b := b_0 x_0 + a_0$. Dann gilt $p(x) = (x-x_0)\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + b$.
Insbesondere gilt $p(x_0) = b$.

Beweis:

$$(x-x_0)\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + b = \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^{j+1}}_{} - \overset{\text{ausmultiplizieren}}{\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} b_j x_0 x^j}_{=b_0x_0+\sum_{j=1}^{n-1} b_j x_0 x^j}} + b =$$

Indexverschiebung $= \sum_{j=1}^{n} b_{j-1} x^j =$

letztes Glied herausschreiben $= b_{n-1}x^n + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1}x^j$

erstes Glied herausschreiben

$$= \underbrace{b_{n-1}}_{=a_n \text{ laut Voraussetzung}} x^n + \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{(b_{j-1} - b_j x_0)}_{=a_j\ b_k:=\dots\text{umgeformt}} x^j \underbrace{- b_0 x_0 + b}_{=a_0\ b:=\dots\text{umgeformt}} =$$

$$= a_n x^n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^j + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = p(x).$$

$$p(x_0) = \underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0}\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + b = b. \qquad \square$$

Beispiel zum Hornerschema:

$p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 + 5$, wollen $p(3)$ bestimmen und Division mit Rest durch $(x-3)$.

	2	6	-4	5
3	2	12	32	101
	2 runter	3·2+6	3·12-4	3·32+5

also $p(3) = 101$, $p(x) = (x-3)(2x^2 + 12x + 32) + 101$

Beispiel zum Hornerschema:

$p(x) = x^2 - 1$, wollen $p(3)$

	1	0	-1
3	1	3	8
	1 runter	3·1+0	3·3-1

also $p(3) = 8$, $p(x) = (x-3)(x+3) + 8$

Was damit noch geht: Nullstellen bestimmen:

$p(x) = \underbrace{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}_{\in \mathbb{Z}}$ (o.B.d.A: $\underset{=\text{ggT}}{\text{gcd}}(a_n,\dots,a_0) = 1$)

Angenommen $x_0 = \frac{t}{s} \in \mathbb{Q}$ ist Nullstelle ($t \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, $\gcd(t,s) = 1$)

$\Rightarrow t \mid a_0$ und $s \mid a_n$

(Falls $a_n = 1$ und $\underset{\in\mathbb{Z}}{t_1} + i\underset{\in\mathbb{Z}}{t_2}$ Nullstelle $\Rightarrow t_1^2 + t_2^2 \mid a_0$)

Beispiel zum Nullstellen bestimmen:

$6x^3 - 79x^2 + 340x - 475$

Mögliche Kandidaten: $\underbrace{1, -1, 5, -5, \dots}_{\text{Teiler von } 475}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$

$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \dots$

$\underbrace{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \dots}_{\text{Teiler von } 475 / \text{Teiler von } 6}$

	6	-79	340	-475
1	6	-73	267	-208
-1	6	-85	425	-900
1. Nullstelle 5	6	-49	95	0

Jetzt könnten wir weiterprobieren mit $5, -5, \dots$

Aber wir haben ein quadratisches Polynom $6x^2 - 49x + 95 = 0$.

$\Rightarrow x^2 - \frac{49}{6}x + \frac{95}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{49}{12} \pm \sqrt{\frac{2401}{144} - \frac{95}{6}} = 5, \frac{19}{6}$

Nullstellen: $5\ (2\times), \frac{19}{6}$.

Man kann auch Ableitungen an der Stelle x_0 bestimmen:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{a_j}_{= b_j^{(0)}} x^j$$

	$b_n^{(0)}$	$b_{n-1}^{(0)}$	...	$b_2^{(0)}$	$b_1^{(0)}$	$b_0^{(0)}$	$r!$
x_0	$b_{n-1}^{(1)}$	$b_{n-2}^{(1)}$	...	$b_1^{(1)}$	$b_0^{(1)}$	$b^{(1)}$	$0! = 1$
	$b_{n-2}^{(2)}$	$b_{n-3}^{(2)}$	...	$b_0^{(2)}$	$b^{(2)}$		$1! = 1$
	$b_{n-3}^{(3)}$	$b_{n-4}^{(3)}$	.. $b_0^{(3)}$	$b^{(3)}$			$2! = 2$
	$\vdots$						$\vdots$
	$b_0^{(n)}$	$b^{(n)}$					$(n-1)!$
	$b^{(n+1)}$						$n!$

$$p^{(r)}(x_0) = r! \cdot b^{(r+1)}$$

Multiplikationen: $\underbrace{n + (n-1) + \dots + 1}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + 2n \quad \left(\approx \frac{n^2}{2}\right)$

Mit dem Hornerschema hat man fast genauso schnell alle Ableitungen ausgerechnet wie auf naive Weise nur den Funktionswert.

Lemma: Falls $p(x) = (x-x_0)^r g(x)$, wobei $r \in \mathbb{N}_0$ und g ein Polynom ist, dann gibt es für jedes $j \in \{0,1,\dots,r\}$ ein Polynom q_j sodass

$$p^{(j)}(x) = \frac{r!}{(r-j)!}(x-x_0)^{r-j} g(x) + (x-x_0)^{r-j+1} q_j(x).$$

Beweis:

Induktion nach j:

$j=0$: $p(x) = (x-x_0)^r g(x) = \frac{r!}{(r-0)!}(x-x_0)^{r-0} g(x) + (x-x_0)^{r-0+1} \underbrace{q_0(x)}_{:=0}$

Sei $j \in \{1,\dots,r\}$.

$$p^{(j-1)}(x) = \frac{r!}{(r-j+1)!}(x-x_0)^{r-j+1} g(x) + (x-x_0)^{r-j+2} q_{j-1}(x)$$

$$p^{(j)}(x) = \left(p^{(j-1)}\right)' =$$

$$= \underbrace{\frac{r!}{(r-j+1)!}(r-j+1)}_{=\frac{r!}{(r-j)!}}(x-x_0)^{r-j} g(x) + \frac{r!}{(r-j+1)!}(x-x_0)^{r-j+1} g'(x) +$$

$$+ (r-j+2)(x-x_0)^{r-j+1} q_{j-1}(x) + (x-x_0)^{r-j+2} q_{j-1}'(x) =$$

$$= \frac{r!}{(r-j)!}(x-x_0)^{r-j} g(x) + (x-x_0)^{r-j+1} \underbrace{\left(\frac{r!}{(r-j+1)!} g'(x) + (r-j+2) q_{j-1}(x) + (x-x_0) q_{j-1}'(x)\right)}_{=: q_j(x) \text{ (Polynom)}}$$

$\square$

Proposition: Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom, x_0 eine Zahl und sei $r \in \{0,1,\dots,n\}$.
Dann gilt $p^{(r)}(x_0) = r!\, b^{(r+1)}$

Beweis:

Behauptung: Für $r \in \{0,1,\dots,n\}$ gilt $p(x) = (x-x_0)^r \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + \sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j$

Beweis der Behauptung: Induktion nach r

$r=0$: $\underbrace{(x-x_0)^0}_{=1} \sum_{j=0}^{n} \underbrace{b_j^{(0)}}_{=a_j} x^j + 0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = p(x)$.

Sei $r \in \{1,\dots,n\}$.

$$p(x) = (x-x_0)^{r-1} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-r+1} b_j^{(r-1)} x^j}_{} + \sum_{j=0}^{r-2} b^{(j+1)} (x-x_0)^j =$$

$$\overset{\text{einfaches Hornerschema}}{=} (x-x_0) \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + b^{(r)}$$

$$= (x-x_0)^r \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + \underbrace{b^{(r)}(x-x_0)^{r-1} + \sum_{j=0}^{r-2} b^{(j+1)} (x-x_0)^j}_{= \sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j}$$

$\square$

27.3.

Sei $r \in \{0,1,\dots,n\} \overset{\text{Beh.}}{\Longrightarrow} p(x) = (x-x_0)^r \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j}_{\text{Polynom vom Grad} \leq r-1}$

$$p^{(r)}(x) = \left((x-x_0)^r \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j\right)^{(r)} + \left(\sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j\right)^{(r)} =$$

$$\overset{\text{Lemma } \exists \text{ Pol. } q_r}{=} \frac{r!}{(r-r)!} (x-x_0)^{r-r} \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + (x-x_0)^{r-r+1} q_r(x) =$$

$$= r! \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + (x-x_0)\, q_r(x)$$

$$\Longrightarrow p^{(r)}(x_0) = r! \underbrace{\sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x_0^j}_{\substack{\text{Einfaches Horner Schema } (r+1) \\ = b}} + \underbrace{0 \cdot q_r(x_0)}_{=0} = r!\, b^{(r+1)} \quad \square$$

Beispiel:

$p(x) = 7x^5 - 20x^4 - 93x^3 + 62x^2 + 164x - 120$

$x_0 = 3$, alle Ableitungen

	7	-20	-93	62	164	-120	r!
3	7	1	-90	-208	-460	-1500	0! = 1
	7 runter	$3\cdot7+1$	$3\cdot22-90$	$3\cdot(-24)-208$	$3\cdot(-208)-460$		
	7	22	-24	-280	-1300		1! = 1
	7	43	105	35			2! = 2
	7	64	297				3! = 6
	7	85					4! = 24
	7						5! = 120

$p(3) = -1500$

$p'(3) = -1300 \cdot 1 = -1300$

$p''(3) = 35 \cdot 2 = 70$

$p'''(3) = 297 \cdot 6 = 1782$

$p^{(4)}(3) = 85 \cdot 24 = 2040$

$p^{(5)}(3) = 7 \cdot 120 = 840$

$p^{(n)}(3) = 0 \quad \forall n \geq 6$

Nullstellen: $5, 1, \frac{6}{7}, -2\ (2\times)$

II. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

1) Was ist eine Differenzialgleichung?

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^r$; $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$

$\underbrace{\dot{x} = f(x,t)}$, Anfangsbedingung: $t_0 \in I$, $x_0 \in D$, $x(t_0) = x_0$

= gewöhnliche Differenzialgleichung (ODE) 1. Ordnung in expliziter Form

implizit: $f(x, \dot{x}, t) = 0$, z.B. $x\dot{x} = t = 0$

n-ter Ordnung: explizit: $x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t)$

implizit: $f(x^{(n)}, \dots, \dot{x}, x, t) = 0$

partielle Differenzialgleichungen: z.B. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung

Lösen: $x: \underset{\subseteq I}{J} \to \mathbb{R}^r$ stetig und $\forall t \in J^\circ: \dot{x}(t) = f(x(t), t)$

Beispiel:

$\dot{x} = x^2$, $x(0) = \frac{1}{7}$

Lösung $x(t) = \frac{1}{7-t}$ auf $(-\infty, 7)$

lokale Lösung, aber keine globale Lösung

Beispiel:

$\dot{x} = 3x^{0}$, $x(0) = 0$

Lösung $x(t) = 0$ und $x(t) = t^{3}$

Lösung ist nicht eindeutig

M_r ($M_r(\mathbb{R})$)... Menge der $r \times r$-Matrizen (über $\mathbb{R}$)

Def: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}: \underset{(\subseteq I)}{\mathbb{R}} \to M_r$ stetig.

Dann nennt man $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) x^{(j)} = 0$ eine homogene lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

Ist $f: \underset{(I)}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^r$ eine stetige Funktion,

dann heißt $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) x^{(j)} = \underbrace{f(t)}_{\text{Störfunktion}}$ inhomogene lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

Falls $A_{n-1}(t)=A_{n-1},\dots,A_1(t)=A_1,\ A_0(t)=A_0\ \forall t$, dann spricht man von einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Anfangsbedingungen: $x(t_0),\ \dot{x}(t_0),\dots,x^{(n-1)}(t_0)$

Satz: Sei $x_{s_{\text{spezielle}}}$ eine Lösung von $x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x^{(j)}=f(t)$.
Dann ist x genau dann eine Lösung von $x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x^{(j)}=f(t)$, wenn es eine Lösung y von $x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x^{(j)}=0$ gibt, sodass $x=x_s+y$.

Beweis:

"$\Leftarrow$":

inhomogen | homogen | inhomogen

$$\underbrace{x^{(n)}}_{=x_j^{(n)}+y^{(n)}}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)\underbrace{x^{(j)}}_{=x_s^{(j)}+y^{(j)}}=\underbrace{x_s^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x_s^{(j)}}_{=f(t)}-\underbrace{y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)y^{(j)}}_{=0}=f(t)$$

"$\Rightarrow$": Setze $y:=x-x_s \Rightarrow x=x_s+y$

$$\underbrace{y^{(n)}}_{=x^{(n)}-x_s^{(n)}}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)\underbrace{y^{(j)}}_{=x^{(j)}-x_s^{(j)}}=\underbrace{x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x^{(j)}}_{=f(t)}-\underbrace{\left(x_s^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x_s^{(j)}\right)}_{=f(t)}=0 \qquad \square$$

Proposition: $\varphi(x)=x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x^{(j)}$ ist linear

Beweis:

$$\varphi(x+\lambda y)=\underbrace{(x+\lambda y)^{(n)}}_{=x^{(n)}+\lambda y^{(n)}}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)\underbrace{(x+\lambda y)^{(j)}}_{=x^{(j)}+\lambda y^{(j)}}=\underbrace{x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)x^{(j)}}_{=\varphi(x)}+\lambda\underbrace{\left(y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t)y^{(j)}\right)}_{=\varphi(y)}=$$
$$=\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$$

2) Die Differenzialgleichung $\dot{x}=ax+f$

homogen: $\dot{x}-ax=0\quad(\dot{x}=ax)\Leftrightarrow x(t)=ce^{at}$ ganz am Anfang gelöst!

inhomogen: $e^{3t}\Leftrightarrow 3$

$e^{5t}\cos 3t \Leftrightarrow \underset{\text{oder } 5-3i}{5+3i}\quad(\Leftrightarrow e^{5t}\sin 3t)$ wenn cos auftritt, tritt auch immer sin auf

$\sin 7t \Leftrightarrow 7i$

$\underbrace{4}_{4e^{0t}}\Leftrightarrow 0$

Bestimmt die Lösung durch passenden Ansatz:

$f=e^{\alpha t}\underbrace{p(t)}_{\text{Polynom vom Grad}\le k}$ Ansatz: $x=e^{\alpha t}\underbrace{q(t)}$

Polynom vom Grad $\le k$, für $\alpha\neq a$
für $\alpha=a$: Polynom vom Grad $\le k+1$

$f=e^{\alpha t}\cos\beta t\, p_1(t)+e^{\alpha t}\sin\beta t\, p_2(t)$ Ansatz: $x=e^{\alpha t}\cos\beta t\, q_1(t)+e^{\alpha t}\sin\beta t\, q_2(t)$

Polynom vom Grad $\le k$ Polynom vom Grad $\le k$

$\dot{x} = 17x + f \qquad f = e^{12t} t^2 \qquad$ Ansatz: $x = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) e^{12t}$

$f = e^{3t} \sin 7t \qquad$ Ansatz: $x = \alpha e^{3t} \cos 7t + \beta e^{3t} \sin 7t$

Gradum 1 erhöhen da 0

$f = e^{17t} \, 15 t^2 \qquad$ Ansatz: $x = (\alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{17t}$

im Eindimensionalen $(\alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t) e^{17t}$

29.B. Satz: Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze $\varphi(x) = \dot{x} - ax$.

(1) Falls $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq a$, $k \in \mathbb{N}_0$, setze $V := \{(\alpha_k t^k + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{\alpha t} : \alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$ dann ist $\varphi : V \to V$ surjektiv.

(2) Falls $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, setze $V := \{(\alpha_k t^k + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{\alpha t} \cos \beta t + (\beta_k t^k + \ldots + \beta_1 t + \beta_0) e^{\alpha t} \sin \beta t : \alpha_k, \ldots, \alpha_0, \beta_k, \ldots, \beta_0 \in \mathbb{R}\}$, dann ist $\varphi : V \to V$ surjektiv.

(3) Falls $k \in \mathbb{N}_0$, setze $V := \{(\alpha_k t^k + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{at} : \alpha_k, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{R}\}$ und $W := \{(\alpha_{k+1} t^{k+1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{at} : \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{R}\}$, dann ist $\varphi : W \to V$ surjektiv.

Beweis:

Schon bewiesen: φ ist linear.

(1) $x := (\alpha_k t^k + \ldots + \alpha_0) e^{\alpha t} \in V$

$$\varphi(x) = \dot{x} - ax = (k\alpha_k t^{k-1} + \ldots + \alpha_1) e^{\alpha t} + (\alpha_k t^k + \ldots + \alpha_0) e^{\alpha t} \alpha - a(\alpha_k t^k + \ldots + \alpha_0) e^{\alpha t} =$$

$$= \Big(\underbrace{(\alpha \cdot \alpha_k - a \cdot \alpha_k) t^k + (\alpha \cdot \alpha_{k-1} - a \cdot \alpha_{k-1} + k \alpha_k) t^{k-1} + \ldots + (\alpha \cdot \alpha_0 - a \cdot \alpha_0 + \alpha_1)}_{p(t) \text{ Polynom vom Grad } \leq k} \Big) e^{\alpha t} \in V$$

$\dim V = \dim \{x : \varphi(x) = 0\} + \dim \varphi(V)$

$\dim V = k + 1$

$$\{x : \underbrace{\varphi(x)}_{\dot{x} - ax} = 0\} = \{\underbrace{c e^{at} \in V}_{\Rightarrow c = 0}\} = \{0\}$$

$\Rightarrow \dim \varphi(V) = k + 1 \Rightarrow \varphi(V) = V$

(2) $x = p_1(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + p_2(t) e^{\alpha t} \sin \beta t$

Polynom Grad $\leq k$

$$\varphi(x) = \dot{x} - ax = \dot{p}_1(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + \alpha p_1(t) e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta p_1(t) e^{\alpha t} \sin \beta t +$$

$$+ \dot{p}_2(t) e^{\alpha t} \sin \beta t + \alpha p_2(t) e^{\alpha t} \sin \beta t + \beta p_2(t) e^{\alpha t} \cos \beta t +$$

$$- a p_1(t) e^{\alpha t} \cos \beta t - a p_2(t) e^{\alpha t} \sin \beta t =$$

$$= \underbrace{\left(\dot{p}_1(t) + \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) - a p_1(t)\right)}_{\text{Polynom vom Grad} \leq k} e^{\alpha t} \cos \beta t +$$

(weil die einzelnen Polynome vom Grad $\leq k$ sind)

$$+ \underbrace{\left(\dot{p}_2(t) - \beta p_1(t) + \alpha p_2(t) - a p_2(t)\right)}_{\text{Polynom vom Grad} \leq k} e^{\alpha t} \sin \beta t \in V$$

zählen, was man wählen kann: $k+1 \times \alpha$ und $k+1 \times \beta$

$\dim V = 2(k+1)$

$\{\underbrace{x : \varphi(x) = 0}_{\Rightarrow x = ce^{at}}\} = \{0\}$

$\dim \varphi(V) = 2(k+1) = \dim V$

$\Rightarrow \varphi(V) = V$

(3) $x := (\alpha_{k+1} t^{k+1} + \underbrace{p(t)}_{\text{Polynom vom Grad} \leq k}) e^{at} \in W$

$\varphi(x) = \dot{x} - ax = (k+1) t^k \alpha_{k+1} e^{at} + a \cdot \cancel{\alpha_{k+1} t^{k+1}} e^{at} + \dot{p}(t) e^{at} + \cancel{a\, p(t) e^{at}} - \cancel{a \alpha_{k+1} t^{k+1}} e^{at} - \cancel{a p(t) e^{at}}$

$= (\underbrace{(k+1)\alpha_{k+1} t^k + \dot{p}(t)}_{\text{Polynom vom Grad} \leq k}) e^{at} \in V$

$\dim W = k+2$, $\dim V = k+1$

$\{\underbrace{x : \varphi(x) = 0}_{= ce^{at}}\} = \{ce^{at} : c \in \mathbb{R}\}$

$\dim \{x : \varphi(x) = 0\} = 1$

$k+2 = \dim W = \dim \{x : \varphi(x) = 0\} + \dim \varphi(W) \Rightarrow \dim \varphi(W) = k+1 \Rightarrow \varphi(W) = V.$

Beispiel: $\dot{x} = 2x + f$

homogen $\dot{x} = 2x \Leftrightarrow x = ce^{\overset{a}{2}t}$ (Lösung des homogenen Systems)

- $\dot{x} = 2x + 8t^2 e^{\overset{\alpha}{4}t}$

inhomogen: Überlegung $\alpha = 4 \neq 2 = a$ ← wenn $\alpha = a$: Grad erhöhen

Ansatz: $x = (\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{4t}$

	$t^2 e^{4t}$	$t e^{4t}$	e^{4t}
x	α_2	α_1	α_0
$\dot{x}$	$4\alpha_2$	$2\alpha_2 + 4\alpha_1$	$\alpha_1 + 4\alpha_0$
$2x + 8t^2 e^{4t}$	$2\alpha_2 + 8$	$2\alpha_1$	$2\alpha_0$

$4\alpha_2 = 2\alpha_2 + 8 \Rightarrow \alpha_2 = 4$

$2\alpha_2 + 4\alpha_1 = 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -4$

wenn das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung hat: wir brauchen nur eine spezielle!

