ANGEWANDTE MATHEMATIK

Beispiel (Stundenplan)

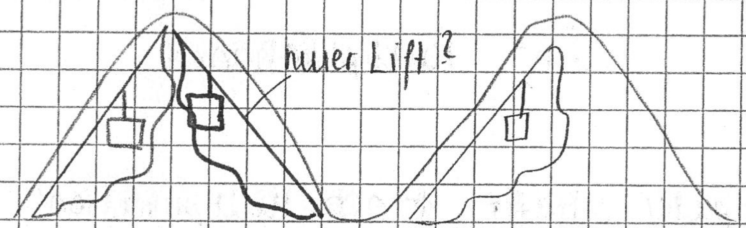
8 Klassen, 10 LehrerInnen, 30 Stunden / Klasse

1. Stunde: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 = 1\,814\,400$

insgesamt: $(1\,814\,400)^{30} \approx 5{,}7808 \cdot 10^{187}$

Computer kann 1 Milliarde ($= 10^9$) Möglichkeiten / Sekunde probieren: $\dfrac{5{,}7808 \cdot 10^{187}}{10^9 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365{,}2425} \approx 1{,}8319 \cdot 10^{171}$ Jahre

Beispiel (Schiliftbau)



→ sinnvoll? (braucht man einen zusätzlichen Lift)

→ genügend Geld

Inhalt:

I. Computerzahlen

II. Lineare Gleichungssysteme

III. Fourierreihe

IV. Berechnen von Funktionswerten

V. Weitere numerische Verfahren

! Probleme mit dem Computer

- Software- / Hardwareprobleme
- Rundungsfehler ☐ (haben hier als Mathematiker Einfluss)
- Ungenaue Daten
- Rechenzeit ☐
- Beschränkter Speicherplatz ☐

Beispiel:

! 2 $n \times n$ Matrizen A, B

Vektor (n-dim.) v

$A \cdot B \cdot v$ — Anzahl der Multiplikation bei $A \cdot B$

$(A \cdot B) \cdot v$ $\quad n^2 \cdot n + n \cdot n = n^3 + n^2 \approx n^3$ Multiplikationen

$n \times$ Zahl 2 Spalte — ↳ Anzahl d. Multiplikationen von Matrix · Vektor

$\underset{n \times n}{A} \cdot (\underset{n \times n}{B} v)$ $\quad 2n^2$ Multiplikationen

$n = 100$, Computer schafft 10 000 Multiplikationen / Sekunde

1. Methode: $\frac{1\,000\,000}{10\,000} = 100\,sec = 1\,min\ 40\,sec$ $\quad (1\,000\,000 = 100^3)$

2. Methode: $\frac{20\,000}{10\,000} = 2\,sec$ $\quad (20\,000 = 2 \cdot 100^2)$

Computer rechnet nur mit 0, 1

Addition

$$\begin{array}{r} 1011010 \\ 1101011 \\ \hline 11000101 \end{array}$$

1 weiter

$1+1 = 0$ + 1 weiter

Subtraktion:

größere Zahl suchen (Vorzeichen bestimmen)

(ähnlich wie Addition)

Multiplikation:

Nuller

10110 · 101
10110
1101110

Division: ⊖

10101
1011101 : 10101 = 100,01
100100

in 8er-Blöcke 

* = 1, wenn 7. Stelle 0
= 0, wenn 7. Stelle 1

I. COMPUTERZAHLEN

reelle Zahlen: unendliche Dezimalzahlen
(Vorzeichen beim Computer: 0 für +, 1 für −, z.B.,
Problem bei 0)
↳ oft gespeichert als ±

Zahlen mit verschiedenen Dezimaldarstellungen: z.B. $0,\dot{9} = 1,\dot{0}$
im Wesentlichen genau dann, wenn eine Zahl auf $\dot{9}$ oder $\dot{0}$ endet

In diesem Fall nehmen wir die auf $\dot{0}$ endende Zahl

3,1415926

$\left.\begin{array}{l} 03,141 \text{ ... Fixkommadarstellung} \\ 3,1415 \cdot 10^0 \text{ ... Gleitkommadarstellung} \end{array}\right\}$ nur 5 Stellen darstellbar

1.) Fix- und Gleitkommadarstellung

Fixkommadarstellung:

z.B.: 4 Stellen vor dem Komma
4 Stellen nach dem Komma

Verwendung: Eurobeträge (Banken, Supermarktkasse, ...)
Liter, Größen, ...
Sport (Schirennen, ...)

Gleitkommadarstellung:

z.B.: 6 Stellen: $3,14159 \cdot 10^0$
(Ausnahme 0) 2 Stellen für Zehnerpotenz

Computer: Vorzeichen | Zahl | Vorzeichen d. Potenz | Potenz

$8,536 \cdot 10^{6}$ ✓

$27,45 \cdot 10^{4}$ × $(2,745 \cdot 10^{5})$

$4,325 \cdot 10^{-3}$ ✓

$0,4136 \cdot 10^{-4}$ × $(4,136 \cdot 10^{-5})$

Welche Zahlen kann der Computer darstellen?

4 Stellen / 2 Stellen

$9,999 \cdot 10^{99}$: größte darstellbare Zahl

kleinste positive darstellbare Zahl: $1000 \cdot 10^{-99}$

darstellbare Zahlen $\subseteq [1000 \cdot 10^{-99}, 9,999 \cdot 10^{99}] \cup \{0\} \cup [-9,999 \cdot 10^{99}, -1000 \cdot 10^{-99}]$

Verteilung der darstellbaren Zahlen

Bei Erhöhung/Verkleinerung der Zehnerpotenz wird der Abstand der darstellbaren Zahlen größer/kleiner.