$\alpha_1 + 4\alpha_0 = 2\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = 2$

Lösung $x(t) = (4t^2 - 4t + 2) e^{4t} + ce^{2t}$

$\bullet)$ $\dot{x} = 2x + 5e^{4t}\sin t$

inhomogen: $\overset{\alpha}{4+i} \neq \overset{a}{2}$

Ansatz: $x = \alpha e^{4t}\cos t + \beta e^{4t}\sin t$

	$e^{4t}\cos t$	$e^{4t}\sin t$
x	α	β
$\dot{x}$	$4\alpha+\beta$	$-\alpha+4\beta$
$2x+5e^{4t}\sin t$	2α	$2\beta+5$

$4\alpha+\beta = 2\alpha$

$-\alpha+4\beta = 2\beta+5$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 - I \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{array}$$

Lösung: $x(t) = -e^{4t}\cos t + 2e^{4t}\sin t + ce^{2t}$

$\bullet)$ $\dot{x} = 2x + 3t^2 e^{\overset{\alpha}{2t}}$

inhomogen: Überlegung $a = \alpha = 2 \Rightarrow$ Grad um 1 erhöhen!

Ansatz: $x = (\alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0)e^{2t}$

	t^3e^{2t}	t^2e^{2t}	te^{2t}	e^{2t}
x	α_3	α_2	α_1	α_0 (im Eindimensionalen $=0$)
$\dot{x}$	$2\alpha_3$	$3\alpha_3+2\alpha_2$	$2\alpha_2+2\alpha_1$	$\alpha_1+2\alpha_0$
$2x+3t^2e^{2t}$	$2\alpha_3$	$2\alpha_2+3$	$2\alpha_1$	$2\alpha_0$

$\cancel{2\alpha_3 = 2\alpha_3}$

$3\alpha_3 + 2\alpha_2 = 2\alpha_2 + 3 \Rightarrow \alpha_3 = 1$

$2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 + 2\alpha_0 = 2\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

α_0 können wir frei wählen, wir wählen $\alpha_0 = 0$

Lösung: $x(t) = t^3e^{2t} + ce^{2t}$

3.4.

3) Systeme von linearen Differenzialgleichungen

$\dot{x} = Ax + f$

<u>homogen:</u> falls Matrix diagonalisierbar ist und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (A $r \times r$-Matrix), dann ist die Lösung von $\dot{x} = Ax$: $x = e^{\lambda_1 t} r_1 + \dots + e^{\lambda_r t} r_r$.

A ist <u>diagonalisierbar</u> $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis $\{r_1, \dots, r_r\}$ von Eigenvektoren $\Leftrightarrow$ $\exists S$ invertierbar, sodass $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_r \end{pmatrix}$ $(S = (r_1 \; r_2 \; \cdots \; r_r))$

$x = Sy$: $y = S^{-1}x \Rightarrow \dot{y} = S^{-1}\underbrace{\dot{x}}_{=Ax+f} = S^{-1}A\underbrace{x}_{=Sy} + S^{-1}f = S^{-1}ASy + S^{-1}f$

Probleme:

- <u>Bsp:</u> $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $p(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$, Nullstellen: $\pm i$

  - komplexe Nullstellen (mehrfach komplexe Nullstellen)

  $x(t) = \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\to$ cos und sin Lösungen

- <u>Bsp:</u> $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $p(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & 4-x \end{pmatrix} = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, Nullstellen: 3 $(2\times)$

  3 doppelte Nullstelle

  - mehrfache Nullstellen

  $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\to e^{3t}$ und te^{3t} Lösungen – nicht nur eine Lösung!

Man kann nicht jede Matrix diagonalisieren.

Bei reellen Matrizen A: Angenommen $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist Eigenwert mit v Eigenvektor dazu ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}^r$).

$A\bar{v} = \underbrace{\bar{A}}_{=A}\bar{v} = \overline{Av} \overset{\text{konjugiert}}{=} \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$, also $\bar{v}$ ist Eigenvektor zu $\bar{\lambda}$.

Man kann A auf JORDAN'sche Normalform bringen.

$\exists$ Basis $\{v_1, \dots, v_r\}$, bzw. $\exists$ invertierbare Matrix S, sodass A bezüglich $\{v_1, \dots, v_r\}$ gleich J, bzw. $S^{-1}AS = J$, wobei (J = Jordan'sche Normalform)

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \emptyset \\ & \boxed{J_2} & \\ \emptyset & & \ddots \; \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

Jordanblöcke gehören zu genau einem reellen Eigenwert a, bzw. einem komplexen Eigenwertpaar $a \pm bi$ $(b > 0)$.

Zu jedem reellen Eigenwert a gehört mindestens ein Jordanblock, zu jedem komplexen Eigenwertpaar $a \pm bi$ gehört mindestens ein Jordanblock.

Für $a \in \mathbb{R}$, J_k Jordanblock zu a:

$$J_k = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \emptyset \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & a & 1 \\ \emptyset & & & & & a \end{pmatrix}$$

in Diagonale: a
oberhalb: 1

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $b>0$, J_k Jordanblock zu $a+bi$ (bzw. $a \pm bi$):

$$J_k = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & & & & \\ b & a & 0 & 1 & & & & & \emptyset & \\ & & a & -b & 1 & 0 & & & & \\ & & b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & & & a & -b & 1 & 0 & & \\ & & & & b & a & 0 & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & \emptyset & & & & a & -b & 1 & 0 \\ & & & & & & b & a & 0 & 1 \\ & & & & & & & & a & -b \\ & & & & & & & & b & a \end{pmatrix}$$

Wir müssen uns mit $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x \quad (+f)$ beschäftigen:

$p(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & -b \\ b & a-x \end{pmatrix} = x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$

Nullstellen: $a \pm bi \quad (b>0)$

Lemma: Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $b>0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Falls $x(t) = e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at} \sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$, dann ist x eine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

Beweis:

$x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) = e^{at} \cos bt \, a \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} - e^{at} \sin bt \, b \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at} \sin bt \, a \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + e^{at} \cos bt \, b \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{at} \cos bt \underbrace{\begin{pmatrix} a\alpha_1 - b\alpha_2 \\ a\alpha_2 + b\alpha_1 \end{pmatrix}}_{= \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}} + e^{at} \sin bt \underbrace{\begin{pmatrix} -b\alpha_1 - a\alpha_2 \\ -b\alpha_2 + a\alpha_1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}} =$$

$$= A \underbrace{\left(e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at} \sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right)}_{= x(t)} = Ax(t) \qquad \square$$

Satz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b>0$ und seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist x genau dann eine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, wenn $x(t) = e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at} \sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$.

Beweis:

$\Leftarrow$: Lemma ✓

$\Rightarrow$: Setze $y(t) := x(t) - \left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}\right)$. Setze $A := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$$\dot y(t) = \underbrace{\dot x(t)}_{=Ax(t)} - \underbrace{\left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}\right)^{\cdot}}_{\overset{\text{Lemma}}{=} A\left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}\right)} =$$

$$= A\underbrace{\left(x(t) - \left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}\right)\right)}_{=y(t)} = A\,y(t)$$

$$y(0) = \underbrace{x(0)}_{=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Setze $u(t) := e^{-2at}\left(y_1(t)^2 + y_2(t)^2\right)$

$$\dot u(t) = e^{-2at}\left(-2ay_1(t)^2 - 2ay_2(t)^2\right) + e^{-2at}\Big(2y_1(t)\underbrace{\dot y_1(t)}_{=ay_1(t)-by_2(t)} + 2y_2(t)\underbrace{\dot y_2(t)}_{=by_1(t)+ay_2(t)}\Big) =$$

$$= e^{-2at}\left(-2ay_1(t)^2 - 2ay_2(t)^2\right) + e^{-2at}\Big(2y_1(t)\left(ay_1(t) - by_2(t)\right) + 2y_2(t)\left(by_1(t) + ay_2(t)\right)\Big)$$

$$= e^{-2at}\Big(-\cancel{2ay_1(t)^2} - \cancel{2ay_2(t)^2} + \cancel{2ay_1(t)^2} - 2\cancel{by_1(t)}y_2(t) + 2b\cancel{y_1(t)}y_2(t) + \cancel{2ay_2(t)^2}\Big) =$$

$= 0$ wenn Ableitung 0, dann Funktion konstant

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ $\exists c$, sodass $u(t) = c$. konstant

$$c = u(0) = \underbrace{e^{-2a\cdot 0}}_{=1}\Big(\underbrace{y_1(0)^2}_{=0} + \underbrace{y_2(0)^2}_{=0}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = u(t) = e^{-2at}\left(y_1(t)^2 + y_2(t)^2\right)$$

$$0 = y_1(t)^2 + y_2(t)^2 \begin{cases} \geq y_1(t)^2 \geq 0 \\ \geq y_2(t)^2 \geq 0 \end{cases}$$ $\rightarrow$ zwischen 0 und 0 eingezwickt, also 0

$\Rightarrow y_1(t)^2 = 0$ und $y_2(t)^2 = 0$ $\Rightarrow$ $y_1(t) = 0$ und $y_2(t) = 0$

$$\Rightarrow 0 = y(t) = x(t) - \left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

|| Kurz: „ $\dot x = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x \iff x(t) = e^{at}\cos bt\, v_1 + e^{at}\sin bt\, v_2$ ".

5.4.

Proposition: Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b>0$, $\beta>0$. Definiere $\varphi(x) := \dot{x} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$.

Weiters sei $k \in \mathbb{N}_0$.

(1) Setze $V := \{ e^{\alpha t}(t^k v_k + \ldots + t v_1 + v_0) : v_k, \ldots, v_0 \in \mathbb{R}^2 \}$. Dann ist $\varphi : V \to V$ surjektiv.

(2) Falls $\alpha + \beta i \neq a + bi$, setze $V := \{ e^{\alpha t} \cos \beta t \, (t^k v_k + .. + t v_1 + v_0) + e^{\alpha t} \sin \beta t \, (t^k \omega_k + .. + t\omega_1 + \omega_0) : v_k, \ldots, v_0, \omega_k, \ldots, \omega_0 \in \mathbb{R}^2 \}$. Dann ist $\varphi : V \to V$ surjektiv.

(3) Setze $V := \{ e^{at} \cos bt \, (t^k v_k + \ldots + t v_1 + v_0) + e^{at} \sin bt \, (t^k \omega_k + .. + t\omega_1 + \omega_0) : v_k, \ldots, v_0, \omega_k, \ldots, \omega_0 \in \mathbb{R}^2 \}$ und $W := \{ e^{at} \cos bt \left(t^{k+1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + t^k v_k + \ldots + t v_1 + v_0 \right) + e^{at} \sin bt \left(t^{k+1} \begin{pmatrix} -\gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + t^k \omega_k + \ldots + t\omega_1 + \omega_0 \right) : v_k, \ldots, v_0, \omega_k, \ldots, \omega_0 \in \mathbb{R}^2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \}$. Dann ist $\varphi : W \to V$ surjektiv.

Beweis:

φ ist linear. $N := \{ x : \varphi(x) = 0 \}$

$x \in N \Rightarrow x = e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at} \sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

(1) $x \in V \Rightarrow x = e^{\alpha t} \underbrace{p(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k} \Rightarrow \varphi(x) = \dot{x} - \underbrace{A}_{= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} x = e^{\alpha t} \alpha p(t) + e^{\alpha t} \dot{p}(t) - e^{\alpha t} A p(t) =$

$= e^{\alpha t} (\underbrace{\alpha p(t) + \dot{p}(t) - A p(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k}) \in V$

$x \in N \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \dim N = 0$

$\dim V = 2(k+1) =$ weil es $k+1 \times v$ gibt (von v_0 bis v_k) und jeder Vektor v 2 Komponenten hat

$= \dim \varphi(V) + \underbrace{\dim N}_{=0} \Rightarrow \varphi(V) = V$. Somit ist φ surjektiv.

(2) $\dim V = 4(k+1)$ weil es jetzt v und ω gibt

Sei $x \in V \Rightarrow x = e^{\alpha t} \cos \beta t \, p_1(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t \, p_2(t)$
Polynom vom Grad $\leq k$

$\varphi(x) = \dot{x} - Ax = e^{\alpha t} \cos \beta t \, \alpha p_1(t) - e^{\alpha t} \sin \beta t \, \beta p_1(t) + e^{\alpha t} \cos \beta t \, \dot{p}_1(t) +$

$+ e^{\alpha t} \sin \beta t \, \alpha p_2(t) + e^{\alpha t} \cos \beta t \, p_2(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t \, \dot{p}_2(t) - e^{\alpha t} \cos \beta t \, A p_1(t) +$

$- e^{\alpha t} \sin \beta t \, A p_2(t) =$

$= e^{\alpha t} \cos \beta t \, (\underbrace{\alpha p_1(t) + \dot{p}_1(t) + \beta p_2(t) - A p_1(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k}) +$

$+ e^{\alpha t} \sin \beta t \, (\underbrace{-\beta p_1(t) + \alpha p_2(t) + \dot{p}_2(t) - A p_2(t)}_{\text{Polynom vom Grad} \leq k}) \in V$

$x \in N \Rightarrow x = 0$

$\dim V = \dim \varphi(V) + \underbrace{\dim N}_{=0} \Rightarrow \varphi(V) = V$, also ist φ surjektiv.

(3) $\dim V = 4(k+1)$, $\dim \omega = 4(k+1)+2$

Sei $x \in \omega \Rightarrow x = e^{at}\cos bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} + p_1(t)\right) + e^{at}\sin bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}-\gamma_2\\ \gamma_1\end{pmatrix} + p_2(t)\right)$

Polynom vom Grad $\leq k$

$$\varphi(x) = \dot{x} - Ax = e^{at}\cos bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}a\gamma_1\\ a\gamma_2\end{pmatrix} + ap_1(t)\right) - e^{at}\sin bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}b\gamma_1\\ b\gamma_2\end{pmatrix} + bp_1(t)\right) +$$
$$+ e^{at}\cos bt\left((k+1)t^k\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} + \dot{p}_1(t)\right) + e^{at}\sin bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}-a\gamma_2\\ a\gamma_1\end{pmatrix} + ap_2(t)\right) +$$
$$+ e^{at}\cos bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}-b\gamma_2\\ b\gamma_1\end{pmatrix} + bp_2(t)\right) + e^{at}\sin bt\left((k+1)t^k\begin{pmatrix}-\gamma_2\\ \gamma_1\end{pmatrix} + \dot{p}_2(t)\right) +$$
$$- e^{at}\cos bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}a\gamma_1 - b\gamma_2\\ b\gamma_1 + a\gamma_2\end{pmatrix} + Ap_1(t)\right) - e^{at}\sin bt\left(t^{k+1}\begin{pmatrix}-a\gamma_2 - b\gamma_1\\ -b\gamma_2 + a\gamma_1\end{pmatrix} + Ap_2(t)\right) =$$
$$= e^{at}\cos bt\left(\cancel{t^{k+1}\begin{pmatrix}a\gamma_1 - b\gamma_2 - a\gamma_1 + b\gamma_2\\ a\gamma_2 + b\gamma_1 - b\gamma_1 - a\gamma_2\end{pmatrix}} + \underbrace{ap_1(t) + (k+1)t^k\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} + \dot{p}_1(t) + bp_2(t) - Ap_1(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k}\right) +$$
$$+ e^{at}\sin bt\left(\cancel{t^{k+1}\begin{pmatrix}-b\gamma_1 - a\gamma_2 + a\gamma_2 + b\gamma_1\\ -b\gamma_2 + a\gamma_1 + b\gamma_2 - a\gamma_1\end{pmatrix}} \underbrace{- bp_1(t) + ap_2(t) + (k+1)t^k\begin{pmatrix}-\gamma_2\\ \gamma_1\end{pmatrix} + \dot{p}_2(t) - Ap_2(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k}\right) \in V$$

$N = \left\{e^{at}\cos bt\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} + e^{at}\sin bt\begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow \dim N = 2$

$\dim \omega = 4(k+1)+2 = \dim \varphi(\omega) + \underbrace{\dim N}_{=2} \Rightarrow \dim \varphi(\omega) = 4(k+1) = \dim V$

$\Rightarrow \varphi(\omega) = V$. Damit ist φ surjektiv. $\square$

<u>Allgemein: Wir schauen uns Jordanblöcke an.</u>

Wir nehmen Jordanblöcke der Länge q.

- reelle Nullstelle a ($q \hat{=}$ Vielfachheit von a)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \emptyset \\ & & a & \ddots & \\ & \emptyset & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = Ax + f, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

a sind q×q Matrizen
y?

	homogen $e^{at}p(t)$	$f = e^{\alpha t}p(t)$ ($\leq k$), $\alpha \neq a$: $e^{\alpha t}q(t)$	$f = e^{\alpha t}\cos\beta t\, p_1(t) + e^{\alpha t}\sin\beta t\, p_2(t)$ ($\leq k$)	$f = e^{at}p(t)$ ($\leq k$)
x_1	$q-1$	k	k	$k+q$
x_2				
$\vdots$				
x_{q-1}	1 k musste erhöht werden	k	k	$k+2$
x_q	0	k	k	$k+1$
	↑ Grad ≤ 0	↑ Grad $\leq k$ usw		

$\dot{x}_1 = a x_1 + x_2 \quad (+f_1)$

$\dot{x}_2 = a x_2 + x_3 \quad (+f_2)$

$\vdots$

$\dot{x}_{q-1} = a x_{q-1} + x_q \quad (+f_{q-1})$

$\dot{x}_q = a x_q \quad (+f_q)$

$x_q = Ce^{at}$ homogen

$\dot{x}_{q-1} = a x_{q-1} + \underbrace{p_q(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq 0} e^{at} \quad (+f_{q-1})$

homogen: $x_{q-1} = \underbrace{p_{q-1}(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq 1} e^{at}$

$\vdots$

- komplexe Nullstelle $a+bi$ $(b>0)$ ($q \hat{=}$ Vielfachheit von $a+bi$)

$$\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & & & & \\ b & a & 0 & 1 & & & & & & \\ & & a & -b & 1 & 0 & & & \emptyset & \\ & & b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & \emptyset & & & & a & -b & 1 & 0 \\ & & & & & & b & a & 0 & 1 \\ & & & & & & & & a & -b \\ & & & & & & & & b & a \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = Ax, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \text{ 2 dim}$$

$(2q) \times (2q)$ Matrix

	homogen $e^{at}\cos bt\, p_1(t) + e^{at}\sin bt\, p_2(t)$	$f = e^{\alpha t} p(t)$ $(\leq k)$	$f = e^{\alpha t}\cos \beta t\, p_1(t) +$ $+ e^{\alpha t}\sin \beta t\, p_2(t)$ $(\leq k)$ $\alpha + \beta_1 \neq a+bi$	$f = e^{at}\cos bt\, p_1(t) +$ $+ e^{at}\sin bt\, p_2(t)$ $(\leq k)$
x_1	$q-1$	k	k	$k+q$
$\vdots$				
x_{q-1}	1	k	k	$k+2$
x_q	0	k	k	$k+1$

$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + x_2 \quad (+f_1)$

$\dot{x}_2 = A_1 x_2 + x_3 \quad (+f_2)$

$\vdots$

$\dot{x}_{q-1} = A_1 x_{q-1} + x_q \quad (+f_{q-1})$

$\dot{x}_q = A_1 x_q \quad (+f_q)$

Zusammenfassung:

homogen: Vielfachheit k der Nullstelle $(k \geq 1)$

- $a \in \mathbb{R}$ ist k-fache Nullstelle:

  bei Lösung tritt auf: $t^{k-1}e^{at}, t^{k-2}e^{at}, \ldots, te^{at}, e^{at}$

  $(p(t)e^{at},$ p Polynom vom Grad $\leq k-1)$

- $a+bi$ $(b>0)$ ist k-fache Nullstelle:

  bei Lösung tritt auf: $t^{k-1}e^{at}\cos bt, t^{k-1}e^{at}\sin bt, \ldots,$
  $te^{at}\cos bt, te^{at}\sin bt,$
  $e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt$

  $(p_1(t)e^{at}\cos bt + p_2(t)e^{at}\sin bt,$ p_1, p_2 Polynome vom Grad $\leq k-1)$

inhomogen: hier setzen wir bei Vielfachheit k der Nullstelle $k \geq 0$ voraus

- Störfunktion $f = e^{at}q(t)$, q Polynom vom Grad $\leq s$

  Falls q eine k-fache Nullstelle $\Rightarrow$ Ansatz: $x(t) = e^{at}p(t)$, p Polynom vom Grad $\leq s+k$

- Störfunktion $f = e^{at}\cos bt\, q_1(t) + e^{at}\sin bt\, q_2(t)$,
  $b>0$, q_1, q_2 Polynome vom Grad $\leq s$

- Falls $a+bi$ eine k-fache Nullstelle ist:

  Ansatz: $x(t) = e^{at}\cos bt\, p_1(t) + e^{at}\sin bt\, p_2(t)$, p_1, p_2 Polynome vom Grad $\leq s+k$

insgesamt: zunächst homogenes System erfassen (nicht in Anfangsbedingung!)

Ansatz für inhomogenes System: Erst dann in Anfangsbedingung einsetzen

4.) Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung

$$x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + A_1\dot{x} + A_0 x = 0,$$

$$x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + A_1\dot{x} + A_0 x = f$$

Trick: $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}, \ldots, x_n := x^{(n-1)}$ (jeweils r-dimensionale Vektoren)

und setze $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ($n \cdot r$ dimensionaler Vektor)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \underbrace{-A_0 x - A_1 \dot{x} - \ldots - A_{n-1} x^{(n-1)}}_{-A_0 x_1 - A_1 x_2 - \ldots - A_{n-1} x_n} + f \end{pmatrix} =$$

$r \times r$ Nullmatrix — Einheitsmatrix

$$= \begin{pmatrix} 0 & id & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & id \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 & \ldots & -A_{n-2} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Diese Differenzialgleichung können wir wie zuvor lösen.

Von der Lösung $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ interessieren uns nur die ersten r-Komponenten $x := x_1$.

Beispiel:

$$\ddot{x} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 18 & -5 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -54 & -14 \end{pmatrix} x = 0$$

Anfangsbedingung müsste bis hoch $n-1$ gehen, also hier $x(0) = \ldots$ und $\dot{x}(0) = \ldots$

$x \ldots$ 2 dimensionaler Vektor

Setze $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \\ 54 & 14 & -18 & 5 \end{pmatrix} X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 54 & 14 \end{pmatrix} \underbrace{x}_{=x_1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -18 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\dot{x}}_{=x_2} \end{pmatrix}$$

„Entwicklungssatz" Entwickeln nach der 1. Zeile!

$$p(x) = \det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \oplus & \ominus & \oplus & \ominus \end{array} \\ \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1-x & 1 \\ 54 & 14 & -18 & 5-x \end{pmatrix} \end{array} = -x \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 2 & 1-x & 1 \\ 14 & -18 & 5-x \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & -x & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 54 & 14 & 5-x \end{pmatrix} =$$

„Regel von Sarrus"

$$= \ldots = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$$

Nullstellen:

	1	-6	3	26	-24
1	1	-5	-2	24	0
	⋮				

Eigenwerte: 4, 3, 1, -2

Eigenvektor zu 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 54 & 14 & -18 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2 \cdot IV + 27 \cdot I]{2 \cdot III + 3 \cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 28 & -9 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV + 7 \cdot II]{III + II} \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-9} & \cancel{9} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\4\\4\end{pmatrix}$ 4 fache, weitere Eigenvektoren: zu 1: $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ 1 fache, zu 3: $\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}$ 3 fache, zu -2: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 2 fache

Allgemeine Lösung für X: $X(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\4\\4\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} + c_4 e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$

Daher ist unsere allgemeine Lösung: $x(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_4 e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

<u>Wichtiger Spezialfall: $r=1$ (also der eindimensionale Fall)</u>

hier sind $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ 1×1-Matrizen, also reelle Zahlen

daher $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0 x = f$

wie zuvor setze $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$ und $X := \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ (n-dimensionaler Vektor)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = x^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=X}$$

charakteristisches Polynom

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-x \end{pmatrix}$$

Lemma: Es gilt $\det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1-x \end{pmatrix} = (-1)^n \left(x^n - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} x^j\right)$

<u>Beweis:</u>

Induktion nach n:

$n=1$: $\det(b_1-x) = (-1)(x-b_1)$ ✓

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ b_2 & b_1-x \end{pmatrix} = x^2 - b_1x - b_2 = (-1)^2\left(x^2 - \sum_{j=0}^{1} b_{2-j}x^j\right)$

Sei $n>2$:

$$\det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-x)\det\underbrace{\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_2 & b_1 - x \end{pmatrix}}_{\overset{\text{I.V.}}{=} (-1)^{n-1}\left(x^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-1-j} x^j\right)} + (-1)^{n-1} b_n \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \end{pmatrix}}_{=1} =$$

$$= (-1)^{n-1}\Big(x^n - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \underbrace{b_{n-1-j}}_{=n-(j+1)} x^{j+1}}_{=\sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j} x^j}\Big) + (-1)^n(-\underbrace{b_n}_{=b_{n-0}x^0}) =$$

$$= (-1)^n\left(x^n - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} x^j\right). \qquad \square$$

Proposition:

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - x \end{pmatrix} = (-1)^n\left(x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right).$$

Beweis:

$b_n = -a_0,\ b_{n-1} = -a_1, \dots, b_1 = -a_{n-1}$, also $a_j = -b_{n-j}$ für $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$$\det\begin{pmatrix} -x & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} - x \end{pmatrix} \overset{\text{Lemma}}{=} (-1)^n\Big(x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{b_{n-j}}_{=-a_j} x^j\Big) = (-1)^n\left(x^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right). \quad \square$$

Definition: Für die Differenzialgleichung $x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ nennt man $p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ das charakteristische Polynom dieser Differenzialgleichung.

(zurück zum Anfang: $\dot{x} = ax \iff \dot{x} - ax = 0 \quad p(x) = x - a$)

Falls a Nullstelle von $p(x)$: Eigenvektoren:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - a & 0 \end{array}\right)$$

$0 = \lambda_1(-a\ 1\ 0 \dots 0\ 0) + \lambda_2(0\ -a\ 1 \dots 0\ 0) + \dots + \lambda_{n-1}(0 \dots -a\ 1) =$

$= (-\lambda_1 a \quad \lambda_1 - \lambda_2 a \quad \lambda_2 - \lambda_3 a \dots \lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} a \quad \lambda_{n-1})$

$\Rightarrow \lambda_{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_{n-2} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, also diese Zeilen sind l.u.

$$\underset{\text{Rang}}{\mathrm{rg}} \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-a \end{pmatrix} \geq n-1$$

Somit sind die Eigenräume stets 1-dimensional.
Daher sind die Jordanblöcke stets so groß wie möglich, also bei k-facher Nullstelle a ist es ein $k \times k$ Block.

Zusammenfassung:

homogen: charakteristisches Polynom $p(x)$, rechnet Nullstellen aus
in homogener Lösung tritt auf: (Vielfachheit $k \geq 1$)

- a k-fache Nullstelle: $(c_{k-1}t^{k-1} + c_{k-2}t^{k-2} + \ldots + c_1 t + c_0)e^{at}$
- $a + \underbrace{b}_{>0} i$ k-fache Nullstelle: $(c_{k-1}t^{k-1} + c_{k-2}t^{k-2} + \ldots + c_1 t + c_0)e^{at}\cos bt +$
  $+ (d_{k-1}t^{k-1} + d_{k-2}t^{k-2} + \ldots + d_1 t + d_0)e^{at}\sin bt$

inhomogen: (Vielfachheit $k \geq 0$)

Störungsfunktion $f = \underbrace{p(t)}_{\text{Polynom vom Grad} \leq s} e^{at}$

- a k-fache Nullstelle: Ansatz: $x(t) = q(t)e^{at}$, q Polynom vom Grad $\leq s+k$
  (zum Vereinfachen kann man das was homogener Lösung entspricht weglassen)

$b > 0$: $f = p_1(t)e^{at}\cos bt + p_2(t)e^{at}\sin bt$

Polynome vom Grad $\leq s$

- $a + bi$ k-fache Nullstelle: Ansatz: $x(t) = q_1(t)e^{at}\cos bt + q_2(t)e^{at}\sin bt$,
  wobei q_1, q_2 Polynome vom Grad $\leq s+k$
  (Vereinfachen wie bei Nullstelle a)

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^{(15)} - 53\,x^{(14)} + 1264\,x^{(13)} - 17\,384\,x^{(12)} + 145\,089\,x^{(11)} - 659\,861\,x^{(10)} + \\ + 306\,080\,x^{(9)} + 15\,811\,768\,x^{(8)} - 98\,513\,293\,x^{(7)} + 239\,284\,593\,x^{(6)} + \\ + 174\,249\,784\,x^{(5)} - 2\,980\,305\,888\,x^{(4)} + 9\,455\,193\,675\,x^{(3)} + \\ - 15\,640\,849\,575\,\ddot{x} + 13\,949\,091\,000\,\dot{x} - 5\,338\,710\,000\,x = 0 \end{aligned}$$

charakteristisches Polynom $p(x) = x^{15} - 53x^{14} + 1264x^{13} + \ldots - 5\,338\,710\,000$

Nullstellen: 3 (5×), -4 (2×), $7 \pm 4i$ (3×) - also 6 Nullstellen, $2 \pm i$

(wären zu kompliziert mit der Hand, werden daher angegeben)

Lösung: $x(t) = c_1 t^4 e^{3t} + c_2 t^3 e^{3t} + c_3 t^2 e^{3t} + c_4 t e^{3t} + c_5 e^{3t} +$

$+ c_6 t e^{-4t} + c_7 e^{-4t} +$

$+ c_8 t^2 e^{7t} \cos 4t + c_9 t^2 e^{7t} \sin 4t + c_{10} t e^{7t} \cos 4t + c_{11} t e^{7t} \sin 4t +$

$+ c_{12} e^{7t} \cos 4t + c_{13} e^{7t} \sin 4t +$

$+ c_{14} e^{2t} \cos t + c_{15} e^{2t} \sin t.$

5.) Der Banach'sche Fixpunktsatz

$M \neq \emptyset$ metrischer Raum, Metrik $d: M \times M \to \mathbb{R}$

(1) $d(x,y) \geq 0$ $\quad$ d.. Abstand (von x zu y)

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$ (Dreiecksungleichung)

$\Rightarrow$ linker Teil der Dreiecksungleichung: $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$

Grenzwert und Stetigkeit kann man „wie gewohnt" definieren.

Eine Menge U heißt offen, falls $\forall x \in U \; \exists r > 0: \underbrace{B(x,r)}_{:= \{y : d(y,x) < r\}} \subseteq U$ offene Kugel mit Radius r um x

$\overline{B}(x,r) = \{y : d(y,x) \leq r\}$, (im Allg.: $\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r)$)
abgeschlossene Kugel

A heißt abgeschlossen, falls $\forall$ Folge (x_n) in A die konvergiert $\Rightarrow \lim x_n \in A$

Def: Sei M ein metrischer Raum, $C \subseteq M$.

(1) C heißt kompakt, falls $\forall$ offenen $(U_j)_{j \in J}$ mit $C \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ $\exists J_0 \subseteq J$ endlich mit $C \subseteq \bigcup_{j \in J_0} U_j$ (zu jeder offenen Überdeckung gibt es eine endliche Teilüberdeckung).

(2) C heißt folgenkompakt, falls $\forall$ Folgen (x_n) in C $\exists$ Teilfolge (x_{n_k}) und $\exists x_0 \in C$ mit $x_{n_k} \to x_0$ (jede Folge hat eine konvergente Teilfolge).

Def: Sei M ein metrischer Raum. Dann heißt M vollständig, falls jede Cauchyfolge in M konvergiert (in M). Daher heißt (x_n) Cauchyfolge, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n,m \geq N: d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
(metrischer Raum, der nicht vollständig ist: z.B. $\mathbb{Q}$)

Def: $A \subseteq M$ (metrischer Raum) heißt totalbeschränkt, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1, \dots, x_n \in A$ (M) sodass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$.

Satz: Sei M ein metrischer Raum und $C \subseteq M$. Dann sind äquivalent:

(1) C ist kompakt.

(2) C ist folgenkompakt.

(3) C ist vollständig und totalbeschränkt.
(in topologischen Räumen gilt das nicht)

Satz: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^r$. Dann sind äquivalent:

(1) C ist kompakt.

(2) C ist folgenkompakt.

(3) C ist beschränkt und abgeschlossen.

Angenommen $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ $[a,b]$ ist kompakt

Falls X ein kompakter metrischer Raum ist, $r \in \mathbb{N}$, definiere $C(X, \underset{\text{oder } D}{\mathbb{R}^r}) := \{f: X \to \underset{\text{oder } D}{\mathbb{R}^r} \text{ stetig}\}$

$f \in C(X, \mathbb{R}^r)$: $\|f\|_\infty := \underbrace{\sup_{x\in X}}_{=\max_{x \in X}} |f(x)| \in \mathbb{R}$ geht wegen Satz von Minimum und Maximum

$d(f,g) := \|f-g\|_\infty$
(gleichmäßige Konvergenz)

Satz: $C(X, \mathbb{R}^r)$ ist vollständig. ($\mathbb{R}^r$ ist auch vollständig)

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^r$, D abgeschlossen.

(1) $C(X,D)$ ist vollständig.

(2) Falls $x_0 \in X$, $y_0 \in D$, dann ist $C(X, D, f(x_0) = y_0) := \{f: X \to D \text{ stetig mit } f(x_0) = y_0\}$ ist vollständig.

Menge aller stetigen Funktionen

Def: Sei $F \subseteq C(X, \mathbb{R}^r)$.

(1) F heißt gleichgradig stetig in $x_0 \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x$ mit $d(x, x_0) < \delta$ $\forall f \in F$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$\delta = \delta(\varepsilon)$ ... hängt auch von x_0 ab

(2) F heißt gleichmäßig gleichgradig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y$ mit $d(x,y) < \delta$ $\forall f \in F$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

hängt nicht mehr von x_0 ab

Prop: Für X kompakt ist: F gleichgradig stetig $\Leftrightarrow$ F gleichmäßig gleichgradig stetig.

Satz: Satz von ARZELÀ - ASCOLI:

X kompakter metrischer Raum, $F \subseteq C(X, \mathbb{R}^r)$. Dann sind äquivalent:

(1) F ist kompakt

(2) F ist folgenkompakt

(3) F ist beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig.

Satz: BANACH'sche Fixpunktsatz:

Sei M ein vollständiger metrischer Raum, $T: M \to M$ eine Kontraktion (d.h. $\exists q<1$ sodass $\forall x,y \in M: d(Tx,Ty) \leq q \cdot d(x,y)$). Dann besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x_0 ($Tx_0 = x_0$). Weiters gilt

$\forall x \in M: \lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$.

Abbildung T n-Mal angewandt, also $\circ T \circ T \ldots \circ T$

Zusatz: $d(T^n x, x_0) \leq \dfrac{d(x,Tx)}{1-q} q^n$

Beweis:

1. Schritt: Behauptung: Falls es einen Fixpunkt gibt, dann ist er eindeutig bestimmt.

Beweis der Behauptung: Seien x_0, y_0 Fixpunkte ($Tx_0 = x_0$, $Ty_0 = y_0$).

$$d(\underset{Tx_0}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, \underset{Ty_0}{\overset{\shortparallel}{y_0}}) \leq \underbrace{q}_{<1} \cdot d(x_0,y_0) \Rightarrow d(x_0,y_0)=0 \Rightarrow x_0 = y_0. \qquad \diamond$$

2. Schritt: Behauptung: Sei $x \in M$. Dann ist $(T^n x)$ konvergent.

Zusatz: Weiters gilt $d(T^n x, \lim\limits_{k\to\infty} T^k x) \leq \dfrac{d(x,Tx)}{1-q} q^n$.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N: \forall n \geq N: \dfrac{d(x,Tx)}{1-q} q^n < \varepsilon$.

wäre $n=m$, dann wäre der Abstand sowieso 0 und dadurch $<\varepsilon$

Sei $n,m \geq N$. O.B.d.A $n<m$.

$$d(T^n x, T^m x) \leq d(T^n x, T^{n+1} x) + \underbrace{d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q \cdot d(T^n x, T^{n+1} x)} + \underbrace{d(T^{n+2} x, T^{n+3} x)}_{\underbrace{\leq q \cdot d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q^2 d(T^n x, T^{n+1} x)}} + \ldots + \underbrace{d(T^{m-1} x, T^m x)}_{\leq q^{m-n-1} d(T^n x, T^{n+1} x)} \leq$$

$$\leq d(T^n x, T^{n+1} x) \underbrace{(1+q+q^2+\ldots+q^{m-n-1})}_{= \frac{1-q^{m-n}}{1-q} \leq \frac{1}{1-q}} \leq \frac{1}{1-q} \underbrace{d(T^n x, T^{n+1} x)}_{\underbrace{\leq q \cdot d(T^{n-1} x, T^n x)}_{\leq q^n d(x,Tx)}} \leq$$

endliche geometrische Reihe

$$\leq \frac{d(x,Tx)}{1-q} q^n < \varepsilon$$

Deshalb ist $(T^n x)$ eine Cauchyfolge. Da M vollständig ist, ist $(T^n x)$ konvergent.

Zusatz: Setze $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} T^k x$. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $m > n$.

$$d(T^n x, T^m x) \leq \frac{d(x,Tx)}{1-q} q^n.$$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N: \forall m \geq N: d(T^m x, x_0) < \varepsilon$. Sei $m > \max\{N, n\}$.

$$d(T^n x, x_0) \leq \underbrace{d(T^n x, T^m x)}_{\leq \frac{d(x,Tx)}{1-q} q^n} + \underbrace{d(T^m x, x_0)}_{<\varepsilon} < \frac{d(x,Tx)}{1-q} q^n + \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(T^n x, x_0) \leq \frac{d(x,Tx)}{1-q} q^n. \qquad \diamond$$

3. Schritt: Behauptung: Sei $x \in M$ und sei $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} T^n x$. Dann gilt $Tx_0 = x_0$.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall n \geq N: d(T^n x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $n \geq N+1$ $(\Rightarrow n-1 \geq N)$.

$$d(x_0, Tx_0) \leq \underbrace{d(x_0, T^{n+1}x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(T^{n+1}x, Tx_0)}_{\leq \underbrace{q}_{<1} \cdot \underbrace{d(T^n x, x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow d(x_0, Tx_0) = 0 \Rightarrow Tx_0 = x_0$. ◇

4. Schritt: Überlegen, dass wir den Satz gezeigt haben

$x \in M \xRightarrow{\text{2.Schritt}} (T^n x)$ konvergiert $\xRightarrow{\text{3.Schritt}} x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} T^n x$ ist ein Fixpunkt,

1.Schritt $\Rightarrow$ Fixpunkt eindeutig. Sei $x \in M \xRightarrow{\text{2.Schritt (Zusatz)}} (T^n x)$ konvergiert

$\xRightarrow{\text{3.Schritt}} \lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$. □

6.) Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

I Intervall, I°... Innere $([a,b]^\circ = (a,b) = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)^\circ)$

Proposition: Sei I ein Intervall (in $\mathbb{R}$), $D \subseteq \mathbb{R}^r$, $t_0 \in I^\circ$, $x_0 \in D$, und sei $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$ eine stetige Funktion.

Dann gilt für eine stetige Funktion $x: I \to D$ genau dann

$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \ \forall t \in I^\circ$ und $x(t_0) = x_0$, wenn

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds \ \forall t \in I$.

(kurz: x ist Lösung von der Differenzialgleichung genau dann, wenn x Lösung von der Integralgleichung ist)

<u>Beweis:</u>

$(\Rightarrow)$: $\dot{x}$ ist stetig, $x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(x(s), s)}_{=\dot{x}(s)}\, ds \overset{HS}{=} x_0 + (x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{=x_0}) = x(t)$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$(\Leftarrow)$: $x(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(x(s), s)\, ds}_{=0} = x_0$

Sei $t \in I^\circ$. $\dot{x}(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds\right)^{\bullet} \overset{HS}{=} f(x(t), t)$. □

Def: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^r$ und sei $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion.

(1) f heißt Lipschitz-stetig in x, falls

$$\exists L \in \mathbb{R}: \forall x,y \in D, \forall t \in I: \quad |f(x,t) - f(y,t)| \leq L\,|x-y| .$$

(L... Lipschitz-konstante)

(2) f heißt lokal Lipschitz-stetig in x, falls

$\forall t \in I,\ \forall x \in D:\ \exists U, V$ offen, $t \in U$, $x \in V$ sodass $f\big|_{U \times V}$ Lipschitz-stetig ist.

Proposition: Sei $f: \overline{B}(\underbrace{x_0}_{\in \mathbb{R}^r}, \underbrace{b}_{>0}) \times [a_1, a_2] \to \mathbb{R}^r$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Dann ist f Lipschitz-stetig in x.