2.) Runden

Auf 4 Stellen

Abschneiden: 3,14159 ... 3,141

Fehler: < 1 in der letzten Stelle

Runden: „nächstgelegene darstellbare Zahl"

wenn Zahl $x_1, x_2 x_3 x_4 5\overline{0}$, dann die höhere

3,14159 ... $\underbrace{3,142}_{4}$ insgesamte Zahl der Stellen

82,675 ... 82,68

! Achtung bei $-0{,}0024396 \ldots + 0{,}002440$

„=" Endung auf „5" $\rightarrow$ nächst größere Zahl $-2{,}4615 \ldots -2{,}461$

„0er" werden nicht gezählt; 0er am Schluss wird mit geschrieben

! gerundete Zahlen nicht mehr weiterrunden!

3.) Rechnen mit Computerzahlen

Computer rechnet zunächst einmal exakt (auch Funktionen wie $\sin x$, $\sqrt[3]{x}$, ...) und rundet das Ergebnis

Beispiel: 3 Stellen

$a = 13{,}4$, $b = 2{,}66$; $c = 0{,}384$

$(a+b)+c = 16{,}5$ $\quad a+(b+c) = 16{,}4$

$a+b = 16{,}06$	$16{,}1$	↯ ... Computerergebnisse
$16{,}1 + c = 16{,}484$	$16{,}5$	
$b+c = 3{,}044$	$3{,}04$	
$a + 3{,}04 = 16{,}44$	$16{,}4$	

das Assoziativgesetz gilt für das Rechnen mit Computerzahlen NICHT.
$\rightarrow$ auch DG, Inverse, Neutr. El.
$\Rightarrow$ nur KG

zu 1.) Darstellbare Zahlen

$$[1{,}000 \cdot 10^{-99}, 9{,}999 \cdot 10^{99}] \cup \{0\} \cup [-9{,}999 \cdot 10^{99}, -1{,}000 \cdot 10^{-99}]$$

falls $x > 9{,}999 \cdot 10^{99}$ (bzw. $< -9{,}999 \cdot 10^{99}$)

$\rightarrow$ Computer: Fehlermeldung (wenn Zahl zu groß)

falls $x \in (0; 1{,}000 \cdot 10^{-99})$ (bzw. $(-1{,}000 \cdot 10^{-99}, 0)$)

$\rightarrow$ Computer: 0 (wenn Zahl zu klein, mit 0'en auffüllen)

! **Beispiel:** $(3 \cdot 1) : 3 - (1:3) \cdot 3 = \underline{0}$

Computer: $3 \cdot 1 = 3$

$3 : 3 = 1$

$1 : 3 = 0,3333\ldots$

$(1:3) \cdot 3 = 0,99999\ldots$

$(3 \cdot 1) : 3 - (1:3) \cdot 3 = \underline{0,000001}$

analog: $(3 \cdot 10^9) : 3 - (10^9 : 3) \cdot 3 = 0$

Computer: $0,000001 \cdot 10^9 = 1000$

dadurch mehr Rechenfehler

Auslöschung: (6 stellig)

$123,456 - 123,431 = 0,025\underbrace{0000}$

Zahl schaut genauer aus als sie ist! ⇒ könnte schon gerundet sein

durch Subtraktion 4 Stellen ausgelöscht

Beispiel:

$$\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{=: f(x)} \quad , \ 8\text{-stellig}$$

$f(0,01)$ exakt: $f(0,01) \approx 0,00499995\underline{83}|33$

Computer rechnet das exakt

$\cos(0,01)$: $0,99995000$

$1 - \cos(0,01) = 0,0000500000000$ → Auslöschung

$$\frac{1-\cos(0,01)}{0,01} = 0,0050000000$$

durch Auslöschung 2 Stellen verloren !

Formeln:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \\ \cos x &= \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \end{aligned}\right\} \ominus$$

$$1 - \cos x = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Auslöschung vermieden!

$$\underline{f(x) = \frac{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}} \quad : 0,0049999584$$

Format-X ® by Format Werk

FAUSTREGEL: Auslöschung am Ende besser als früher
(aber nicht immer!)

Beispiel: Auslöschung am Anfang

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \leftarrow \text{am Ende}$$

(4-stellig): $a = 16{,}24$, $b = 15{,}71$

1.) $a - b = 0{,}5300$

$(a-b)^2 = 0{,}2809$ → Auslöschung!

2.) $a^2 = 263{,}7$

$b^2 = 246{,}8$

$a \cdot b = 255{,}1$

$a^2 - 2ab + b^2 = 0{,}3000$ → Auslöschung!