Proposition: Sei $\overline{B}(x_0, b) \subseteq B(x_0, \tilde{b})$, $[a_1, a_2] \subseteq (c_1, c_2)$,

$f: B(x_0, \tilde{b}) \times (c_1, c_2) \to \mathbb{R}^r$ eine stetig differenzierbare Funktion

(d.h. alle partiellen Ableitungen von f sind stetig). Dann ist f

Lipschitz-stetig in x auf $\overline{B}(x_0, b) \times [a_1, a_2]$.

<u>Falscher Beweis:</u>

$$|f(x,t) - f(y,t)| \overset{\text{MWS}}{=} |f'(\xi, t)(x-y)| \leq M\,|x-y|$$

Mittelwertsatz

Fehler: im Mehrdimensionalen ist MWS falsch!

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von PICARD und LINDELÖF:

Satz: Seien $a, b > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^r$. Weiters sei

$f: \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ eine stetige Funktion, die lokal

Lipschitz-stetig in x ist. Außerdem sei $M > 0$ so, dass

$|f(x,t)| \leq M \quad \forall (x,t) \in \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$. Setze $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

geschlossene Kugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius b

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Funktion

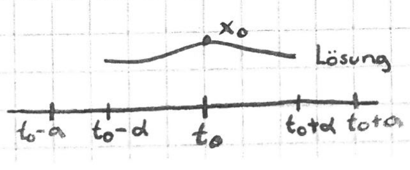
$x: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t), t)\ \forall t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ und $x(t_0) = x_0$.

Weiters gilt $|x(t) - x_0| \leq M\,|t - t_0|\ \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ (insbesondere

$x(t) \in \overline{B}(x_0, b)$).

Eine Funktion, die stetig und lokal Lip-stetig. Dann gibt es lokal (durch ein Intervall eingeschränkt) eine eindeutig bestimmte Lösung der Differenzialgleichung und ich kann angeben, wie weit dieses „lokal" geht.

Wie sehen wir, dass die Funktion Lip-stetig ist? ist <u>stetig differenzierbar</u>



Beweis: f ist stetig und lokal Lipschitz-stetig in $x \Rightarrow$ f ist Lipschitz-stetig in x mit Lipschitz-Konstante $L>0$.

t_1, x_1 sind Startbedingung statt t_0, x_0

1. Schritt: Seien t_1, x_1 so, dass $|t_1 - t_0| < \alpha$ und $|x_1 - x_0| \leq M|t_1 - t_0|$.

Setze $\beta := \min\left\{a, \frac{b}{M}, \alpha - |t_1 - t_0|, \frac{1}{2L}\right\} > 0$.

/geschlossene Kugel mit Mittelpunkt x_1 und Radius $b - \ldots$

Definiere $\mathcal{A} := C\left([t_1-\beta, t_1+\beta], \overline{B}(x_1, b - M|t_1 - t_0|), x(t_1) = x_1\right)$.

(Menge der stetigen Funktionen in dem Bereich)

$\mathcal{A}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Für $x \in \mathcal{A}$ definiere $Tx(t) := x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds$. T ist Integraloperator

Behauptung:

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}. \\ (2)\ \text{Für } y_1, y_2 \in \mathcal{A} \text{ gilt: } \|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty \\ (3)\ \text{Für } y \in \mathcal{A} \text{ und } t \in [t_1-\beta, t_1+\beta] \text{ gilt } |Ty(t) - x_1| \leq M|t - t_1|. \end{array}}$$

T ist eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante 1/2

Beweis der Behauptung:

Betrag außen ist notwendig, weil das Integral negativ wird, wenn $t < t_1$

x_1 fällt weg

(3) Sei $y \in \mathcal{A}$ und $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$: $|Ty(t) - x_1| = \left|\int_{t_1}^{t} f(y(s),s)\,ds\right| \leq \left|\int_{t_1}^{t} \underbrace{|f(y(s),s)|}_{\leq M}\,ds\right| \leq$

Integral = Fläche, hier vom Rechteck $\Rightarrow$ = Länge · Breite „aus der VS" siehe Voraussetzung (so haben wir M definiert)

$\leq M|t - t_1|$.

(1) Sei $y \in \mathcal{A}$: $Ty(t_1) = x_1 + \underbrace{\int_{t_1}^{t_1} f(x(s),s)\,ds}_{=0} = x_1 \in \mathcal{A}$ (Mittelpunkt der Kugel)

d.h. Abstand von Ty und Kugelmittelpunkt x_1 ist $\leq$ Kugelradius $b - M|t_1 - t_0|$

Sei $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$: $|Ty(t) - x_1| \overset{\text{siehe (3)}}{\leq} M\underbrace{|t - t_1|}_{\leq \beta \leq \alpha - |t_1 - t_0|} \leq M\underbrace{\alpha}_{\leq \frac{b}{M}} - M|t_1 - t_0| \leq \underbrace{b - M|t_1 - t_0|}_{\text{Radius der Kugel}}$, also $Ty \in \mathcal{A}$.

siehe Voraussetzung

Element der Kugel also auch $\in \mathcal{A}$

(2) Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$ und sei $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$: wegen $t \in [\ldots]$

wegen Linearität vom Integral; Dreiecksungleichung weil metrischer Raum

$|Ty_1(t) - Ty_2(t)| = \left|\int_{t_1}^{t} \left(f(y_1(s),s) - f(y_2(s),s)\right) ds\right| \leq \left|\int_{t_1}^{t} \underbrace{|f(y_1(s),s) - f(y_2(s),s)|}_{\leq L\underbrace{|y_1(s) - y_2(s)|}_{\leq \|y_1 - y_2\|_\infty}}\,ds\right| \leq$

Def von T(x)f verwenden; $x_1 - x_1$ kürzt sich weg; wegen Lipschitz-stetig P2

„Integral aus der VS"

$\leq \underbrace{|t - t_1|}_{\leq \beta \leq \frac{1}{2L}} L\|y_1 - y_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$

Supremum (gilt für beliebige, also auch sup)

$\Rightarrow \|Ty_1 - Ty_2\|_\infty = \sup_{t \in [t_1-\beta, t_1+\beta]} |Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$. ◇

gerade gezeigt:

2. Schritt: T ist Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $\mathcal{A}$. $\Rightarrow$ Voraussetzung für B.F.

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x.

$x(t) = Tx(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds$.

Integralgleichung

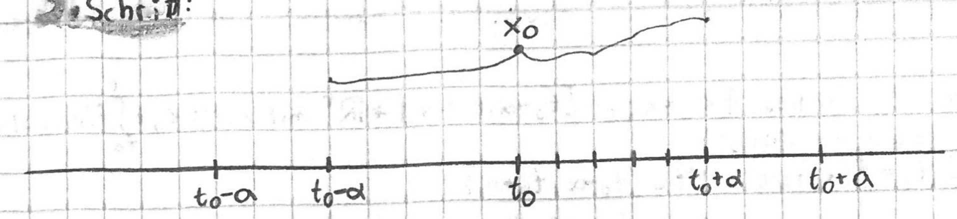
Behauptung: $\boxed{\text{Auf } [t_1-\beta, t_1+\beta] \text{ gibt es eine eindeutige Lösung von } x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds.}$

Beweis der Behauptung: Sei y eine Lösung der Integralgleichung. $Ty(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(y(s),s)\,ds = y(t)$

Also $Ty = y \Rightarrow y = x$. weil Fixpunkt laut B.F. eindeutig ist ◇

$\Rightarrow$ Lösung der Integralgleichung ist eindeutig

3. Schritt:



Sei k die kleinste natürliche Zahl mit $k\frac{1}{2L} \geq \alpha$.

Für $j \in \{1,\dots,k-1\}$ setze $\alpha_j := \frac{j}{2L}$ und $\alpha_k := \alpha$.

<u>Behauptung</u>: $\boxed{\text{Für } j\in\{1,2,\dots,k\} \text{ gibt es } x_j : [t_0-\alpha_j, t_0+\alpha_j] \to \mathbb{R}^r \text{ mit } x_j(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_j(s),s)\,ds. \text{ Weiters gilt } |x_j(t)-x_0| \leq M|t-t_0|.}$

erweitern schrittweise Intervall, auf dem 2 gilt: $\Rightarrow$ d.h. zz. es gibt eindeutige Lösungen der Integralgleichung im Intervall $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

<u>Beweis der Behauptung</u>: Induktion nach j:

$j=1$: 2. Schritt $\Rightarrow \exists x_1 : \underbrace{[t_0-\alpha_1, t_0+\alpha_1]}^{\text{beginne mit diesem Intervall}} \to \mathbb{R}^r$ mit $x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_1(s),s)\,ds$

Sei $j>1$: Nach Induktionsvoraussetzung: $\exists x_{j-1} : [t_0-\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_{j-1}] \to \mathbb{R}^r$

mit $x_{j-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_{j-1}(s),s)\,ds$. Erweitere auf dieses Intervall nach rechts

$(t_0+\alpha_{j-1}, x_{j-1}(t_0+\alpha_{j-1})) \xRightarrow{\text{2. Schritt}} \exists u_1 : [\overbrace{(t_0+\alpha_{j-1})}^{\text{neuer Mittelpunkt des Intervalls statt } t_0} - \underbrace{(\alpha_j-\alpha_{j-1})}_{=t_0}, \underbrace{(t_0+\alpha_{j-1})+(\alpha_j-\alpha_{j-1})}_{=t_0-\alpha_j}] \to \mathbb{R}^r$

Lösung $u_1(t)$ des neuen Intervalls existiert!

mit $u_1(t) = x_{j-1}(t_0+\alpha_{j-1}) + \int_{t_0+\alpha_{j-1}} f(u_1(s),s)\,ds$.

Und auf dieses nach links:

$(t_0-\alpha_{j-1}, x_{j-1}(t_0-\alpha_{j-1})) \xRightarrow{\text{2. Schritt}} \exists u_2 : [\underbrace{(t_0-\alpha_{j-1})-(\alpha_j-\alpha_{j-1})}_{=t_0-\alpha_j}, (t_0-\alpha_{j-1})+(\alpha_j-\alpha_{j-1})] \to \mathbb{R}^r$

Lösung $u_2(t)$ des neuen Intervalls existiert!

mit $u_2(t) = x_{j-1}(t_0-\alpha_{j-1}) + \int_{t_0-\alpha_{j-1}} f(u_2(s),s)\,ds$.

Definiere $x_j : [t_0-\alpha_j, t_0+\alpha_j] \to \mathbb{R}^r$ durch

$$x_j(t) := \begin{cases} x_{j-1}(t), & \text{falls } t\in[t_0-\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_{j-1}], \quad \dots \text{ursprüngliches Intervall} \\ u_1(t), & \text{falls } t\in(t_0+\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_j], \quad \dots \text{Erweiterung des Intervalls nach rechts bis } \alpha_j \\ u_2(t), & \text{falls } t\in[t_0-\alpha_j, t_0-\alpha_{j-1}) \quad \dots \text{nach links bis } \alpha_{j-1} \end{cases}$$

$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_j(s),s)\,ds$: zz. das $= x_j$, bzw. x_j ist Lösung der Integralgleichung für das ganze erweiterte Intervall

Beachte:
Grenzen vom Integral zeigen an, in welchem Intervall s ist
$\Rightarrow$ davon hängt $x_j(s) = \dots$ ab!

1. Fall: $t\in[t_0-\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_{j-1}]$: $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\underbrace{x_j(s)}_{=x_{j-1}(s)},s)\,ds = x_{j-1}(t) = x_j(t)$.
siehe IV
siehe Def $x_j(t) := t_0+\alpha_{j-1}$

2. Fall: $t\in(t_0+\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_j]$: $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_j(s),s)\,ds \overset{*}{=} x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\alpha_{j-1}} f(\underbrace{x_j(s)}_{=x_{j-1}(s)},s)\,ds + \int_{t_0+\alpha_{j-1}}^{t} f(\underbrace{x_j(s)}_{=u_1(s)},s)\,ds =$

$* \; \int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t_0+\alpha_{j-1}} \dots + \int_{t_0+\alpha_{j-1}}^{t} \dots$

$= \underbrace{x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\alpha_{j-1}} f(x_{j-1}(s),s)\,ds}_{=x_{j-1}(t_0+\alpha_{j-1}) \text{ siehe IV}} + \underbrace{\int_{t_0+\alpha_{j-1}}^{t} f(u_1(s),s)\,ds}_{=u_1(t)-x_{j-1}(t_0+\alpha_{j-1}) \text{ siehe } u_1(t) = \text{ oben}} = u_1(t) = x_j(t)$

ähnlich wie 2. Fall:

3. Fall: $t_0\in[t_0-\alpha_j, t_0-\alpha_{j-1})$: $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds = \underbrace{x_0 + \int_{t_0}^{t_0-\alpha_{j-1}} f(\underbrace{x_j(s)}_{=x_{j-1}(s)},s)\,ds}_{=x_{j-1}(t_0-\alpha_{j-1})} + \underbrace{\int_{t_0-\alpha_{j-1}}^{t} f(\underbrace{x_j(s)}_{=u_2(s)},s)\,ds}_{=u_2(t)-x_{j-1}(t_0-\alpha_{j-1})} =$

$= u_2(t) = x_j(t)$.

führt auf

2. Behauptung zeigen:

$\underbrace{|x_j(t)-x_0|}_{=\int_{t_0} f(x_j(s),s)\,ds + x_0 \text{ (gerade gezeigt)}} = \left|\int_{t_0}^{t} f(x_j(s),s)\,ds\right| \overset{\triangle\text{ Ungleichung}}{\leq} \left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(x_j(s),s)|}_{\leq M} ds\right| \leq M|t-t_0|$. $\diamond$

$\leq M$ (so haben wir M definiert, siehe Voraussetzung) $\Rightarrow$ Integral aus der VS

4. Schritt: Existenz & Eindeutigkeit der Lösung der Differenzialgleichung zeigen:

Existenz: Wegen des 3. Schrittes $\exists x\ (=x_\xi): [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$.

(Lösung der Int.gl. → Lösung der Diff.gl.)

$\Rightarrow x$ stetig und $\dot x(t) = f(x(t),t)\ \forall t\in(t_0-\alpha,t_0+\alpha)$

indirekt:

Eindeutigkeit: Angenommen (es gäbe 2 Lösungen x, y verschieden voneinander) $x,y:[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\to\mathbb{R}^r$ stetig, $\dot x(t)=f(x(t),t)$,

$\dot y(t)=f(y(t),t)\quad \forall t\in(t_0-\alpha,t_0+\alpha)$, $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=x_0$ und $x\neq y$.

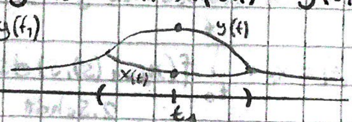
Daher $\exists t$: $x(t)\neq y(t)$ (sind an mind. 1 Stelle verschieden). Es kann $t<t_0$ oder $t>t_0$ gelten. O.B.d.A können wir $t>t_0$ annehmen.

$t_1 := \inf \underbrace{\{t\in(t_0,t_0+\alpha]: x(t)\neq y(t)\}}_{\neq\emptyset,\text{ nach unten beschränkt}}$ t_1: Infimum der Punkte, wo sich x und y unterscheiden (untere Grenze)

Behauptung: $\boxed{x(t_1)=y(t_1)}$

Beweis der Behauptung (wieder indirekt): Angenommen $x(t_1)\neq y(t_1)$. → x und y sind in einer Umgebung um t_1 verschieden

Setze $\varepsilon := \frac12 |x(t_1)-y(t_1)| > 0$. (weil $x(t_1)\neq y(t_1)$)



x,y stetig (weil Lösung einer Differenzialgleichung (siehe Existenz)) $\Rightarrow \exists\delta>0$ mit: $\forall t\in(t_1-\delta,t_1+\delta)$: $|x(t)-x(t_1)|<\varepsilon$ und $|y(t)-y(t_1)|<\varepsilon$.

1. Fall: $t_1=t_0 \Rightarrow x(t_1)=x(t_0) \overset{!}{=} x_0 = y(t_0)=y(t_1)$ (Zeile nach „Eindeutigkeit") Widerspruch!

2. Fall: $t_1>t_0$: Wähle t so, dass $\max\{t_0,t_1-\delta\}<t<t_1$.

kleiner geht nicht, weil ja $t>t_0$

$|t-t_1|<\delta$ (weil $t\in(t_1-\delta,t_1+\delta)$) und $x(t)=y(t)$ (weil $t<t_1$ (t_1 = das Infimum der Punkte, wo sich x und y unterscheiden)) $\Longrightarrow 2\varepsilon \overset{\text{Def }\varepsilon\text{ oben}}{=} |x(t_1)-y(t_1)| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{|x(t_1)-x(t)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|\underbrace{x(t)}_{=y(t)}-y(t_1)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$

Widerspruch!

Somit ist $x(t_1)=y(t_1)$. ◊

d.h. am Infimum der Punkte, wo sich x und y unterscheiden, ist $x=y$

Insbesondere: $t_1<t_0+\alpha$ sonst gäbe es in $(t_0,t_0+\alpha]$ keine Punkte mehr, wo $x(t)\neq y(t)$. (siehe $t_1:=$)

Setze $x_1 := x(t_1)$ $(=y(t_1))$ und setze $\beta := \min\{\frac{1}{2L}, \alpha-|t_1-t_0|\}>0$ (weil $\frac{1}{2L}>0$ und $\alpha-|t_1-t_0|>0$; weil $L>0$)

Nach dem 2. Schritt $\exists!$ (wichtig: genau ein!) $u: [t_1-\beta,t_1+\beta]\to\mathbb{R}^r$ mit $u(t)=x_1+\int_{t_1}^t f(u(s),s)\,ds$.

x, y sind Lösungen der Integralgleichung (weil sie Lösungen der Differenzialgleichung sind)

weil es nur 1 Lösung u gibt

$\Rightarrow \forall t\in[t_1-\beta,t_1+\beta]: x(t)=y(t)$ ↯

Nachdem $t_1=\inf\{t\in(t_0,t_0+\alpha]: x(t)\neq y(t)\}$ ist, $\exists t\in[t_1-\beta,t_1+\beta]: x(t)\neq y(t)$. (eig. $\in (t_1,t_1+\beta]$)

sonst wäre t_1 ja nicht die größte untere Grenze

Widerspruch! Können nicht überall gleich sein (oben) und sich irgendwo unterscheiden (↯).

Somit ist die Lösung eindeutig.

□

Beispiel:

$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$, $x(0)=0$. Existenzsatz kann nicht angewandt werden, weil $\dot{x}$ zwar stetig ist, aber nicht stetig differenzierbar, weil die Ableitung Konstante $\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ bei 0 nicht stetig ist. ODER links gezeigt!

$x(t)=0$ und $x(t)=t^3$ sind Lösungen $\Rightarrow$ keine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ $3x^{\frac{2}{3}}$ ist nicht Lipschitz-stetig

Existenzsatz von PEANO:

Satz: f ist stetig. Dann gibt es lokal (mit selben α wie im Existenz- und Eindeutigkeitssatz) eine Lösung von $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$.

Unterschied zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz: muss nicht lokal Lipschitz-stetig sein

(Muss aber nicht mehr eindeutig sein.)

(Es gilt: $|x(t)-x_0| \leq M|t-t_0|$.)

Beweisidee:

Approximationssatz von STONE-WEIERSTRASS

$\Rightarrow \exists (f_n)$ von Lipschitz-stetiger Funktion mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

$\exists x_n$ Lösung der Differenzialgleichung und Integralgleichung für f_n.

$C := \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ abgeschlossen

C abgeschlossen, wir zeigen C ist beschränkt und gleichgradig stetig

$\xRightarrow{\text{Arzelà-Ascoli}}$ C kompakt $\Rightarrow$ C folgenkompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x$ $(\in C)$

Lösung Intgl. für $f_{n_k} \to f$

Man zeigt x ist Lösung der Integralgleichung für f.

$\Rightarrow \dot{x}(t) = f(x(t),t)$.

$\square$

7.) Lösungsmethoden

1: Trennung der Variable

Man formt die Differenzialgleichung auf $f_1(x)\,\dot{x} = f_2(t)$ um.

Man berechnet $F_1(x), F_2(t)$, so, dass $F_1' = f_1$, $\dot{F}_2 = f_2$.

Dann erhält man dadurch: $F_1(x(t)) = F_2(t) + c$ eine Lösung.

Beweis:

$$f_2(t) = (F_2(t)+c)^{\bullet} = (F_1(x(t)))^{\bullet} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{F_1'}_{=f_1}(x(t))\,\dot{x}(t) = f_1(x(t))\,\dot{x}(t). \quad \square$$

Beispiel:

$\dot{x} = 8t^3 e^x$, $x(0) = \log 3$

↳ Gibt es eine Lösung? Verwende Existenz- und Eindeutigkeitssatz!
Funktion ist stetig und lokal Lipschitz-stetig (stetig differenzierbar) → gibt eine Lösung

$e^{-x}\dot{x} = 8t^3$, $\quad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$, $\quad \int 8t^3\,dt = 2t^4$

$-e^{-x} = 2t^4 + \tilde{c} \iff e^{-x} = -2t^4 + c \iff -x = \log(c - 2t^4) \iff \overset{\text{allgemeine Lösung:}}{\underline{x(t) = -\log(c - 2t^4)}}$

$\log 3 = x(0) = -\log c \iff \log c = -\log 3 = \log \frac{1}{3} \iff c = \frac{1}{3}$, also $\underline{x(t) = -\log\left(\frac{1}{3} - 2t^4\right)}$

formal (unexakt): $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$e^{-x}\,dx = 8t^3\,dt$, $\quad \int e^{-x}\,dx = \int 8t^3\,dt$

$8t^3 e^x$ ist C^1 $\Rightarrow$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x

$a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $M = 100$

auf $[-1,1] \times [\underbrace{\log 3 - \tfrac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}}, \underbrace{\log 3 + \tfrac{1}{2}}_{\leq 2}]$

$|8t^3 e^x| \leq 8\underbrace{e^2}_{\leq 9} \leq 72 \leq 100$

$\alpha := \min\{\underset{1}{\overset{\shortparallel}{a}}, \underbrace{\tfrac{b}{M}}_{=\frac{1/2}{100} = \frac{1}{200}}\} = \frac{1}{200} \quad (= 0{,}005)$

Wir erhalten also eine eindeutige Lösung auf $[-\frac{1}{200}, \frac{1}{200}]$.

Wo ist $-\log\left(\frac{1}{3} - 2t^4\right)$ wirklich eine Lösung?

$\frac{1}{3} - 2t^4 = 0 \iff t = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$, d.h. wir haben eine eindeutige Lösung auf $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{6}}, \underbrace{\sqrt[4]{\frac{1}{6}}}_{\approx 0{,}63894310425}\right)$

weil wir nicht den Logarithmus von 0 oder von negativen Zahlen berechnen können

Beispiel:

$$\dot{x} = \frac{x \cos t}{1+x^2}, \quad x(0)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+x\right)\dot{x} = \cos t$$

$$\log x + \frac{x^2}{2} = \sin t + \tilde{c} \Leftrightarrow \log x^2 + x^2 = 2\sin t + c$$

$$x(0)=1 \Rightarrow 1 = c \Rightarrow \log x(t)^2 + x(t)^2 = 2\sin t + 1$$

... Lösung in IMPLIZITER FORM
EXPLIZITE FORM wäre kompliziert zu berechnen, daher lassen wir es implizit stehen und formen nicht um

2: Exakte Differenzialgleichung

Im Allgemeinen haben wir eine Differenzialgleichung der Form $f_1(x,t)\dot{x} + f_2(x,t) = 0$.

So eine Differenzialgleichung heißt exakt, falls es eine Stammfunktion $F(x,t)$ gibt, d.h. $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \;\; \frac{\partial F}{\partial t}\right) = (f_1 \;\; f_2)$ (zuerst Stammfunktion berechnen und aufschreiben dann erst die Lösung!)

Man erhält dann durch $F(x(t),t) = c$. (= Lösung)

Beweis:

$$0 = \dot{c} = (F(x(t),t))^{\cdot} \overset{\text{mehrdimensionale Kettenregel}}{=} \underbrace{dF_{(x(t),t)}}_{=\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{=f_1} \; \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{=f_2}\right)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = f_1(x(t),t)\,\dot{x}(t) + f_2(x(t),t). \quad \square$$

formale Schreibweise: $f_1(x,t)\,dx + f_2(x,t)\,dt = 0$

Man nennt $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dx + \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt$ das exakte Differenzial von $F(x,t)$.

Wie bekommt man F?

1. Methode: Fixiere (x_0, t_0). Für (x,t) bestimme Kurve $c(s)$, $0 \le s \le 1$ mit $c(0) = (x_0, t_0)$, $c(1) = (x,t)$. Berechne $F(x,t) := \int_c \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$$\left(= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} f_1(c(s)) \\ f_2(c(s)) \end{pmatrix}, \dot{c}(s) \right\rangle ds \right)$$

2. Methode: Man integriert $f_1(x,t)$ nach x ($f_2(x,t)$ nach t).

Man erhält $\tilde{F}(x,t) + c(t)$ $\left(\tilde{F}(x,t) + c(x)\right)$.

Leite das nach t (x) ab und setze es $= f_2$ ($= f_1$).

$$f_2(x,t) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(x,t) + \dot{c}(t) \quad \left(f_1(x,t) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,t) + c'(x)\right).$$

Erhalte $F(x,t) = \tilde{F}(x,t) + c(t)$ $\left(\tilde{F}(x,t) + c(x)\right)$.

Beispiel:

$$x\dot{x} = -t \Leftrightarrow x\dot{x} + t = 0$$

$$F = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c(t),\quad t = \frac{\partial F}{\partial t} = \dot{c}(t) \Leftrightarrow c(t) = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}$$

$$F(x,t) = \frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{x(t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} = \tilde{c} \Leftrightarrow x(t)^2 + t^2 = c \quad \left(x(t) = \sqrt[2]{c-t^2}\right)$$

Wie sieht man, ob eine Differenzialgleichung exakt ist?

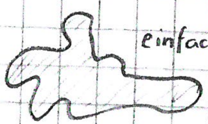
Angenommen f_1, f_2, C^1 (stetig diff.). Falls $\exists F$, dann ist F C^2.

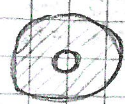
Satz vom Schwarz: $$\underbrace{\frac{\partial F^2}{\partial x \partial t}}_{= \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{=f_2}\right)} = \underbrace{\frac{\partial F^2}{\partial t \partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{=f_1}\right)}$$

Differenzialgleichung exakt $\Rightarrow$ Integrabilitätsbedingung (IB) $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial t}$

Im Allgemeinen: IB $\not\Rightarrow$ Differenzialgleichung exakt

Falls G einfach zusammenhängend ist (es hat keine Löcher), dann gilt: IB $\Rightarrow$ Diffgl. exakt.





3: Integrierender Faktor

Man versucht $f_1(x,t)\dot{x} + f_2(x,t) = 0$ mit einer Funktion $g(x,t)$ zu multiplizieren, sodass die Differenzialgleichung exakt wird.

$$f_1 g\dot{x} + f_2 g = 0.$$

IB: $$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(f_1 g)}_{g\cdot\frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1\frac{\partial g}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 g) = g\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2\frac{\partial g}{\partial x}$$

partielle Differenzialgleichung für g

Es geht gut, falls es einen Integrierenden Faktor g gibt, der nicht von t oder nicht von x abhängt.

Beispiel:

$\dot{x} = -\frac{x}{3t-4x}$. Suche integrierenden Faktor F, der nicht von t abhängt.

$(3t-4x)\dot{x} + x = 0.$

Suche $g(x)$, sodass $g(\ldots)$ exakt wird.

$$g(x)(3t-4x)\dot{x} + g(x)x = 0$$

$$g(x)\,3 = \frac{\partial}{\partial t}\left(g(x)\,(3t-4x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\,x\right) = g'(x)\,x + g(x)$$

$$\Leftrightarrow g'\,x = 2g \Leftrightarrow \frac{g'}{g} = \frac{2}{x}$$

$$\log g = 2\log x \Leftrightarrow g(x) = e^{2\log x} = (\underbrace{e^{\log x}}_{=x})^2 = x^2$$

$$\rightarrow (3t-4x)\,\dot{x} + x = 0,\quad g(x) = x^2$$

$$(3tx^2 - 4x^3)\,\dot{x} + x^3 = 0$$

$$F = \int (3tx^2 - 4x^3)\,dx = tx^3 - x^4 + c(t)$$

$$x^3 = \frac{\partial F}{\partial t} = x^3 + \dot{c}(t) \Rightarrow \dot{c}(t) = 0 \Rightarrow c(t) = 0$$

$$F(x,t) = tx^3 - x^4$$

Lösung: $t\,x(t)^3 - x(t)^4 = C$

4: Lineare Differenzialgleichung

homogenes System lösen, inhomogenes System lösen

$\dot{x} = A(t)\,x + f(t)$ ... Normalerweise stets $A(t)$, $f(t)$ stetig.

$h(x,t) = A(t)\,x + f(t)$ ist Lipschitz-stetig in x, da $|h(x,t) - h(y,t)| \leq \underbrace{\|A(t)\|}_{\leq C} |x-y|$ weil stetig → hat Maximum

r... Dimension, n... Ordnung der Differenzialgleichung

- $r=1, n=1$: homogenes System: $\dot{x} = a(t)\,x$ (Zahl, nicht Matrix) ... mit Trennung der Variable

  inhomogenes System: Variation der Konstante

  homogen: $x(t) = c\,e^{\cdots}$ Ansatz: $x(t) = c(t)\,e^{\cdots}$

Beispiel:

$$\dot{x} = 2tx + e^{t^2}$$

homogen: (Trennung der Variable)

$$\dot{x} = 2tx \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x} = 2t,\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log x,\quad \int 2t\,dt = t^2$$

$$\log x = t^2 + \tilde{c} \Leftrightarrow x(t) = e^{t^2}\underbrace{e^{\tilde{c}}}_{c} = c\,e^{t^2}$$

inhomogen: (Variation der Konstante)

$$x(t) = c(t)\,e^{t^2} \quad \text{Ableiten}$$

$$\underbrace{2tx + e^{t^2}}_{\text{Angabe}} = \dot{x} = \dot{c}(t)\,e^{t^2} + c(t)\,e^{t^2}\,2t$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = 1 \Rightarrow c(t) = \int 1\,dt = t \Rightarrow x(t) = c(t)\,e^{t^2} = t\,e^{t^2}$$

Lösung: $x(t) = t\,e^{t^2} + c\,e^{t^2}$

- $r>1,\ n=1$: Es gibt keine allgemeine Lösungsmethode.

Proposition: Für $\dot{x}=A(t)x$ ist der Lösungsraum r-dimensional.

Beweis:

j-ter Einheitsvektor: überall 0, in der j-ten Komponente 1

Für $j\in\{1,\dots,r\}$ sei $x_{(j)}(t)$ Lösung von $\dot{x}=A(t)x$, $x(t_0)=e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}j$. $B:=\{x_{(1)},\dots,x_{(r)}\}$.

l.u. $0=\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)} \Rightarrow 0=\sum_{j=1}^r \lambda_j \underbrace{x_{(j)}(t_0)}_{=e_j}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_r=0$

Deshalb ist B l.u..

Erzeugendensystem: Sei x eine Lösung von $\dot{x}=A(t)x$.

$x(t_0)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}$. Setze $y:=\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)}$. $y(t_0)=0$. $\dot{y}=\underbrace{\dot{x}}_{=A(t)x}-\sum_{j=1}^r \lambda_j \underbrace{\dot{x}_{(j)}}_{=A(t)x_{(j)}}=A(t)\underbrace{\left(x-\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)}\right)}_{=y}$

0 ist Lösung

$\dot{0}=A(t)\,0$.

Wegen der Eindeutigkeit muss $0=y=x-\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)} \Rightarrow x=\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)}$.

Somit ist B ein Erzeugendensystem, also eine Basis. $\square$

Inhomogenes System kann man mit Variation der Konstante lösen.

Wenn wir r Lösungen $x_{(1)},\dots,x_{(r)}$ haben, wie können wir feststellen, dass wir eine Basis haben?

Proposition: Es sind äquivalent:

(1) $\{x_{(1)},\dots,x_{(r)}\}$ ist Basis der Lösungen von $\dot{x}=A(t)x$.

(2) $\forall t$: $\det\left(x_{(1)}(t)\ \ x_{(2)}(t)\ \dots\ x_{(r)}(t)\right)\neq 0$.

(3) $\exists t$: $\det\left(x_{(1)}(t)\ \ x_{(2)}(t)\ \dots\ x_{(r)}(t)\right)\neq 0$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (3): ✓

(3) $\Rightarrow$ (2): (Indirekter Beweis) Angenommen $\exists t$ mit $\det\left(x_{(1)}(t)\ \dots\ x_{(r)}(t)\right)=0$

$\Rightarrow 0=\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)}(t)$, wobei nicht alle $\lambda_j=0$

Setze $y:=\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)} \Rightarrow \dot{y}=A(t)y,\ y(t)=0$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist $\underbrace{y}_{\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)}}=0$

$\Rightarrow \forall s$: $\sum_{j=1}^r \lambda_j x_{(j)}(s)=0$

$\Rightarrow \det\left(x_{(1)}(s)\ \dots\ x_{(r)}(s)\right)=0$ Widerspruch!

(2) $\Rightarrow$ (1): ✓

$\square$

- **$r=1, n>1$:** Lösungsraum ist n-dimensional, inhomogen mit Variation der Konstante. $x_{(1)}, \dots, x_{(r)}$ Lösungen

Def:

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) & x_{(2)}(t) & \cdots & x_{(n)}(t) \\ \dot{x}_{(1)}(t) & \dot{x}_{(2)}(t) & \cdots & \dot{x}_{(n)}(t) \\ \ddot{x}_{(1)}(t) & \ddot{x}_{(2)}(t) & \cdots & \ddot{x}_{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{(1)}^{(n-1)}(t) & x_{(2)}^{(n-1)}(t) & \cdots & x_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$ heißt die WROŃSKI-Determinante

Proposition: Es sind äquivalent:

(1) $\{x_{(1)}, \dots, x_{(n)}\}$ ist Basis

(2) $\forall t: \; W(t) \neq 0.$

(3) $\exists t: \; W(t) \neq 0.$

5: Bernoulli'sche Differenzialgleichung

$\dot{x} = a(t)\,x + b(t)\,x^{\alpha}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1)$

Man setzt $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$

Beispiel:

$\dot{x} = -x + 6t\,x^3 \quad (\alpha = 3)$ $\quad$ bei $\sqrt{x} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ z.B.

Setze $u := x^{-2} \quad (\Rightarrow x = \frac{1}{u^2})$

$\dot{u} = (x^{-2})^{\cdot} = -2x^{-3}\underbrace{\dot{x}}_{=-x+6tx^3} = 2\overbrace{x^{-2}}^{=u} - 12t$

x(t), daher innere Ableitung

$\dot{u} = 2u - 12t$

homogen: $\dot{u} = 2u \Rightarrow u = ce^{2t}$

inhomogen: Variation der Konstante: Setze $u(t) = c(t)\,e^{2t}$

$\underbrace{2\cancel{c(t)e^{2t}}}_{u} - 12t = \dot{u} = \dot{c}(t)\,e^{2t} + \cancel{c(t)e^{2t}}\,2 \Rightarrow \dot{c}(t) = -12te^{-2t}$

$\Rightarrow c(t) = \int(-12t\underbrace{e^{-2t}}_{=(-\frac{1}{2}e^{-2t})'})dt \overset{\text{partielle Integration}}{=} 6te^{-2t} - \int 6e^{-2t}dt = (6t+3)e^{-2t} \Rightarrow u(t) = 6t+3$

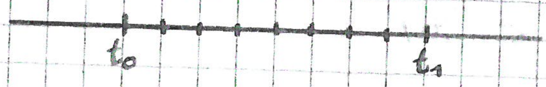
$\Rightarrow u(t) = 6t + 3 + ce^{2t}$

$\Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{\sqrt[2]{6t+3+ce^{2t}}}$

8.) Numerische Lösungsmethoden

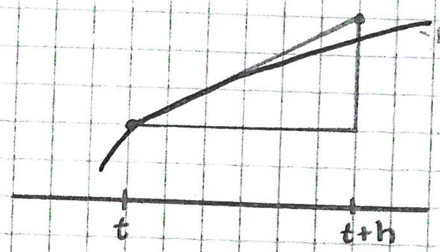
Euler-Verfahren:

Wir haben: $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$. Wir wollen $x(t_1)$ bestimmen.



$h := \frac{t_1 - t_0}{n}$ ... Schrittweite

Wir bestimmen $x(t+h)$ aus $x(t)$:



$$x(t+h) \approx x(t) + h \underbrace{\dot{x}(t)}_{= f(x(t),t)}$$

Euler Verfahren: $x(t+h) \approx x(t) + h \cdot f(x(t),t)$

Fehler: $\leq C \cdot h \quad (= C_1 \frac{1}{n})$

Beispiel:

$\dot{x} = x$, $x(0) = 1$. Wir wollen $x(1)$ bestimmen.

(Siehe Einleitung: Lösung: $x(t) = ce^t \Rightarrow$ weil $x(0) = 1 = c$, $x(t) = e^t \Rightarrow x(1) = e \approx 2{,}7182818284$

Euler-Verfahren: $n=1$: $x(1) \approx \underbrace{x(0)}_{=1} + 1 \cdot \underbrace{f(x(0),0)}_{=1} = 2$

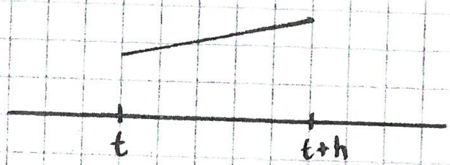
$f(x,t) = x$

$n = 100$: Fehler $\leq 1{,}4 \cdot 10^{-2}$

$n = 1000$: Fehler $\leq 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ d.h. nach 10 Schritten ca. 1 Stelle mehr

→ Problem: konvergiert langsam, daher anderes Verfahren:

HEUN - Verfahren:



$k_1 := f(x(t), t)$

$k_2 := f(x(t) + hk_1, t+h)$ (h ist wie oben $\frac{t_1 - t_0}{n}$)

$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$

$\| \text{Fehler} \triangleq C h^2 \quad (C \frac{1}{n^2})$

Beispiel:

$n=1$: $k_1 = f(\underbrace{\underbrace{x(0)}_{=1}, 0}_{=1}) = 1, \quad k_2 = f(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x(0)}_{=1} + \underbrace{h}_{=1} \cdot \underbrace{k_1}_{=1}}_{=2}, 0 + \underbrace{h}_{=1}}_{=2})$

$$x(1) \approx 1 + \frac{1}{2}(1+2) = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$n=10$: Fehler $\triangleq 4{,}3 \cdot 10^{-3}$

$n=100$: Fehler $\triangleq 4{,}5 \cdot 10^{-5}$

$n=1000$: Fehler $\triangleq 4{,}6 \cdot 10^{-7}$

→ nach 10 Schritten schon fast so gut wie das Euler-Verfahren nach 1000, aber noch weiter Verbesserung möglich:

RUNGE-KUTTA-Verfahren:

$k_1 := f(x(t), t)$

$k_2 := f(x(t) + \frac{h}{2} k_1, \ t + \frac{h}{2})$

$k_3 := f(x(t) + \frac{h}{2} k_2, \ t + \frac{h}{2})$

$k_4 := f(x(t) + h k_3, \ t + h)$

$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ ... die Werte in der Mitte stärker gewichtet als die außen

$\text{Fehler} \triangleq C h^4 \quad (C \frac{1}{n^4})$ ... immer andere Konstanten C!

⇒ Schritte ver-10-fachen führt zu 4 Stellen dazu (bei Euler 1, bei Heun 2)

⇒ Runge-Kutta würde man mit 3 Stellen erwarten, sind aber 4!

Beispiel:

$n=1$: $k_1 = f(x(0), 0) = 1$ (siehe oben)

$k_2 = f(\underbrace{x(0) + \frac{h}{2} k_1}_{=\frac{3}{2}}, \underbrace{0 + \frac{h}{2}}_{=\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}$

$k_3 = f(\underbrace{x(0) + \frac{h}{2} k_2}_{=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}, \overbrace{0 + \frac{h}{2}}) = \frac{7}{4}$

$k_4 = f(\underbrace{x(0) + h k_3}_{=1+1\cdot\frac{7}{4}}, \underbrace{0+h}_{=1}) = \frac{11}{4}$

$x(1) = x(0) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(\underbrace{1 + 3 + \frac{7}{2} + \frac{11}{4}}_{=\frac{41}{4}}) = \frac{65}{24} = 2{,}708\dot{3}$

$n=10$: Fehler $\triangleq 2{,}1 \cdot 10^{-6}$

$n=100$: Fehler $\triangleq 2{,}3 \cdot 10^{-10}$

$n=1000$: Fehler $\triangleq 2{,}3 \cdot 10^{-14}$

9.) Qualitative Theorie autonomer Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung der Form $\dot{x} = f(x)$ heißt autonome Differenzialgleichung. (also $f(x,t)$ hängt nicht von t ab, z.B. auch bei Kapitel 4.)

Def.: x_0 heißt Fixpunkt der Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$, falls $f(x_0) = 0$.
(Fixpunkt einer Funktion $\neq$ Fixpunkt einer Differenzialgleichung!)

Prop.: x_0 ist genau dann Fixpunkt, wenn $x(t) := x_0 \; \forall t$ eine Lösung ist.