Problem: große Zwischenergebnisse, deswegen 2.) ungenauer

! Beispiel: (16-stellig)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7} - x$$

$f(10^6)$ exakt: $f(10^6) \approx 2{,}00000145$

Computer: $x^2 + 4x + 7$: $1000\,00|4\,000\,007 = 10^{12}$

$\sqrt{x^2 + 4x + 7}$: 10^6

$f(10^6)$: 0 (Computer: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$)

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x + 7} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 4x + 7} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 7} + x} =$$

$$= \frac{4x + 7}{\sqrt{x^2 + 4x + 7} + x}$$

$$\left(\overset{\text{÷}}{=} \frac{4+\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{4}{2} = 2 \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2+4x+7} + x = 2 \cdot 10^6 \\ 4x+7 : \quad 4\,000\,007 = \underline{4000\,010} \end{array}\right\} \text{PC}$$

$\frac{4\,000\,01}{2 \cdot 10^6}$ 2,00001

Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Computer: $a_1, a_1+a_2, (a_1+a_2)+a_3, \ldots, a_1+\ldots+a_n \overset{\text{(Computer)}}{=} a_1+\ldots+a_{n+1}$

→ rechnet sich auch n+1 aus, wenn gleich → Summe ✓

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergent}$$

2-stellig:

n	1	2	3	4	5	6	7	...	20	21
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	1,0	1,5	1,8	2,1	2,3	2,5	2,6		3,9	3,9

↳ jetzt ändert sich nichts mehr

$\Rightarrow$ Computer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 3{,}9$ (konvergent für Computer)

Rechnen mit Computer

- keine langen Rechenzeiten
- möglichst kleine Fehler:
  - Auslöschung vermeiden
  - große Zwischenergebnisse vermeiden

II. Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:

Marssonde

2 voneinander unabhängige Treibstoffsysteme

4-stellige Rechnung

$$3{,}814 \cdot 10^{-4}\, x_1 + 0{,}7128 \cdot x_2 = 8{,}586$$

$$0{,}1872\, x_1 + 0{,}1626\, x_2 = 9{,}612$$

Lösungsmethoden:

- Gauß-Verfahren (Substitutionsverfahren) $\sim n^3$ Multiplikationen (genau: $\frac{1}{3} \cdot n(n+1)(n+2)$ -) GUT
- Cramer'sche Regel (Determinante) $\sim n!$ Multiplikationen (genau: $n!(n+1)(n-1)+n$) SCHLECHT

1.) Der Gauß-Algorithmus

Beispiel:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 28$$
$$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 61$$
$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 55$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 2 & -3 & 7 & 61 \\ 1 & 2 & 8 & 55 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /(-2 \cdot 1.\text{Zeile}) \\ /(-1 \cdot 1.\text{Zeile}) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{I+II, I+III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /(-4 \cdot 2.\text{Zeile}) \end{array} \xrightarrow{\text{II-III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 3. Zeile: $\underline{\underline{x_3 = 7}}$ $\Rightarrow$ 2. Zeile: $x_2 + \overset{x_3}{7} = 5$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_2 = -2}}$

$\Rightarrow$ in 1. Zeile: $x_1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 = 28$

$\underline{\underline{x_1 = 3}}$

Lösung: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Zeilenvertauschen (det: Anzahl wichtig!) → erlaubt

Spalten vertauschen:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 28 \\ 2 & -3 & 7 & 61 \\ 1 & 2 & 8 & 55 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}$$

dazu schreiben, sonst verwechselt man Spalten!

Beispiel: (Marssonde)

$$3{,}814 \cdot 10^{-4}\, x_1 + 0{,}7128\, x_2 = 8{,}586$$
$$0{,}1872\, x_1 + 0{,}1626\, x_2 = 9{,}612$$

„exakt" (händisch): $x_1 \approx 40{,}9026$

$\underline{x_2 \approx 12{,}0236}$

$$\begin{array}{cc|c} 3{,}814 \cdot 10^{-4} & 0{,}7128 & 8{,}586 \\ 0{,}1872 & 0{,}1626 & 9{,}612 \end{array}$$

wollen 0 →

Faktor: $\dfrac{0{,}1872}{3{,}814 \cdot 10^{-4}} = 490{,}8$

2. Zeile − 490,8 × 1. Zeile:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 349{,}8 & 4214 \end{array}$$

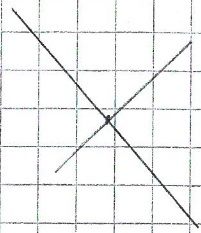
sagen wir dem Computer

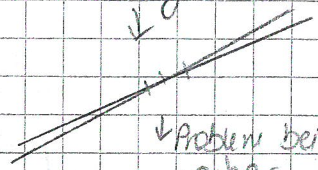
$$x_2 = \frac{4214}{349{,}8} = 12{,}03$$

$$x_1 = \frac{8{,}586 - 0{,}7128 \cdot 12{,}03}{3{,}814 \cdot 10^{-4}} = 28{,}84$$

Lösung: $\underline{\begin{pmatrix} 28{,}84 \\ 12{,}03 \end{pmatrix}}$ → weicht vom exakten Wert sehr stark ab geometrisch:

- 2 Geraden schneiden:





Problem: große Zwischenergebnisse (ad voriges Bsp)

⇒ Lösung d. Problems: Faktor klein halten –

größte Matrixeintragung nach links oben

⇒ PIVOTSUCHE (PIVOT)

Noch einmal das Beispiel: größte Matrixeintragung – PIVOTSUCHE ⇒ Pivotelement

$$\begin{array}{cc|c} 3{,}814\cdot 10^{-4} & \underline{0{,}7128} & 8{,}586 \\ 0{,}1872 & 0{,}1626 & 9{,}612 \\ x_1 & x_2 & \end{array}$$

↓ Spaltenvertauschen

$$\begin{array}{cc|c} 0{,}7128 & 3{,}814\cdot 10^{-4} & 8{,}586 \\ 0{,}1626 & 0{,}1872 & 9{,}612 \\ x_2 & x_1 & \end{array}$$