Beweis:

$\Rightarrow$: $x(t) = x_0$, $\dot{x}(t) = 0 = f(\underbrace{x_0}_{=x(t)}) = f(x(t))$

$\Leftarrow$: $f(\underbrace{x_0}_{=x(t)}) = f(x(t)) = \dot{x}(t) = 0$ $\square$

LYAPUNOV-Funktion:

Def.: $\dot{x} = f(x)$. Eine Funktion g heißt Lyapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$, falls $dg_{(x)} \cdot f(x) \leq 0 \; \forall x$.

g heißt strikte Lyapunov-Funktion, falls $dg_{(x)} \cdot f(x) < 0 \; \forall x$, die kein Fixpunkt sind.

Die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ gehen in diejenige Richtung, in die g fällt.

Beweis:

$u(t) := g(x(t))$, wobei $x(t)$ Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ ist.

$\dot{u}(t) = (g(x(t)))^{\cdot} \overset{\text{mehrdimensionale Kettenregel}}{=} dg_{(x(t))} \cdot \dot{x}(t) \leq 0 \overset{\text{Mittelwertsatz}}{\Rightarrow} u$ ist monoton fallend. $\square$

Beispiel:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_1 x_2^2 \\ -x_2^7 - x_1^6 x_2^3 \end{pmatrix}$. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Fixpunkt. $g(x) = x_1^2 + x_2^2$.

g ist Lyapunov-Funktion, weil $dg_{(x)} \cdot f(x) = (2x_1 \;\; 2x_2) \cdot \begin{pmatrix} -x_1 - x_1 x_2^2 \\ -x_2^7 - x_1^6 x_2^3 \end{pmatrix} =$

$= -\underbrace{2x_1^2}_{\geq 0} - \underbrace{2x_1^2 x_2^2}_{\geq 0} - \underbrace{2x_2^8}_{\geq 0} - \underbrace{2x_1^6 x_2^4}_{\geq 0} \leq 0$ (sogar < 0, falls $x \neq 0$)

also g ist sogar strikte Lyapunov-Funktion

Somit $\forall x_1$: Die Lösung $x(t)$ mit $x(0) = x_1$ erfüllt $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Satz von HARTMAN-GROBMAN:

„Satz": Sei x_0 Fixpunkt von $\dot{x}=f(x)$. Falls $df(x_0)$ keinen Eigenwert mit Realteil 0 hat, dann verhalten sich die Lösungen von $\dot{x}=f(x)$ in der Nähe von x_0 so wie die Lösungen von $\dot{y}=df_{(x_0)}\cdot y$ in der Nähe von 0.

- Angenommen $\exists$ s Eigenwerte (mit Vielfachheit) mit negativem Realteil und u (= r-s) Eigenwerte (mit Vielfachheit) mit positivem Realteil.

  Dann ist $\dim E_s = s$, $\dim E_u = u$.
  ↖stabiler Raum ↖instabiler Raum

- $\dim E_u = 0$: x_0 ATTRAKTOR (stabiler Fixpunkt)

  $\dim E_s = 0$: x_0 REPELLOR (instabiler Fixpunkt)

  sonst: x_0 SATTELPUNKT

Beispiel:

$\dot{x}_1 = -7x_1+14$, $\dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_2+6$.

Fixpunkte: $-7x_1+14=0$, $\Rightarrow x_1=2$
$x_1^2-2x_2+6=0$ $\Rightarrow 4-2x_2+6=0 \Rightarrow x_2=5$

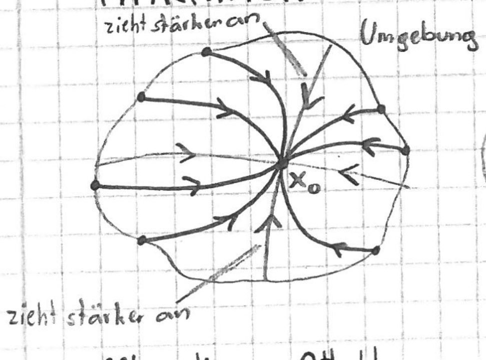
$x_0=\binom{2}{5}$ einziger Fixpunkt.

Verhalten in der Nähe: $df_{(x)} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2x_1 & -2 \end{pmatrix}$, $df_{(x_0)} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

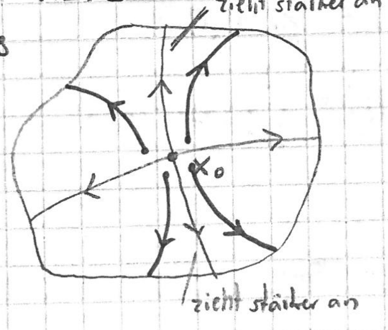
Eigenwerte: $-2, -7$

$\Rightarrow \dim E_s = 2$, $\dim E_u = 0$ x_0 Attraktor

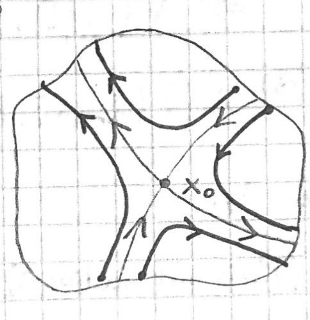
ATTRAKTOR:



REPELLOR:



SATTELPUNKT:



Alternative zum Attraktor:

III. FOURIERREIHEN

$f: [0,1] \to \mathbb{C}$, periodisch fortgesetzt, also $f(x+1) = f(x)$

$$\text{„} f = \underbrace{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)}_{= \mathcal{F}f = \mathcal{F}(f)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x} \text{“} \quad \text{Fourierreihe}$$

1.) Das Lebesgue-Integral

$X \neq \emptyset$, $X = \mathbb{R}^r$ (mehrdimensional), $f: X \to \mathbb{C}$, $f \leq g$ ist gemeint $f, g: X \to \mathbb{R}$

Def: Eine Familie $\mathcal{A}$ („Skript A“; Menge aus Teilmengen) von Teilmengen von X heißt σ-Algebra („Sigma“), falls:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

(3) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ $\left(\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A} \right)$

abzählbar unendlich viele Durchschnitte

Def: Auf $\mathbb{R}^r$ sei $\mathcal{B}$ („Skript B“) die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen der Form

$[a,b) \left(= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \right) \right) := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r : \begin{matrix} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_r \leq x_r \leq b_r \end{matrix} \right\}$ enthält.

Man nennt $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen und $B \in \mathcal{B}$ heißt Borelmenge.

Def: Eine Funktion $\lambda: \mathcal{B} (= \mathcal{B}_r) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (vereinigt) heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^r$, falls:

(1) $\lambda(\emptyset) = 0$

(2) Falls $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ paarweise disjunkt (haben keinen Punkt gemeinsam) $(B_{n_1} \cap B_{n_2} = \emptyset \ \forall n_1 \neq n_2)$

$$\Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$$

(3) $\lambda\left(\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \right) \right) = \prod_{j=1}^{r} (b_j - a_j)$

Genauer λ_r:

λ (Kreis mit Radius 5) $= 25\pi$

„λ_1“ Lebesguemaß

$\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ — von abzählbaren Mengen ist das Lebesguemaß stets 0.

λ_2:

$\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$

Wie rechnet man mit $+\infty$?

$\alpha + (+\infty) = +\infty$

$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \cdot (+\infty) = +\infty$

$\underline{0 \cdot (+\infty) = 0}$!

Borelmege mit Lebesguemaß 0 heißt Nullmenge

Def: Man sagt $f = g$ fast überall, falls $\exists N \in \mathcal{B}$ mit $\lambda(N) = 0$ sodass

$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^r \setminus N.$

$[f] := \{ g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{C} \text{ mit } g = f \text{ fast überall} \}$

Def: Man sagt $f_n \to f$ fast überall, falls $\exists N \in \mathcal{B}$ mit $\lambda(N) = 0$ sodass

„f_n konvergiert zu f"

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^r \setminus N.$

Lebesgue-Integral:

y-Achse wird unterteilt, weil sie $\mathbb{R}$ i

Zunächst: f nimmt nur endlich viele Werte an, also $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$,

$\exists A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$, sodass $f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$. charakteristische Funktion der Menge: Ist 1, wenn man in der Menge ist, sonst 0.

Definiere $\int f \, d\lambda := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda(A_j)$. (zunächst $+\infty$ als Ergebnis zugelassen)

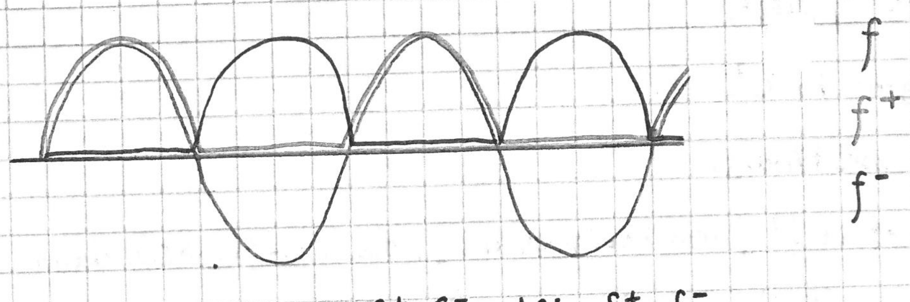
$f \geq 0 \Rightarrow \exists f_n$ monoton steigend, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ punktweise.

Definiere $\int f := \lim_{n\to\infty} \int f_n \ (= \sup \int f_n)$ ($+\infty$ zugelassen)

Man kann beweisen: Ist $g_n \geq 0$, monoton steigend und $g_n \to f$ punktweise

$\Rightarrow \int g_n \to \int f$

$f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Definiere $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$.



$f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

$f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{C} \Rightarrow f = \underbrace{u}_{\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}} + i \underbrace{v} = (u^+ - u^-) + i\,(v^+ - v^-)$

Def: $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}$ heißt Lebesgue-integrierbar, falls $\int u^+$, $\int u^-$, $\int v^+$ und $\int v^- \in \mathbb{R}$ und wir definieren dann das Lebesgue-Integral

$\int f := (\int u^+ - \int u^-) + i\,(\int v^+ - \int v^-)$.

Wichtige Eigenschaften:

- Linearität: $\int(f+cg) = \int f + c\int g$
- Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
- f Riemann integriebar $\Rightarrow$ f Lebesgue-integriebar und Lebesgue-Integral = Riemann-Integral

Wichtige Sätze:

Satz über monotone Konvergenz: ($+\infty$ ist zugelassen)
(f_n) $(\mathbb{R}^r \to \mathbb{R})$ monoton steigend, $f_n \to f$ fast überall $\Rightarrow \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Satz über dominierte Konvergenz:
Sei (f_n) eine Folge von Lebesgue-Integrierbaren Funktionen $\mathbb{R}^r \to \mathbb{C}$,
$g: \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integriebar und $f: \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}$.
Es gelten $|f_n| \leq g$ $\forall n$ und $f_n \to f$ fast überall. Dann ist f Lebesgue-integriebar und $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

$\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ ist fast überall definiert
Limes Inferior

Satz: (Lemma von FATOU) ($+\infty$ ist zugelassen)
Sei (f_n) Folge von Funktionen: $f_n: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Dann gilt $\int \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n$.

Def: Man sagt $f \in L^2$, falls $\int |f|^2$ endlich ist,
$f, g \in L^2$: $\langle f, g\rangle = \int f(x)\, \overline{g(x)}$,
$\|f\|_2 := \sqrt[2]{\int |f|^2}$.
Konvergenz in L^2.

Satz: L^2 ist vollständig.

Satz: Falls $f_n \to f$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$, d.h. $\|f_n - f\|_2 \to 0$), dann $\exists$ Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n), sodass $f_{n_k} \to f$ fast überall.

Satz: Sei $f \in L^2$. Dann gilt: $\forall \epsilon > 0$ $\exists g: \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}$ stetig und $\|f-g\|_2 < \epsilon$.

2.) Fourierreihen

Def: Sei $f \in L^2$. Setze $a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx$ und $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx$.

Falls $n \in \mathbb{Z}$ dann definiere $\boxed{c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi n x}\,dx}$

Dann nennt man $\mathcal{F}f := \underbrace{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)}_{\text{reelle Fourierreihe}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n \cdot}}_{\text{komplexe}}$

die Fourierreihe von f.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathcal{F}_n f := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi k x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2\pi k x) = \boxed{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k x}}$.

Def: Eine Reihe der Form $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$, bzw. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$

heißt Fourierreihe.

eigentlich Doppelfolge

Prop: Sei $a_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{C}$, bzw. $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ eine „Folge" in $\mathbb{C}$.

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergieren, bzw. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ konvergiert, (genau)

dann konvergiert $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$ in L^2, bzw.

konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$ in L^2.

Prop: Sei $f \in L^2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f = \mathcal{F}f$ in L^2 und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$

und $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ konvergieren.

Weiters gilt $\underbrace{\|\mathcal{F}f\|_2}_{\text{Norm}}^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$.

Insbesondere $\|\mathcal{F}f\|_2 \leq \|f\|_2$.

Man kann zeigen: Für $f \in L^2$ gilt $\mathcal{F}_n f \underset{\text{konvergiert}}{\to} f$ <u>fast überall</u>.

Für $f, g \in L^2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\mathcal{F}(f + \lambda g) = \mathcal{F}(f) + \lambda\,\mathcal{F}(g)$.

3.) Konvergenz der Fourierreihen

Prop: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i k x} = \dfrac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\pi x)}$.

<u>Beweis:</u>

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^{n} e^{\pi i k x} \quad \text{(k durch -k ersetzen)}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x} \overset{\text{(k durch k+n ersetzen)}}{=} \underbrace{e^{-2\pi i n x}}_{\text{1. Glied herausen}} \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{e^{2\pi i k x}}_{=(e^{2\pi i x})^k} = e^{-2\pi i n x} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} (e^{2\pi i x})^k}_{= \frac{1-(e^{2\pi i x})^{2n+1}}{1-e^{2\pi i x}}} =$$

endliche geomet. Reihe

$$= \frac{e^{-2\pi i n x} - e^{2\pi i (n+1)x}}{1-e^{2\pi i x}} = \frac{e^{-\pi i x}\left(e^{2\pi i (n+1)x} - e^{-2\pi i n x}\right)}{e^{-\pi i x}\left(e^{2\pi i x}-1\right)} =$$

$$= \frac{e^{2\pi i (n+\frac{1}{2})x} - e^{-2\pi i (n+\frac{1}{2})x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} = \frac{\cancel{2i}\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})x)}{\cancel{2i}\sin(\pi x)} = \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\pi x)} \qquad \square$$

Wir setzen $f(x+1)=f(x)$ voraus. (weil periodisch)

|| Prop: $f\in L^2,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow \int_0^1 f(x+c)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

Beweis:

$$\int_0^1 f(x+c)\,dx = \underbrace{\int_0^{1-c} f(x+c)\,dx}_{\binom{t=x+c}{dt=dx} = \int_c^1 f(t)\,dt} + \underbrace{\int_{1-c}^1 f(x+c)\,dx}_{\binom{t=x+c}{dt=dx} = \int_0^c f(t)\,dt} = \int_0^1 f(t)\,dt. \qquad \square$$

Substitution

P1 || Prop: Für $f\in L^2$, $n\in\mathbb{N}$ und $x\in[0,1]$ gilt $\mathcal{F}_n f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,\frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\,dt.$

Beweis:

$$\mathcal{F}_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{c_k}_{=\int_0^1 f(t)e^{-2\pi i k t}dt} e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{\int_0^1 f(t)\,e^{2\pi i k(x-t)}\,dt}_{=\int_0^1 f(x+t)\,e^{-2\pi i k t}dt} = \int_0^1 f(x+t)\underbrace{\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i k t}\right)}_{=\frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}}dt =$$

$$= \int_0^1 f(x+t)\,\frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}. \qquad \square$$

P2 || Prop: $\int_0^{1/2} \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\pi x)}\,dx = \int_{1/2}^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\pi x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\pi x)}\,dx$

Beweis:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left.\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{2\pi(n+\frac{1}{2})x}\right\}\to 1}{\left.\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right\}\to 1}\;\underbrace{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{2n+1} = 2n+1$$

Setze $h(x) := \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\pi x)}$.

sin $(\pi - 2\pi(n+\frac{1}{2})x)$ weil sin periodisch

$$h(1-x) = \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})(1-x)}{\sin\pi(1-x)} = \frac{\sin(2\pi n + \pi - 2\pi(n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\pi-\pi x)} = \frac{-\sin(-2\pi(n+\frac{1}{2})x)}{-\sin(-\pi x)} =$$

$$= \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin\pi x} = h(x)$$

$$\int_0^{1/2} h(x)\,dx = \begin{pmatrix} x=1-y \\ dx=-dy \end{pmatrix} = \int_1^{1/2} h(1-y)(-dy) = \int_{1/2}^1 h(y)\,dy$$

Substitution

$$\Rightarrow \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^{1/2} h(x)\,dx + \underbrace{\int_{1/2}^1 h(x)\,dx}_{\int_0^{1/2} h(x)\,dx} = 2\int_0^{1/2} h(x)\,dx$$

Prop: $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ stetig $\forall \epsilon>0$
$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$, Intervalle $A_1,\dots,A_n$ mit $\|f-\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}\|_\infty<\epsilon$.

Prop: Sei $f\in L^2$. Dann gilt $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(x)\sin(\lambda x)\,dx=0$.

Beweis:

1. Schritt: Behauptung: Sei A: $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ oder (a,b) und sei $f: 1_A$. Dann $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 1_A\sin\lambda x\,dx=0$.

Beweis der Behauptung:

$$\int_0^1 1_A(x)\sin(\lambda x)\,dx=\int_a^b\sin(\lambda x)\,dx\overset{HS}{=}-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\Big|_a^b=\frac{\cos(\lambda a)-\cos(\lambda b)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\ \left|\int_0^1 1_A\sin(\lambda x)\,dx\right|\le\frac{1}{\lambda}\underbrace{|\cos(\lambda a)-\cos(\lambda b)|}_{\text{Dreiecksungleichung}\ \le\underbrace{|\cos(\lambda a)|}_{\le 1}+\underbrace{|\cos(\lambda b)|}_{\le 1}}\le\frac{2}{\lambda}\xrightarrow{\lambda\to+\infty}0$$

2. Schritt: Behauptung: Aussage gilt für $f=\sum_{j=1}^n\alpha_j 1_{A_j}$ wobei $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ und $A_1,\dots,A_n$ Intervalle.

Beweis der Behauptung:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(x)\sin(\lambda x)\,dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1\sum_{j=1}^n\alpha_j 1_{A_j}(x)\sin(\lambda x)\,dx=$$

$$=\sum_{j=1}^n\alpha_j\underbrace{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 1_{A_j}(x)\sin(\lambda x)\,dx}_{1.\ \text{Schritt}}=0\qquad\diamond$$

3. Schritt: Behauptung: Aussage gilt für $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ stetig.

Beweis der Behauptung:

Sei $\epsilon>0$. $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$, $A_1,\dots,A_n$ Intervalle, sodass für $g=\sum_{j=1}^n\alpha_j 1_{A_j}$ gilt
$\|f-g\|_\infty<\frac{\epsilon}{2}$

2. Schritt $\Rightarrow\ \exists\lambda_0\ \forall\lambda\ge\lambda_0$: $\left|\int_0^1 g(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|<\frac{\epsilon}{2}$

Sei $\lambda\ge\lambda_0$: $\left|\int_0^1\underbrace{f(x)}_{f(x)-g(x)+g(x)}\sin(\lambda x)\,dx\right|=\left|\int_0^1(f-g)(x)\sin(\lambda x)\,dx+\int_0^1 g(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|\le$

$$\overset{\text{Dreiecks-Ungleichung}}{\le}\underbrace{\left|\int_0^1(f-g)(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|}_{\le\int_0^1\underbrace{|(f-g)(x)|}_{\le\|f-g\|_\infty<\frac{\epsilon}{2}}\underbrace{|\sin(\lambda x)|}_{\le 1}dx}+\left|\int_0^1 g(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|<\underbrace{\int_0^1\frac{\epsilon}{2}\,dx}_{=\frac{\epsilon}{2}}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\qquad\diamond$$

4. Schritt: Behauptung: Sei $f \in L^2$. Sei $\epsilon > 0$. $\Rightarrow \exists g$ stetig mit $\|f-g\|_2 <$

Beweis der Behauptung:

3. Schritt $\Rightarrow \exists \lambda_0 \ \forall \lambda \geq \lambda_0 : \ \left| \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$

Sei $\lambda \geq \lambda_0$: $\left| \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{=f(x)-g(x)+g(x)} \sin(\lambda x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 (f-g)(x) \sin(\lambda x)\,dx + \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\,dx \right| \leq$

Dreiecks-Ungleichung

$$\leq \left| \underbrace{\int_0^1 (f-g)(x) \sin(\lambda x)\,dx}_{=\underbrace{\langle f-g, \sin(\lambda x)\rangle}_{\leq \underbrace{\|f-g\|_2}_{<\frac{\epsilon}{2}} \cdot \underbrace{\|\sin(\lambda x)\|_2}_{\leq 1}}} \right| + \underbrace{\left| \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\,dx \right|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

Cauchy-Schwarz

$$\boxed{\text{Fläche Kreissektor: } \frac{\text{Bogenlänge} \cdot \text{Radius}}{2} = \frac{x}{2}}$$

Def: $f: [0,1] \to \mathbb{C}$, $x_0 \in [0,1]$ $\quad$ x_0 ist stetig oder Unstetigkeitsstelle

$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ für $x_0 \in [0,1)$, $f(1^+) := f(0^+)$

$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ für $x_0 \in (0,1]$, $f(0^-) := f(1^-)$

$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$ für $x_0 \in [0,1)$, $f'(1^+) := f'(0^+)$

$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$ für $x_0 \in (0,1]$, $f'(0^-) := f'(1^-)$

Satz: (Hauptsatz) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ eine L^2-Funktion. Weiters sei $x_0 \in [0,1]$ und es existieren $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$, $f'(x_0^+)$ und $f'(x_0^-)$.