Faktor: $\frac{0{,}1626}{0{,}7128} = 0{,}2281$

2. Zeile – 0,2281 · 1. Zeile: $\begin{array}{cc|c} 0 & 0{,}1871 & 7{,}654 \\ & x_1 & \end{array}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7{,}654}{0{,}1871} = 40{,}91$$

$$x_2 = \frac{8{,}586 - 3{,}814\cdot 10^{-4}\cdot 40{,}91}{0{,}7128} = 12{,}02$$

Lösung: $\begin{pmatrix} 40{,}91 \\ 12{,}02 \end{pmatrix}$ (mit Pivotsuche besser)

Anzahl der Multiplikationen:

n	2	3	4	5	10	20	100	10^6
(n^3)	(8)	(27)	(64)	(125)	(1000)	(8000)	(10^6)	(10^{18})
Gauß	6	17	36	65	430	3060	$3{,}433 \cdot 10^5$	$3{,}33 \cdot 10^{17}$
Cramer	8	51	364	2885	$3{,}95 \cdot 10^8$	$9{,}7 \cdot 10^{20}$	$9{,}33 \cdot 10^{161}$	$8{,}3 \cdot 10^{5565720}$

Was kann man mit Gauß-Verfahren noch machen?

- auch bei nicht eindeutig lösbaren (und bei nicht n×n System) Systemen anwendbar

- simultanes Lösen von Gleichungssystemen

  $A \mid b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k$

- Matrizen invertieren (!) bzw. allgemeiner: $A \cdot X = \underset{(id)}{B}$

  $A \mid \underset{(id)}{B} \longrightarrow id \mid X$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{array}{l} \text{2. Zeile} \\ \text{1. Zeile} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-2 \cdot 1. \text{Zeile}} \\ \xrightarrow[-2 \cdot 1. \text{Zeile}]{} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.-4 \cdot 2.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{(-4) \cdot III + I} \\ 2 \cdot III + II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -4 & -23 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 2 & 10 & -7 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}}$$

Gauß-Algorithmus: $\underline{A \cdot x = b}$

$A_1 = A$, $b_1 = b$ $\qquad A_1 \mid b_1$

$$
\left(\begin{array}{c|ccc|c}
* & * & \cdots & * & * \\
\hline
0 & & & & \\
\vdots & & A_2 & & b_2 \\
0 & & & &
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
* & * & \cdots & * & \cdots & * & * \\
0 & * & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & \ddots & * & \cdots & * & * \\
\hline
 & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & A_r & & b_r
\end{array}\right)
$$

$A_r = \left(a_{j,k}^{(r)}\right)_{j,k=r}^{n}$, $\quad b_r = \left(b_j^{(r)}\right)_{j=r}^{n}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{j,k}^{(r+1)} &:= a_{j,k}^{(r)} - \frac{a_{j,r}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}} \cdot a_{r,k}^{(r)} \\ b_j^{(r+1)} &:= b_j^{(r)} - \frac{a_{j,r}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}} \cdot b_r^{(r)} \end{aligned}}$$

Permutationsmatrix: $j \neq k$

$$
P = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & j & & & k & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & & \vdots & 1 & \vdots & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & 0 & & 1 & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

PA ... j-te & k-te Zeile werden vertauscht

AP ... j-te & k-te Spalte werden vertauscht

Für passende Permutationsmatrizen P, Q wird PAQ statt A betrachtet.

$$
\left(\begin{array}{c|cccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\lambda_2 & 1 & & & \\
-\lambda_3 & & 1 & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \\
-\lambda_n & 0 & & & 1
\end{array}\right) \cdot A = \hat{A}_2
$$

$$\rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & & \\ \lambda_3 & & \ddots & \Theta \\ \vdots & & & \\ \lambda_n & \Theta & & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\hat{A}_2}_{\begin{pmatrix} * & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}}$$

Schließlich erhält man:

$$PAQ = \underbrace{L}_{\begin{pmatrix} * & \cdots & \Theta \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{R}_{\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ \Theta & & * \end{pmatrix}}$$

untere Δ-Matrix   obere Δ-Matrix

L-R-Zerlegung von A

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & 3 & \\ 2 & -3 & 7 & -2\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ 1 & 2 & 8 & -1\cdot \mathrm{I} + \mathrm{III} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 4 & 5 & -4\cdot \mathrm{II} + \mathrm{III} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2x abgezogen

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

2.) Determinanten

Gauß-Verfahren: L-R-Zerlegung, $PAQ = L \cdot R$

det: $\underbrace{\det P}_{\pm 1} \cdot \det A \cdot \underbrace{\det Q}_{\pm 1} = \det L \cdot \det R$

$\Rightarrow$ $\underline{\det A = \pm \det L \cdot \det R}$

Produkt d. Diagonalelemente

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Produkt d. Diagonalelemente von R

keine Vertauschungen, daher $\det A = + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Gauß: $\sim n^3$ Multiplikationen $\left(\frac{1}{3}(n-1) \cdot n(n+1) + n - 1\right)$

genau

Produkt: $\sim n!$ Multiplikationen $(n!\,(n-1))$

n	2	3	4	5	10	20	100
Gauß	3	10	23	44	339	2679	333399
Produkt	2	12	72	80	$3{,}24 \cdot 10^{7}$	$4{,}62 \cdot 10^{19}$	$9{,}24 \cdot 10^{159}$

3.) Gauß-Algorithmus für spezielle Matrizen

In einigen wichtigen Spezialfällen ist der Gauß-Algorithmus numerisch stabil.

•) Diagonaldominante Matrizen

Definition

Eine Matrix $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^{n}$ heißt diagonaldominant, falls

$$\underbrace{|a_{j,j}|}_{\text{Einträge in der Diagonale}} > \underbrace{\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{j,k}|}_{\text{Summe d. restl. Einträge}} \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Satz

Sei A eine diagonaldominante Matrix. Dann sind auch die Matrizen A_r $(r \in \{1,2,\ldots,n\})$ diagonaldominant.

Beweis:

Proseminar Bsp. 12.)

Induktion nach r.

Sei r so, dass $(r+1) \leq n$

Formel für $a_{j,k}^{(r+1)}$, Dreiecksungleichung. $\square$

•) Positiv definite Matrizen

Definition

Eine symmetrische Matrix $(a_{j,k} = a_{k,j} \;\; \forall j,k)$ heißt positiv-definit, falls $\forall x \neq 0 \; (\in \mathbb{R}^n): \; x^t A x > 0$.

Erinnerung an lineare Algebra

führende Hauptminoren

Determinanten der jeweiligen Matrizen (=> unterteilt!)

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & & * \\ * & * & * & & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

det $\lrcorner$, det $\boxed{\lrcorner}$, det $\boxed{\lrcorner}$, ..., det A

A symmetrisch:

A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte > 0

$\Leftrightarrow$ führende Hauptminoren > 0.

Proposition

> Sei $A = (a_{j,k})$ eine positiv definite Matrix. Dann $\exists\, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $a_{j,j} \geq |a_{r,k}|$ $\forall r, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

=> größten Eintrag in der Diagonale

Beweis:

$A \neq 0$. Wähle j, k so, dass $|a_{j,k}| \geq |a_{r,s}|$ $\forall r, s$.

$|a_{j,k}| > 0$.

1. Fall: $j = k$, Diagonalelement

$$0 < \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t & \\ \end{array} \!\! \begin{array}{l} \\ \\ \\ j \end{array} A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \!\! \begin{array}{l} \\ \\ \\ j \end{array} = a_{j,j}$$

2. Fall:

$j \neq k$: o.B.d.A: $a_{j,k} > 0$

Setze $$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left(x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array}, \text{ falls } a_{j,k} < 0 \right).$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^t A x = x^t \begin{pmatrix} a_{1,j} - a_{1,k} \\ a_{2,j} - a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{n,j} - a_{n,k} \end{pmatrix} = a_{j,j} - a_{j,k} - (\underbrace{a_{k,j}}_{\substack{= a_{j,k} \\ \text{(symmetrisch)}}} - a_{k,k}) =$$

$$= a_{j,j} + a_{k,k} - 2a_{j,k} \Rightarrow 2a_{j,k} < a_{j,j} + a_{k,k}$$

$\Rightarrow a_{j,j} > a_{j,k}$ oder $a_{k,k} > a_{j,k}$ – W!D. $\square$

Satz

> Sei A eine positiv definite Matrix. Dann sind auch die Matrizen A_r $(r \in \{1, 2, \dots, n\})$ positiv definit.

Beweis:

Induktion:

$r = 1$: $A_1 = A$ positiv definit.

Sei r so, dass $r + 1 \leq n$.

z.z.: Symmetrisch: $j, k \in \{r+1, \dots, n\}$: $a_{k,j}^{(r+1)} \overset{\text{„oben } r+1\text{"}}{=} \underbrace{a_{k,j}^{(r)}}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ = a_{j,k}^{(r)}}} - \dfrac{\overbrace{a_{k,r}^{(r)}}^{= a_{r,k}^{(r)}}}{a_{r,r}^{(r)}} \underbrace{a_{r,j}^{(r)}}_{= a_{j,r}^{(r)}} =$

$$= a_{j,k}^{(r)} - \frac{a_{j,r}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}} a_{r,k}^{(r)} \overset{\text{Formel}}{=} a_{j,k}^{(r+1)}. \quad \Rightarrow \text{Symmetrisch}$$

neue 1. Komponente

$$\text{Setze } \hat{x} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

(z.z. A_{r+1} positiv definit)

$$\Rightarrow 0 < \hat{x}^t A_r \hat{x} = \frac{1}{a_{r,r}^{(r)2}} \cdot \left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s \right) \left(\sum_{u=r+1}^{n} a_{r,u}^{(r)} x_u \right) \cdot a_{r,r}^{(r)} +$$

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s \right) \left(-\frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \sum_{u=r+1}^{n} a_{r,u}^{(r)} x_u \right) +$$

$$- \frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \left(\sum_{s=r+1}^{n} a_{r,s}^{(r)} x_s \right) \left(\sum_{u=r+1}^{n} \underbrace{a_{u,r}^{(r)}}_{= a_{r,u}^{(r)}} x_u \right) + \sum_{s=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} a_{s,u}^{(r)} x_s \cdot x_u =$$

$$= \sum_{s=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} a_{s,u}^{(r)} x_s x_u - \sum_{s=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} \frac{1}{a_{r,r}^{(r)}} \underbrace{a_{r,s}^{(r)}}_{= a_{s,r}^{(r)}} a_{r,u}^{(r)} x_s x_u =$$

$$= \sum_{s=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} \underbrace{\left(a_{s,u}^{(r)} - \frac{a_{s,r}^{(r)}}{a_{r,r}^{(r)}} a_{r,u}^{(r)} \right)}_{= a_{s,u}^{(r+1)}} x_s x_u =$$

$$= x^t A_{r+1} x.$$

Daher ist A_{r+1} positiv definit.