Dann gilt $\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}_n f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

$\rightarrow$ punktweise

$f(x_0^+) = f(x_0^-)$ bei stetiger Stelle $\Rightarrow \lim = f(x_0)$

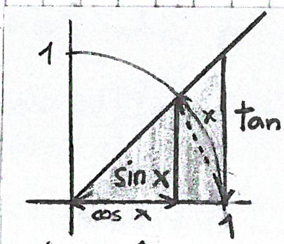
$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ bei Unstetigkeitsstelle

Beweis:

1. Schritt: Wir definieren $g: [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^+)}{\sin \pi t}, & \text{für } t \in (0, \frac{1}{2}], \\ \frac{f(x_0 - t) - f(x_0^-)}{\sin \pi t}, & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1), \\ \frac{1}{\pi} f'(x_0^+), & \text{für } t = 0, \\ -\frac{1}{\pi} f'(x_0^-), & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Einheitskreis:



$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\sin x \cdot 1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot 1}{2} \quad \Big| \cdot 2, \ : \sin x$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad | \text{Kehrwert}$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

$x \to \infty$: $\quad$ ($\lim_{x \to 0} \cos x = 1$)

$$1 \geq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

(Sandwichsatz)

Behauptung: $\boxed{g \in L^2}$ / d.h. $\int_0^1 |g|^2 < \infty$ (d.h. existiert)

$\lim_{t\to 0+} g(t) = g(0)$ $\qquad$ $\lim_{t\to 1-} g(t) = g(1)$

Beweis der Behauptung: (rechtsseitige Stetigkeit bei 0 zeigen, und linksseitige bei 1)

$$\lim_{t\to 0^+} \underbrace{g(t)}_{=\frac{f(x_0+t)-f(x_0^+)}{\sin \pi t}} = \lim_{t\to 0+} \underbrace{\frac{f(x_0+t)-f(x_0^+)}{t}}_{\to f'(x_0^+)} \underbrace{\frac{1}{\frac{\sin \pi t}{\pi t}}}_{\to 1} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot f'(x_0^+) = g(0)$$

t als $x_0 - x$ siehe Def.

$\to 1$, weil $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ → L'Hospital führt zu Zirkelschluss (Beweis siehe links)

+1 ändert nichts

$$\lim_{t\to 1^-} \underbrace{g(t)}_{=\frac{f(x_0-t)-f(x_0^-)}{\sin \pi t}\cdot\frac{\pi(1-t)}{\pi(1-t)}} = \lim_{t\to 1^-} \underbrace{\frac{f(x_0+1-t)-f(x_0^-)}{1-t}}_{\to f'(x_0^-)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\sin \pi t}{\pi(1-t)}}}_{=\frac{\sin \pi(1-t)}{\pi(1-t)} \to 1} \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} f'(x_0^-) = g(1)$$

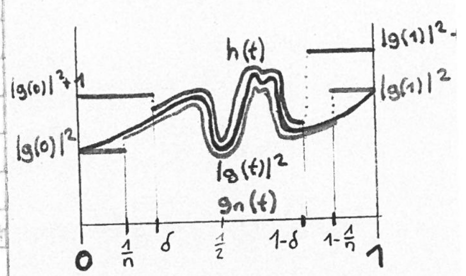
→ Erklärung siehe darunter

$\to 1$ weil $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Nebenrechnung: $\sin \underbrace{\pi(1-t)}_{=\pi-\pi t} = -\sin(-\pi t) = \sin \pi t$

aus der Stetigkeit folgt:

$\lim_{t\to 0^+} |g(t)|^2 = |g(0)|^2$, $\quad \lim_{t\to 1^+} |g(t)|^2 = |g(1)|^2$



δ ist OBdA $< \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0: \ \forall t \in [0,\delta): \ |g(t)|^2 < |g(0)|^2 + 1$

und $\forall t \in (1-\delta, 1]: \ |g(t)|^2 < |g(1)|^2 + 1$.

Setze $h: [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$h(t) = \begin{cases} |g(t)|^2 & \text{, falls } t \in [\delta, 1-\delta], \\ |g(0)|^2 + 1 & \text{, falls } t \in [0, \delta), \\ |g(1)|^2 + 1 & \text{, falls } t \in (1-\delta, 1]. \end{cases}$$

Folge Lebesgue-int. Funktionen

Weiters definiere $g_n: [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$g_n(t) = \begin{cases} |g(t)|^2 & \text{, falls } t \in [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}], \\ |g(0)|^2 & \text{, falls } t \in [0, \frac{1}{n}), \\ |g(1)|^2 & \text{, falls } t \in (1-\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

$\exists N: \forall n \geq N: \frac{1}{n} < \delta$. Für $n \geq N$: $0 \leq g_n \leq h$, weil: $\Rightarrow g_n \leq h$ $\boxed{\text{1. Bedingung für Satz über dominierte Konv.}}$

∠ eig. $|g_n|$, ist aber sowieso ≥ 0

$t \in [\delta, 1-\delta] \Rightarrow t \in [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \Rightarrow g_n(t) = |g(t)|^2 \leq |g(t)|^2 = h(t)$

$t \in [\frac{1}{n}, \delta) \Rightarrow g_n(t) = |g(t)|^2 \leq |g(0)|^2 + 1 = h(t)$

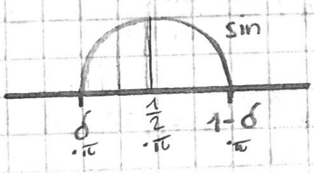
$t \in [0, \frac{1}{n}) \Rightarrow g_n(t) = |g(0)|^2 \leq |g(0)|^2 + 1 = h(t)$

$t \in (1-\delta, 1-\frac{1}{n}] \Rightarrow g_n(t) = |g(t)|^2 \leq |g(1)|^2 + 1 = h(t)$

$t \in (1-\frac{1}{n}, 1] \Rightarrow g_n(t) = |g(1)|^2 \leq |g(1)|^2 + 1 = h(t)$

Wir zeigen, dass $\int_0^1 h$ existiert und h somit Lebesgue-integrierbar ist, indem wir Intervalle $[0,\delta]$, $[\delta, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1-\delta]$, $[1-\delta, 1]$ betrachten

Sei $t \in [\delta, \frac{1}{2}]$: $\sin \pi t \geq \sin \pi\delta$ $\ (\forall t \in [\delta, 1-\delta])$ ↳ $\boxed{\text{Voraussetzung für Satz über dominierte Konvergenz}}$



↑ $\sin \pi\delta$ ist kleiner als $\sin \pi t$, wenn t zwischen δ und $\frac{1}{2}$ liegt

$$h(t)=\overbrace{\frac{|f(x+t)-f(x_0+)|^2}{(\sin \pi t)^2}}^{|g(t)|\ \text{laut Def. } h:= \text{ und } g:=} \leq \frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}\,|f(x+t)-f(x_0+)|^2$$

$$\Rightarrow \int_\delta^{1/2} h \leq \frac{1}{\sin^2(\pi\delta)} \int_\delta^{1/2} |f(x+t)-f(x_0+)|^2 \text{ existiert}$$

weil f eine L^2 Funktion ist laut Voraussetzung (Monotonie von L-Integral) E1 $\Rightarrow$ die ...egral exi...t $\Rightarrow \int h$ existiert auch

analog:

Sei $t \in (\frac{1}{2}, 1-\delta]$: $0 \leq h(t) = \dfrac{|f(x_0+t)-f(x_0-)|^2}{\sin^2(\pi t)} \leq \dfrac{1}{\sin^2(\pi\delta)}\,|f(x_0+t)-f(x_0-)|^2$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1-\delta} h \leq \frac{1}{\sin^2(\pi\delta)} \int_{1/2}^{1-\delta} |f(x_0+t)-f(x_0-)|^2 \text{ existiert}$$

$\int_0^\delta \underbrace{h}_{=|g(0)|^2+1} = (|g(0)|^2+1)\delta$ existiert und $\int_{1-\delta}^1 \underbrace{h}_{=|g(1)|^2+1} = (|g(1)|^2+1)\delta$ existiert („Integral aus der VS")

$\Rightarrow \int_0^1 h$ existiert, damit ist h Lebesgue-integrierbar. $\boxed{\text{Voraussetzung für Satz über dominierte Konv.}}$

Sei $t \in [0,1]$: $t=0$: $g_n(t) = g_n(0) = |g(0)|^2 = |g(t)|^2 \to |g(t)|^2$

$t=1$: $g_n(t) = g_n(1) = |g(1)|^2 = |g(t)|^2 \to |g(t)|^2$

Falls $0<t<1$: $\exists N_1: \forall n \geq N_1: \frac{1}{n} < t < 1-\frac{1}{n} \Rightarrow g_n(t) \overset{\text{siehe Def. } g_n:=}{=} |g(t)|^2 \to |g(t)|^2$

Somit $g_n \to |g|^2$ punktweise $\Rightarrow$ $g_n \to |g|^2$ fast überall $\boxed{\text{2. Bedingung für Satz über dominierte Konv.}}$

Satz über dominierte Konvergenz $\Rightarrow$ $|g|^2$ ist Lebesgue-integrierbar (und $\int g_n \to \int |g|^2$).

Also $\int |g|^2$ existiert $\Rightarrow g \in L^2$.

◇

2. Schritt: $\boxed{\mathcal{F}_n f(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-)) \to 0}$ ist zu zeigen. (was z.z. ist umgeformt)

$$\mathcal{F}_n f(x_0) = \int_0^1 f(x_0+t)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt$$

E1 Linearität des Integral → Σ und $\int$ vertauschen

setzen für f 1 ein (weil 1 Basiselement ist)

$$1 = \mathcal{F}_n 1 = \int_0^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-))}_{\text{von Behauptung}} = \frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-)) \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}}_{1} = \quad \text{ausmultiplizieren}$$

$$= f(x_0+)\,\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt}_{=\int_0^{1/2}\dots} + f(x_0-)\,\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt}_{=\int_{1/2}^1\dots} =$$

E2 dasselbe

ins $\int$ hineingezogen

$$= \int_0^{1/2} f(x_0+)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt + \int_{1/2}^1 f(x_0-)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt$$

aufgeteilt

$$\mathcal{F}_n f(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-)) = \int_0^{1/2} f(x_0+t)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt + \int_{1/2}^1 f(x_0+t)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t} +$$

$$- \int_0^{1/2} f(x_0+)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t} - \int_{1/2}^1 f(x_0-)\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t} =$$

$$= \int_0^{1/2} \underbrace{(f(x_0+t)-f(x_0+))\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}}_{=g(t)\,\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}\,dt + \int_{1/2}^1 \underbrace{(f(x_0+t)-f(x_0-))\,\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}}_{=g(t)\,\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}\,dt =$$

siehe $g(t):=$

$$= \int_0^1 g(t) \sin 2\pi (n+\tfrac{1}{2})t \, dt \xrightarrow[\substack{\text{geht weil} \\ g\in L^2}]{\text{Prop. P3}} 0. \quad \square$$

Def: Eine Funktion $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig differenzierbar (stückweise C_1), falls $\exists c_0 := 0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} < c_k := 1$, sodass:

C_1... ein Mal stetig differenzierbar

(1) f ist stetig differenzierbar auf (c_{j-1}, c_j) $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$,

(2) $\forall j \in \{0, \ldots, k-1\}$ existieren $f(c_j^+)$ und $f'(c_j^+)$,

(3) $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$ existieren $f(c_j^-)$ und $f'(c_j^-)$.

Prop: f stückweise $C_1 \Rightarrow f \in L^2$ (stückweise C_0 reicht)

Beweis:

auf $[c_{j-1}, c_j]$ lässt sich f zu einer stetigen Funktion f_j fortsetzen

$$\overset{HS}{\Longrightarrow} \int_{c_{j-1}}^{c_j} |f|^2 = \int_{c_{j-1}}^{c_j} |f_j|^2 \text{ existiert} \Rightarrow \int_0^1 |f|^2 \text{ existiert} \Rightarrow f \in L^2. \quad \square$$

Korrolar: Sei f stückweise C_1 (mit Zerlegung $c_0 = 0 < c_1 < \ldots < c_k = 1$). Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in [0,1] \setminus \{c_0, \ldots, c_k\}, \\ \dfrac{f(c_j^+) + f(c_j^-)}{2} & \text{, falls } j \in \{1, \ldots, k-1\}, \\ \dfrac{f(0^+) + f(1^-)}{2} & \text{, falls } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Insbesondere $\mathcal{F}_n f \to f$ fast überall.

Beweis:

Für $x \in [0,1] \setminus \{c_0, \ldots, c_k\}$: $\mathcal{F}_n f(x) \to \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$. $\square$

(weil f stetig ist $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$)

L^2-Konvergenz: $f \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}_n f \to f$ in L^2

gleichmäßige Konvergenz: f ist stückweise C^1, f stetig und $f(0) = f(1)$

$\Rightarrow \mathcal{F}_n f \to f$ gleichmäßig

L^2-Konvergenz:

Satz: Sei $f \in L^2$. Dann konvergiert $\mathcal{F}_n f \to f$ in L^2 (bezüglich $\|\cdot\|_2$).

Beweis:

1. Schritt: Behauptung: $\boxed{\text{Für } f=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j \mathbb{1}_{A_j},\ \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{C},\ A_1,\dots,A_k \text{ Intervalle gilt } \mathcal{F}_n f\to f \text{ in } L^2.}$

charakteristische Funktion

Beweis der Behauptung:

f ist stückweise C_1 $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_n f\to f$ fast überall.
aus Funktion ablesen

PS $f\in L^2$ $\Rightarrow$ $\exists g\in L^2$ mit $\mathcal{F}_n f\to g$ in L^2 $\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge $\mathcal{F}_{n_k} f$, sodass $\mathcal{F}_{n_k} f\to g$ fast überall,
weil f stückweise C^1
weil $\mathcal{F}_n f\to g$ in L^2 (siehe Satz)

$\underbrace{\mathcal{F}_{n_k} f\to f \text{ fast überall}}_{\text{weil } \mathcal{F}_n f\to f \text{ fast überall}}$ $\Rightarrow$ $f=g$ fast überall $\Rightarrow$ $f=g$ in L^2

Somit $\mathcal{F}_n f\to \underbrace{g=f}_{\text{siehe oben}}$ in L^2. ◇

2. Schritt:

$\boxed{\text{Sei } f:[0,1]\to\mathbb{C} \text{ stetig.}}$ z.z. $\mathcal{F}_n f\to f$ in L^2 Sei $\epsilon>0$. $\exists g=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{C}$, $A_1,\dots,A_k$ Intervalle,
neues f! — Unendlichnorm — g hat vorher f geheißen

sodass $\|f-g\|_\infty<\frac{\epsilon}{3}$.

weil $\mathcal{F}_n g\to g$ in L^2 (gezeigt im 1. Schritt als $\mathcal{F}_n f\to f$ in L^2)

1. Schritt $\Rightarrow$ $\exists N\ \forall n\geq N$: $\|\mathcal{F}_n g-g\|_2<\frac{\epsilon}{3}$. S2 (in grün)
↳ Def. von L^2-Konvergenz

$$\text{Sei } n\geq N:\ \|\mathcal{F}_n f-f\|_2 \overset{\Delta\text{Ungl.}}{\leq} \underbrace{\|\mathcal{F}_n f-\mathcal{F}_n g\|_2}_{\substack{=\mathcal{F}_n(f-g)\ \text{(in grün)}\\ \leq \|f-g\|_2<\frac{\epsilon}{3}}} + \underbrace{\|\mathcal{F}_n g-g\|_2}_{<\frac{\epsilon}{3}\ \text{Zeile darüber}} + \underbrace{\|g-f\|_2}_{\leq\|g-f\|_\infty<\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon.$$
Daher $\mathcal{F}_n f\to f$ in L^2. ◇

3. Schritt:

$\boxed{\text{Sei } f:[0,1]\to\mathbb{C} \text{ in } L^2.}$ z.z. $\mathcal{F}_n f\to f$ in L^2 Sei $\epsilon>0$. $\exists g$ stetig mit $\|f-g\|_2<\frac{\epsilon}{3}$. wieder (in grün) (anderer Teil des Satzes)

weil $\mathcal{F}_n g\to g$ in L^2 (gezeigt in 2. Schritt als $\mathcal{F}_n f\to f$ in L^2).

2. Schritt $\Rightarrow$ $\exists N\ \forall n\geq N$: $\|\mathcal{F}_n g-g\|_2<\frac{\epsilon}{3}$.

$$\text{Sei } n\geq N:\ \|\mathcal{F}_n f-f\|_2 \leq \underbrace{\|\mathcal{F}_n f-\mathcal{F}_n g\|_2}_{\leq\|f-g\|_2<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\|\mathcal{F}_n g-g\|_2}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\|g-f\|_2}_{<\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon.$$
Daher $\mathcal{F}_n f\to f$ in L^2. □

Korrolar: $\|\mathcal{F}f\|_2=\|f\|_2$.

Beweis:

$$\big|\|\mathcal{F}_n f\|_2-\|f\|_2\big| \leq \|\mathcal{F}_n f-f\|_2 \longrightarrow 0. \quad \square$$

Gleichmäßige Konvergenz:

Falls $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|$ konvergiert ($\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ konvergiert), dann konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi i n x}$ gleichmäßig, weil...

$$\Big\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi i n x}\Big\|_\infty \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|\,\|e^{2\pi i n x}\|_\infty$$ und Majorantenkriterium.

Satz: Sei $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar, stetig und $f(0) = f(1)$.

Dann konvergiert $\mathcal{F}_n f \to f$ gleichmäßig.

Beweis:

Es gilt $f, f' \in L^2$, also $\mathcal{F}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}$, $\mathcal{F}(f') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{2\pi i n x}$.

weil stückweise C^1 — im Komplexen

Weil $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{2\pi i n x}$ in L^2 konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2$ konvergiert.

Setze $\mathcal{J}_1 := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : |c_n| < \frac{1}{n^2}\}$ und $\mathcal{J}_2 := \mathbb{Z} \setminus \mathcal{J}_1$.

Vereinigung

Falls $n \in \mathcal{J}_2 \Rightarrow |c_n| \geq \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 \leq n^2 |c_n|$.

- $$\sum_{n \in \mathcal{J}_1} |c_n| = |c_0| + \overset{\text{aufgeteilt}}{\sum_{\substack{n \in \mathcal{J}_1 \\ n \neq 0}}} \underbrace{|c_n|}_{\leq \frac{1}{n^2}} \leq |c_0| + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{konvergiert (Integraltest) weil } 2>1}$$

$$\xRightarrow{\text{Majorantentest}} \sum_{n \in \mathcal{J}_1} |c_n| \text{ konvergiert.}$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\tilde{c}_n \overset{\text{laut Def. Fourierreihe}}{=} \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x}\, dx \overset{\text{partiell integrieren}}{=} \underbrace{f(x) e^{-2\pi i n x} \Big|_0^1}_{= \underbrace{f(1)}_{=f(0)} \underbrace{e^{-2\pi i n}}_{=1} - f(0) = 0} + \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} 2\pi i$ d.

$= 2\pi i n \underbrace{\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx}_{= c_n \text{ laut Def}} = 2\pi i\, n\, c_n$.