$\square$

Bei positiv definiten oder diagonaldominanten Matrizen braucht man keine Pivotsuche machen!!

4.) Überbestimmte Gleichungssysteme

Beispiel

Marssonde: zusätzliche Messung

$$3{,}814\cdot 10^{-4}\, x_1 + 0{,}7128\, x_2 = 8{,}586$$
$$0{,}182\, x_1 + 0{,}1626\, x_2 = 9{,}612$$
$$0{,}1392\, x_1 + 0{,}3485\, x_2 = 9{,}891$$

mehr Gl. als Unbekannte
$\Rightarrow$ keine Lösung

In der Praxis normalerweise keine Lösung. Wir suchen „beste Lösung", bei der Ax möglichst nahe b ist.

Definition

> Unter einer „besten Lösung" von $Ax = b$ verstehen wir ein x, für das $|Ax - b| \leq |Ay - b| \;\forall y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Wiederholung aus Lineare Algebra

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \; (\mathbb{C}^n) \quad , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$A = (a_{jk})$ $m \times n$ - Matrix

gilt in $\mathbb{C}$

$$(A^* = (\overline{a_{kj}}) = \overline{A^t})$$

inneres Produkt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = y^t \cdot x$$
$$x_j \cdot \overline{y_j} = y^* x \quad \rightarrow \text{in } \mathbb{C}$$

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle = \underset{x^* x \text{ in } \mathbb{C}}{x^t x}$$

$$V^{\perp} := \{x : \langle x, y \rangle = 0 \;\forall y \in V\}$$

$$V \oplus W := \{v + w : v \in V, w \in W\} \text{ und } V \cap W = \{0\}$$

$$(x \in V \oplus W \Rightarrow \exists!\, v \in V, w \in W : x = v + w)$$

lineare Abbildung (Matrix A)

$\ker A := \{v : Av = 0\}$,

$\operatorname{im} A := \{v : \exists w : v = Aw\} \overset{?}{=} \{Aw : w\}$

Projektion: P $\qquad$ $V: P \cdot x \in V,\ v \in V \Rightarrow Pv = v$

$\Updownarrow$ $P^2 P$

Orthogonalprojektion $\Leftrightarrow$ $P^2 = P$ und $P^t = P$

(in $\mathbb{C}$: $P^* = P$)

! analy. Beweis für nächste Proposition

Wir suchen „beste Lösung":

Weil $x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend ist, ist das Minimum von $|Ax - b|$ dasselbe wie das Minimum von:

$$f(x) := |Ax - b|^2 = (Ax-b)^t (Ax-b) = x^t A^t Ax - b^t Ax - \overbrace{x^t A^t b}^{= b^t Ax} + b \cdot b =$$

$$= x^t \underbrace{A^t A}_{(c_{j,k})} x - 2 \underbrace{b^t A}_{(d_j)} x + b^t b$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\sum_{k,r=1}^{n} c_{k,r} x_k x_r}_{} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} d_k x_k + b_0 \right)\right) \overset{\text{①}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{k,k} \cdot x_k^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le k < r \le n} c_{k,r} x_k x_r$$

nur j-te Komponente wird angewandt

$$\overset{\text{①}}{=} \underbrace{2 c_{j,j} x_j + 2 \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_{k,j} \cdot x_k}_{} - 2 d_j \overset{\text{②}}{=}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} c_{k,j} x_k$$

$$\overset{\text{②}}{=} 2 (A^t A x - \cancel{2} b^t A)_j \quad \text{stetig}$$

$\Rightarrow f$ diff.bar und $df_{(x)} = 2(A^t A x - \cancel{2} b^t A)$.

$$0 = df_{(x)} = 2(x^t A^t A - b^t A) \Rightarrow$$

$$A^t A x - A^t b = 0 \Rightarrow \boxed{A^t A x = A^t b}$$ / zum Berechnen für beste Lösung

Randwerte: „$x \to \infty$"

Spezialfall: A ist injektiv (d.h.: $\ker A = \{0\}$)

$C := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ beschränkt und abgeschlossen

$\Rightarrow$ kompakt, $x \mapsto |Ax - b|$ ist stetig

Min. u. Max

$$\Rightarrow \quad m := \min\{|Ax| : |x| = 1\} > 0$$

$$|Ax - b| \geq |\underbrace{Ax}_{|x| \cdot \underbrace{\frac{x}{|x|}}_{1 \cdot 1 = 1}}| - |b| = |x| \cdot \underbrace{\left|A \frac{x}{|x|}\right|}_{\geq m} - |b| \geq m|x| - |b| \xrightarrow{x \to \infty} +\infty$$

Also $x \mapsto |Ax - b|$ besitzt ein Minimum und Minimum erfüllt $A^t A x = A^t b$.

allg. Fall: $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus (\ker A)^\perp$

$A|_{(\ker A)^\perp}$ $\quad \exists\, x_0 \in (\ker A)^\perp$ mit $|Ax_0 - b| \leq |Ay - b|$

$\forall\, y \in (\ker A)^\perp$

Sei $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y = \underbrace{y_1}_{\in \ker A} + \underbrace{y_2}_{\in (\ker A)^\perp} \Rightarrow Ay = \underbrace{Ay_1}_{=0} + Ay_2 = Ay_2$

$$|Ay - b| = |Ay_2 - b| \geq |Ax_0 - b|$$

Sei $x \in x_0 + \ker A$ $\quad (x = x_0 + \underbrace{v}_{\in \ker A})$

$|\underbrace{Ax}_{A\cdot x_0} - b| = |Ax_0 - b| \Rightarrow x$ ist Minimum.

Sei x Min. $\Rightarrow A^tAx = A^tb = A^tAx_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^tA(x-x_0) = 0$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{(x-x_0)^t A^t}_{=(A(x-x_0))^t} A(x-x_0) = |A(x-x_0)|^2$

$\Rightarrow A(x-x_0) = 0 \Rightarrow x - x_0 \in \ker A$

$x = x_0 + \underbrace{(x-x_0)}_{\in \ker A} \in x_0 + \ker A$

Sei x so, dass $A^tAx = A^tb \Rightarrow x \in x_0 + \ker A \Rightarrow x$ Min.

A^tA ist positiv semidefinit ($x^tA^tAx = |Ax|^2 \geq 0$), also hat schöne numerische Eigenschaften.

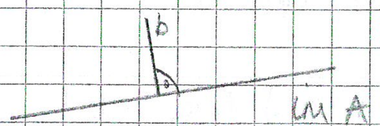
↑ analy. Beweis (kommen direkt auf Ergebnis)

Proposition

> Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, A eine $m \times n$-Matrix (reell). Dann gelten:
>
> 1.) Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (beste Lösung) mit $|Ay - b| \geq |Ax_0 - b| \ \forall y \in \mathbb{R}^n$
>
> 2.) Falls $x \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft $|Ay - b| \geq |Ax - b| \ \forall y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, dann gilt $Ax = Ax_0$.
>
> 3.) Es gilt $|Ay - b| \geq |Ax - b| \ \forall y \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $A^tAx = A^tb$.

! 2. Beweis: (algebraischer Beweis, Nachteil: müssen wissen, was herauskommt)

1.) im A Teilraum



Sei y_0 die Orthogonalprojektion von b auf im A.

$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $y_0 = Ax_0$ (da in im A) $\quad \langle b - \underbrace{y_0}_{Ax_0}, Ay \rangle = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ bel.

$$|Ay - b|^2 = |\underbrace{Ay - Ax_0}_{= A(y-x_0)} + \underbrace{Ax_0 - b}|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$$

$$\langle A(y-x_0), Ax_0 - b\rangle = 0$$

$$= \underbrace{|A(y-x_0)|^2}_{\geq 0} + |Ax_0 - b|^2 \geq |Ax_0 - b|^2$$

$$\Rightarrow |Ay - b| \geq |Ax_0 - b|.$$

2.) x erfülle $|Ax - b| \leq |Ay - b| \ \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$|Ax - b| = |Ax_0 - b|$$

$$\Rightarrow |Ax_0 - b|^2 = |Ax - b|^2 = |\underbrace{Ax - Ax_0}_{= A(x-x_0)} + \underbrace{Ax_0 - b}|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$$

$$= |A(x - x_0)|^2 + |Ax_0 - b|^2 \quad / - |Ax_0 - b|^2$$

$$\Rightarrow |\underbrace{A(x - x_0)}_{= Ax - Ax_0}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow Ax = Ax_0$$

3.)

$\underline{\Rightarrow:}$ x „beste Lösung" $\Rightarrow Ax \overset{2.)}{=} Ax_0 \overset{1.)}{=} \cancel{y_0}$

y_0 Orthogonalprojektion von b auf $\mathrm{im}\, A$.

Sei $y \in \mathbb{R}^n$: $Ay \in \mathrm{im}\, A \Rightarrow 0 = \langle Ax - b, Ay\rangle = \langle Ax, Ay\rangle - \langle b, A$

Def. vom inneren Pr. $= y^t A^t (Ax - b) = y^t (A^t Ax - A^t b)$

Setze $y = A^t Ax - A^t b$

$$\Rightarrow 0 = (A^t Ax - A^t b)^t (A^t Ax - A^t b) =$$

$$= |A^t Ax - A^t b|^2$$

$$\Rightarrow A^t Ax - A^t b = 0$$

$$\Rightarrow A^t Ax = A^t b.$$

$\Leftarrow$: $A^t A x = A^t b \Rightarrow A^t A x - A^t b = 0$

Sei $y \in \mathbb{R}^n$. $0 = y^t 0 = y^t (A^t A x - A^t b) =$

$= \underbrace{y^t A^t}_{=(Ay)^t} (Ax - b) \overset{\text{Def. inn. Produkt}}{=} \langle \underbrace{Ax - b}, Ay \rangle$

... Orthogonalform von b auf im $A \Rightarrow x_0 = Ax_0$

y_0

$\Rightarrow Ax_0 = Ax \Rightarrow |Ax - b| = |Ax_0 - b| \leq |Ay - b| \quad \forall y.$

$\square$

Beispiel:

Harssonde:

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}814 \cdot 10^{-4} & 0{,}7128 \\ 0{,}1872 & 0{,}1626 \\ 0{,}1392 & 0{,}3485 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8{,}586 \\ 9{,}612 \\ 9{,}891 \end{pmatrix}$$

Suchen "beste Lösung"

$$A^t A = \begin{pmatrix} 5{,}442 \cdot 10^{-2} & 7{,}922 \cdot 10^{-2} \\ 7{,}922 \cdot 10^{-2} & 0{,}6560 \end{pmatrix} \to \text{symmetrische Matrix}$$

$\hookrightarrow$ positiv definite Matrix

$$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 3{,}179 \\ 11{,}13 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: $A^t \cdot A \cdot x = A^t b$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 40{,}92 \\ 12{,}02 \end{pmatrix}$$ mit Gauß-Verfahren lösen