- $$\sum_{n \in \mathcal{J}_2} \underbrace{|c_n|}_{\substack{= |c_n| \cdot 1 \\ \leq n^2 |c_n|}} \leq \sum_{n \in \mathcal{J}_2} \underbrace{n^2 |c_n|^2}_{\substack{|n c_n|^2 \\ = \frac{1}{2\pi i} \cdot \tilde{c}_n \text{ siehe obere Gleichung}}} = \sum_{n \in \mathcal{J}_2} \frac{1}{4\pi^2} |\tilde{c}_n|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2}_{\text{konvergiert}}$$

ist $\leq$ als wenn alle ganzen Zahlen summiert werden

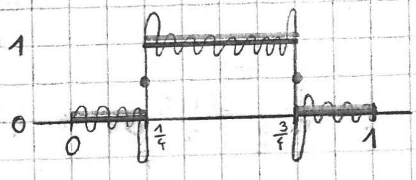
$$\xRightarrow{\text{Majorantentest}} \sum_{n \in \mathcal{J}_2} |c_n| \text{ konvergiert.}$$

Somit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ konvergiert. Deshalb $\exists g$ mit $\mathcal{F}_n f \to g$ gleichmäßig $\Rightarrow \mathcal{F}_n f \to g$ punktweise

$$\Rightarrow g(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in (0,1), \text{ weil } f \text{ stetig in } x, \\ \frac{f(0^+) + f(1^-)}{2} = f(0) = f(1) = f(x), & \text{für } x \in \{0,1\}. \end{cases}$$ $\square$

Beispiel:

$f = 1_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}$



gesucht: Fourierreihe bestimmen und Konvergenz untersuchen

- $a_0 = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_{1/4}^{3/4} 1 = \frac{1}{2}$ (Integral aus der Volksschule)

$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x)\, dx = 2 \int_{1/4}^{3/4} \cos(2\pi n x)\, dx \overset{HS}{=}$

Hauptsatz (lineare Substitution) $\quad \pi = 180°$

$$= \frac{2}{2\pi n} \sin(2\pi n x) \Big|_{1/4}^{3/4} = \frac{1}{\pi n} \left(\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right) = \begin{cases} n \text{ gerade: } 0 \\ n \equiv 1 (4): \frac{1}{\pi n}(\underbrace{-1}_{\frac{3}{2}\pi, 2\frac{3}{2}\pi, \dots} - \underbrace{1}_{\frac{\pi}{2}, 2\frac{1}{2}\pi, \dots}) = -\frac{2}{\pi n} \\ n \equiv 3 (4): \frac{1}{\pi n}(\underbrace{1}_{\frac{\pi}{2}, 2\frac{1}{2}\pi, \dots} - \underbrace{(-1)}_{\frac{3}{2}\pi, 2\frac{3}{2}\pi, \dots}) = \frac{2}{\pi n} \end{cases}$$

gekürzt

d.h. $3\pi, 6\pi, 9\pi, \dots$ und $1\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ sinus immer 0

Modulo 4

kongruent

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = 2\int_{1/4}^{3/4}\sin(2\pi n x) \overset{HS}{=}$$

$$= \frac{2}{2\pi n}\left(-\cos(2\pi n x)\right)\Big|_{1/4}^{3/4} = \frac{-1}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) = \begin{cases} n \text{ ungerade: } 0 & \text{d.h. } \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \text{ cos ist immer } 0 \\ n \equiv 0(4): -\frac{1}{\pi n}(1-1)=0 & 6\pi, 12\pi, \dots \quad 2\pi, 4\pi, \dots \\ n\equiv 2(4): -\frac{1}{\pi n}(-1-(-1))=0 & 3\pi, 9\pi, \dots \quad \pi, 3\pi, \dots \end{cases}$$

$0-0=0$; $\frac{3}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \frac{15}{2}\pi \dots$ und

überlegen ob n oder n+1 / n-1

Fourierreihe: $$\mathcal{F}f = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos(2\pi(2n-1)x)$$

… 2n-1 damit wir nur bei ungeradem Werte haben
$(-1)^n$ damit jeder zweite Wert negativ ist

$$\mathcal{F}_{2n-1}f = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cos(2\pi(2k-1)x)$$

- **Konvergenz:**

f stückweise C_1 (nicht stetig, siehe Graph)

Also $\mathcal{F}_n f \to f$ in L^2.

Unstetigkeitsstellen extra untersuchen: 1/4 und 3/4 (und 0/1)

$$\mathcal{F}_n f(x) \xrightarrow{\text{punktweise}} \begin{cases} f(x), & \text{für } x\in(0,1)\setminus\{\frac14,\frac34\}, \text{ weil } f \text{ stetig in } x \\ \frac{f(\frac14^+)+f(\frac14^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac12, & \text{für } x=\frac14, \\ \frac{f(\frac34^+)+f(\frac34^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac12, & \text{für } x=\frac34, \\ \frac{f(0^+)+f(1^-)}{2} = 0 = f(x), & \text{für } x\in\{0,1\} \text{ eigentlich nicht notwendig} \end{cases} = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x\in[0,1]\setminus\{\frac14,\frac34\} \\ \frac12, & \text{falls } x\in\{\frac14,\frac34\}. \end{cases}$$

Weil der punktweise Grenzwert nicht stetig ist, konvergiert $(\mathcal{F}_n f)$ nicht gleichmäßig.

Wohin geht das Maximum der Fourierreihe? (gegen 1,09 nicht gegen 1)

$\max \mathcal{F}_{2n-1} f \not\to 1$ (Maximum der Fourierreihe konvergiert NICHT gegen 1!) wäre nur Intuition

Max ist bei $\frac14$:

$x_n = \frac14\left(1+\frac1n\right)$. geht gegen $\frac14$ für $n\to\infty$ → einsetzen

$$\mathcal{F}_{2n-1} f(x_n) = \frac12 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cos\Big(\underbrace{2\pi(2k-1)\tfrac14\left(1+\tfrac1n\right)}_{\frac{\pi}{2}(2k-1)+\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}}\Big) =$$

Summensatz: $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$

$$= \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(2k-1)\right)}_{0}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\tfrac{2k-1}{n}\right) - \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(2k-1)\right)}_{(-1)^{k-1}}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\tfrac{2k-1}{n}\right)$$

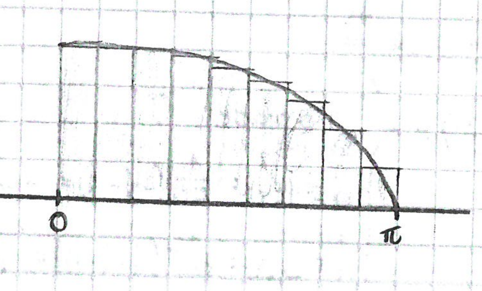
$(-1)^k$

$$= \frac12 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}\right) =$$

unten auch · Bruch → $\frac1\pi$

$$= \frac12 + \underbrace{\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}\right)}{\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}}}_{\text{Riemannsumme für } \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx} \approx \frac12 + \frac1\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx \approx 1{,}09$$

$$\mathcal{F}_{2n-1} f\left(\tfrac14\left(1+\tfrac1n\right)\right) \to \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1{,}08949$$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fouriertransformation

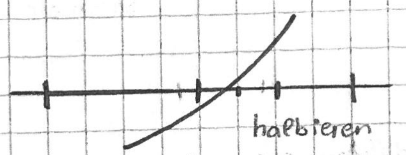
$$\mathcal{F}f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i x t}\, dt$$

IV. NEWTONVERFAHREN

1.) Newtonverfahren

Wir wollen Funktionswerte von $\sqrt[2]{x}$ bestimmen, konkret nun von $\sqrt[2]{2}$.

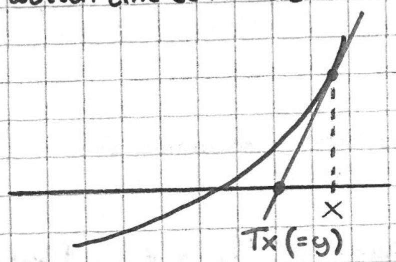
Wir suchen die Nullstellen von der Funktion $f(x) = x^2 - 2$:



z.B. mit <u>Bolzano-Weierstraß:</u>

- Nachteil: langsam
- Vorteil: funktioniert immer

Wir wollen eine schnellere Methode finden: <u>das Newtonverfahren:</u>



Suche die Tangente: $t(s) = f(x) + f'(x)(s-x)$

$$0 = t(y) = f(x) + f'(x)(y-x)$$

$$\Rightarrow y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\| \qquad Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Startwert x_1, $\quad x_n = Tx_{n-1} = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

$x_n = T^{n-1}x_1$, $\quad T^n = \underbrace{T \cdot T \cdot \ldots \cdot T}_{n\text{-Mal}}$ $\quad (T^0 := id)$

- Vorteil: normalerweise schneller – Newtonverfahren konvergiert <u>sehr</u> schnell! (doppelt geometrisch)
- Nachteil: funktioniert nicht immer

Beispiel $\sqrt[2]{2}$:

$$Tx = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Startwert $x_1 := 1$ oder $x_1 := 2 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$ (bei beiden x_1) $\rightarrow$ $\frac{3}{2}$ wäre guter Startwert

Schritte	Tatsächlicher Fehler	Fehlerabschätzung $(x_1 = \frac{3}{2}, \delta = \frac{1}{2})$
5	$9{,}00 \cdot 10^{-25}$	$5{,}41 \cdot 10^{-18}$
8	$2{,}96 \cdot 10^{-196}$	$7{,}33 \cdot 10^{-139}$
11	$4{,}01 \cdot 10^{-1568}$	$8{,}29 \cdot 10^{-1106}$
21	$7{,}31 \cdot 10^{-1\,650\,478}$	$2{,}80 \cdot 10^{-1\,131\,604}$

$\rightarrow$ 21 Schritte um auf 1 Millionen Stellen genau zu rechnen, sehr schnell!

Wann funktioniert das Newton-Verfahren?

- Angenommen $T^n x \rightarrow x_0$ $(f'(x) \neq 0)$ und f ist differenzierbar

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x = x_0$$

T ist stetig, falls f C_1

$$\Rightarrow \cancel{x_0} = Tx_0 = \cancel{x_0} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow f(x_0) = 0$$

d.h. wenn das Verfahren konvergiert, dann gegen eine Nullstelle

Satz: Sei $f: \underbrace{U}_{\subseteq \mathbb{R} \text{ offen}} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Mal stetig differenzierbar (C^2), $x_0 \in U$, $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $G \subseteq U$ von x_0, sodass $\forall x \in G: \lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$, wobei $Tx := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

d.h. wenn wir einen genügend nahen Startwert an der Nullstelle wählen, dann konvergiert das Verfahren zur Nullstelle

Beweis:

$\exists \delta_0 > 0$ mit $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subseteq U$, sodass: $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

T ist stetig, $T'x = 1 - \frac{f'(x) f'(x) - f(x) f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$ stetig auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$$T'x_0 = \frac{f(x_0) f''(x_0)}{f'(x_0)^2} = 0$$ weil $f(x_0) = 0$ da x_0 Nullstelle ist

Da T' stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0, \delta > \delta_0$ sodass $|T'x| \leq \frac{1}{2} \ \forall x \in G := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$Tx_0 = x - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0$$

Sei $x \in G$: $|Tx - \underbrace{x_0}_{= Tx_0}| \overset{MWS}{=} \underbrace{|T'\xi|}_{\leq \frac{1}{2}} \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \delta} \leq \frac{\delta}{2} \leq \delta$

$\Rightarrow Tx \in G$, $T: G \rightarrow G$

$G = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ vollständig

Seien $x,y \in G$: $|Tx - Ty| \overset{MWS}{=} \underbrace{|T'\xi|}_{\leq \frac{1}{2}} |x-y| \leq \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{<1} |x-y|$

Banach'scher Fixpunktsatz $\Rightarrow$ x_0 ist eindeutiger Fixpunkt von T und $\forall x \in G: \lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$. $\square$

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x_1 \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ sei zwei Mal stetig differenzierbar (C^2). Weiters gäbe es ein $\delta > 0$ mit $[x_1-\delta, x_1+\delta] \subseteq U$. Außerdem existieren $\beta > 0$, $\gamma > 0$ mit

(1) $|f'(x)| \geq \beta \quad \forall x \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$, → β wählt man als Minimum von $|f'(x)|$, außer es ist schwer zu bestimmen

(2) $|f''(x)| \leq \gamma \quad \forall x \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$, → γ als Maximum von $|f''(x)|$

(3) $q := \frac{\gamma}{\beta} \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| < 1$,

(4) $\left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \frac{1}{1-q} \leq \delta$.

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\overset{\text{Nullstelle}}{x_0} \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$ und $f(x_0) = 0$.

Weiters gilt für $Tx := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, dass für ($x_1 = x_1$), ($x_1$ ist Startwert)

$x_n = Tx_{n-1} \left(= T^{n-1}x_1 = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\underset{T^{n-1}x_1}{\underset{\parallel}{|x_n - x_0|}} \leq \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}}$ (Fehler von x_n)

$\boxed{a^{b^c} := a^{(b^c)}}$

Beispiel:

$\sqrt[4]{3}$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $\delta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x) = x^4 - 3 \qquad Tx = x - \frac{x^4-3}{4x^3} = \frac{3x}{4} + \frac{3}{4x^3}$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2 \qquad$ Intervall $[1, \frac{3}{2}]$

$\qquad [x_1-\delta, x_1+\delta]$

$\underset{f'(1)}{\beta = 4}$, $\underset{f''(\frac{3}{2})}{\gamma = 27}$

$\left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| = \frac{143}{2000}$

$q = \frac{27}{4} \cdot \frac{143}{2000} = \frac{3861}{8000} < 1$ ✓

$\left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \frac{1}{1-q} = \underbrace{\frac{143}{2000}}_{\text{von oben}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3861}{8000}} = \frac{\overset{<1000}{572}}{\underset{>4000}{4159}} \leq \frac{1}{4} = \delta$ ✓

$x_n \to \sqrt[4]{3}$

$|x_n - \sqrt[4]{3}| \leq \frac{143}{2000} \cdot \frac{\left(\frac{3861}{8000}\right)^{2^{n-1}-1}}{1 - \left(\frac{3861}{8000}\right)^{2^{n-1}}}$

Schritte	6	10	13	23
Fehler $\leq$	$1{,}12 \cdot 10^{-11}$	$1{,}51 \cdot 10^{-163}$	$1{,}73 \cdot 10^{-1297}$	$3{,}56 \cdot 10^{-1\,327\,038}$

19.6.

Beweis:

1. Schritt: Behauptung: (1) f hat auf $[x_1-\delta, x_1+\delta]$ höchstens eine Nullstelle

(2) $x_n - x_{n+1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

(3) Falls $x_n, x_{n-1} \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$, dann ist $|x_{n+1}-x_n| \le \frac{\gamma}{\beta} |x_n - x_n$

Beweis der Behauptung:

(1) $|f'| \geq \beta$ auf $[x_1-\delta, x_1+\delta] \Rightarrow$ entweder $f'>0$ auf $(x_1-\delta, x_1+\delta)$ oder $f'<0$ auf $(x_1-\delta, x_1+\delta)$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton auf $[x_1-\delta, x_1+\delta]$

$\Rightarrow$ injektiv und f hat höchstens eine Nullstelle in $[x_1-\delta, x_1+\delta]$

(2) $x_n = Tx_{n-1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \Rightarrow x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

(3) Wegen (2) gilt $x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \Rightarrow f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = -f(x_{n-1})$

$\Rightarrow f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0.$

$$|x_{n-1} - x_n| \overset{(2)}{=} \left|-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| = \underbrace{\frac{1}{|f'(x_n)|}}_{\le \frac{1}{\beta}} |f(x_n)| \le \frac{1}{\beta} |f(x_n) - \underbrace{0}_{= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}| =$$

$$= \frac{1}{\beta} |\underbrace{f(x_n) - f(x_{n-1})}_{\underset{\exists \xi_1}{\overset{\text{MWS}}{=}} f'(\xi_1)(x_n - x_{n-1})} - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})| = \frac{1}{\beta} |\underbrace{f'(\xi_1) - f'(x_{n-1})}_{\underset{\exists \xi_2}{\overset{\text{MWS}}{=}} f''(\xi_2)(\xi_1 - x_{n-1})}| \, |x_n - x_{n-1}| =$$

Mittelwertsatz

$$= \frac{1}{\beta} \underbrace{|f''(\xi_2)|}_{\le \gamma} \underbrace{|\xi_1 - x_{n-1}|}_{\le |x_n - x_{n-1}|} |x_n - x_{n-1}| \le \frac{\gamma}{\beta} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

◇

2. Schritt: Behauptung: $\forall n \geq 1$ ist $x_n, x_{n+1} \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$ und $|x_n - x_{n-1}| \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1}$

Beweis der Behauptung: Induktion nach n

$n=1$: $x_1 \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$

hier sogar =

$$|x_2 - x_1| = \left|-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \underbrace{1}_{= q^{2^{n-1}-1}} \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot q^{2^{1-1}-1}$$

$$|x_2 - x_1| \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{1}{1-q} \le \delta \Rightarrow x_2 \in [x_1-\delta, x_1+\delta].$$

Sei $n>1$: $x_n, x_{n-1} \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$ und $|x_n - x_{n-1}| \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1}$ (Induktionsvoraussetzung: immer für $n-1$)

$$|x_{n-1} - x_n| \le \frac{\gamma}{\beta} \underbrace{|x_n - x_{n-1}|^2}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|^2 q^{2^{n-1}-2}} \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \underbrace{\frac{\gamma}{\beta} \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|}_{=q} q^{2^{n-1}-2} = \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1}.$$

$$|x_{n+1} - x_1| \le \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1}} + \underbrace{|x_n - x_{n-1}|}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-2}-1}} + \ldots + \underbrace{|x_2 - x_1|}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|} \le$$

$$\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \underbrace{\left(q^{2^{n-1}-1} + q^{2^{n-2}-1} + \ldots + 1\right)}_{\le 1+q+q^2+\ldots+q^{2^{n-1}-1} \,=\, \frac{1-q^{2^{n-1}}}{1-q} \,\le\, \frac{1}{1-q}} \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{1}{1-q} \le \delta$$

endliche geometrische Reihe

$\Rightarrow x_{n+1} \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$. ◇

3. Schritt: Seien $n,m \in \mathbb{N}$, $n<m$.

$$|x_n - x_m| = |x_m - x_n| \le \underbrace{|x_m - x_{m-1}|}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-2}-1}} + \underbrace{|x_{m-1} - x_{m-2}|}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-3}-1}} + \ldots + \underbrace{|x_{n-1} - x_n|}_{\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1}} \le$$

$$\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \underbrace{\left(q^{2^{n-1}-1} + q^{2^{n-3}-1} + \ldots + q^{2^{n-1}-1}\right)}_{= q^{-1}\left(q^{2^{n-1}} + q^{2\cdot 2^{n-1}} + q^{4\cdot 2^{n-1}} + \ldots + q^{2^{m-n-1}\cdot 2^{m-1}}\right)} =$$

$$= \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1} \left(1 + \underbrace{q^{1\cdot 2^{n-1}}}_{=(q^{2^{n-1}})^1} + \underbrace{q^{3\cdot 2^{n-1}}}_{=(q^{2^{n-1}})^3} + \underbrace{q^{7\cdot 2^{n-1}}}_{=(q^{2^{n-1}})^7} + \ldots + \underbrace{q^{(2^{m-n-1}-1)\cdot 2^{n-1}}}_{=(q^{2^{n-1}})^{2^{m-n-1}-1}}\right) \le$$

$$\le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{n-1}-1} \underbrace{\left(1 + q^{2^{n-1}} + (q^{2^{n-1}})^2 + \ldots\right)}_{\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-q^{2^{n-1}}}} = \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. $\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} \to 0$

$\Rightarrow \exists N \; \forall n \ge N: \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} < \varepsilon$.

Seien $n,m \ge N$. OBdA: $n<m$.

$|x_n - x_m| \le \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ Cauchyfolge ($[x_1-\delta, x_1+\delta]$ vollständig) $\Rightarrow (x_n)$ konvergent

Setze $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$.

$Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, T ist stetig $(x_n = T^{n-1}x_1)$

$$Tx_0 \overset{T \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{Tx_n}_{=x_{n+1}} = x_0 \Rightarrow x_0 = Tx_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

Somit ist x_0 die eindeutig bestimmte Nullstelle von f in $[x_1-\delta, x_1+\delta]$.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n}_{=T^{n-1}x_1} = x_0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\epsilon > 0$. $\exists N \; \forall m \geq N: \; |x_m - x_n| < \epsilon$.

Wähle $m > \max\{n, N\} \Rightarrow m \geq N$ und $m > n$.

$$|x_n - x_0| \leq \underbrace{|x_n - x_m|}_{\leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}}-1}{1-q^{2^{n-1}}}} + \underbrace{|x_m - x_0|}_{<\epsilon} < \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} + \epsilon.$$

Daher ist $|x_n - x_0| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}}$. $\square$

<u>Was ist sonst? x_0 ist k-fache Nullstelle:</u>

$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0)$ und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

$$T'x_0 = \frac{f(x_0)\, f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \approx \frac{(x-x_0)^k \cdot g \cdot k(k-1)(x-x_0)^{k-2}\tilde{g}}{k^2 (x-x_0)^{2k-2} \dots \hat{g}^2} \approx 1 - \frac{1}{k}$$