(mit PIVOT-Suche: $x = \begin{pmatrix} 40{,}89 \\ 12{,}03 \end{pmatrix}$)

Beispiel:

$15 x_1 + 9 x_2 = 122$

$10 x_1 + 6 x_2 = 81$

$25 x_1 + 15 x_2 = 206$

$\to$ bei exakter Rechnung keine Lösung

$\to$ d.h. suche „beste Lösung"

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 10 & 6 \\ 25 & 15 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 122 \\ 81 \\ 206 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 25 \\ 9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 10 & 6 \\ 25 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 & 570 \\ 570 & 342 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 25 \\ 9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 122 \\ 81 \\ 206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7790 \\ 4674 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 950 & 570 & 7790 \\ 570 & 342 & 4674 \end{array}\right) \quad |:190 \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 41 \\ 570 & 342 & 4674 \end{array}\right) \xrightarrow{-114 I} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 41 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

spezielle Lösung:

$x_1 = 1$ $\quad 5 \cdot 1 + 3 \cdot x_2 = 41$

$x_2 = 12$

$$\Rightarrow \underline{\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}}$$

Lösung d. homogenen Systems:

$$5 \quad 3 \mid 0 \qquad \vec{x}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\{ x : x \text{ ist „beste Lösung"} \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel: (allgemein)

$x = b_1$
$x = b_2$
$\vdots$
$x = b_n$

$\Rightarrow$ unser GLS

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = (n) \qquad A^t \cdot b = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$$

Gleichungssystem: $\quad n \cdot x = \sum_{j=1}^{n} b_j$

„beste Lösung": $\quad x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j \quad$ (arith. Mittel)

$\hookrightarrow$ d.h. wir sehen Mittelwert ist beste Lösung

5.) Pseudo-Inverse

A $m \times n$ - Matrix

Pseudoinverse, Moore - Penrose - Inverse

A inv.: $A^{-1} \cdot A = id$

$$(A^{-1} \cdot A)^t = A^{-1} \cdot A \qquad (A \cdot A^{-1})^t = A \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} \cdot A = A \qquad A^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

! Definition

> Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und A eine $m \times n$-Matrix. Dann heißt eine $n \times m$ Matrix A^+ (PLUS!) die <u>Pseudoinverse von A</u>,
>
> falls $(A \cdot A^+)^t = A \cdot A^+$,
>
> $(A^+ A)^t = A^+ \cdot A$
>
> $A \cdot A^+ \cdot A = A$
>
> und $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$.

Wir werden zeigen, dass $A^+ x \in (\ker A)^\perp$.

Proposition

> Falls $m \geq n$, dann ist $A^+ b$ eine „beste Lösung" von $Ax = b$.

! ZUSATZ

> $A^+ \overset{b}{x}$ ist diejenige beste Lösung mit „kleinstem Betrag"
>
> ($|x| \leq |y|$ $\forall$ „beste Lsg.")

Beweis:

$$(A^t A)(A^+ b) = \underbrace{A^t A}_{= (A^t A)^t} \underbrace{A^+}_{= ((A^+)^t)^t} b \;=$$

$$= \Big(\underbrace{(A^+)^t A^t}_{(A \cdot A^+)^t = A \cdot A^+} A\Big)^t \cdot b = (\underbrace{A \cdot A^+ \cdot A}_{= A})^t \cdot b = A^t \cdot b$$

Zusatz:

Sei y „beste Lösung". $y = \underbrace{y_1}_{\in \ker A} + \underbrace{A^+ \cdot b}_{\in (\ker A)^\perp}$

$$|y|^2 = |y_1 + A^+ b|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \underbrace{|y_1|^2}_{\geq 0} + |A^+ b|^2 \geq |A^+ b|^2 \quad \square$$

Satz

> Sei A $m \times n$ Matrix. Dann besitzt A eine eindeutig bestimmte Pseudoinverse A^+.

Beweis:

Sei P_1 die Orthogonalprojektion auf $(\ker A)^\perp$ und P_2 die Orthogonalprojektion auf $(\operatorname{im} A)$.

$A \cdot P_1$:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$: $\overbrace{P_1 \cdot x}^{P_1 \text{ von } x} - x \in \ker A$

$\Rightarrow 0 = A(P_1 x - x) = AP_1 x - Ax \Rightarrow A \cdot P_1 x = Ax$

$\Rightarrow \boxed{A \cdot P_1 = A}$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$: $P_2 \underbrace{Ax}_{\in \operatorname{Im} A} = Ax \Rightarrow \boxed{P_2 \cdot A = A}$

Definiere $A_0 : (\ker A)^\perp \to \operatorname{im} A$ durch $A_0 x := Ax$ (linear)

A_0 ist linear

$P_2 \underbrace{A_0 x}_{\in \operatorname{Im} A} = A_0 x \Rightarrow \boxed{P_2 A_0 = A_0}$

$\underbrace{A_0}_{\in (\ker A)^\perp} \cdot \underbrace{P_1}_{} \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{A \cdot P_1}_{= A} x = Ax \Rightarrow \boxed{A_0 \cdot P_1 = A}$

Wir wollen zeigen, dass $A_0 : (\ker A)^\perp \to \operatorname{im} A$ bijektiv:

injektiv:

Sei $\underbrace{x}_{\in (\ker A)^\perp} \in \ker A_0 \Rightarrow 0 = A_0 \cdot x = A \cdot x \Rightarrow x \in \ker A$

einziges Element, dass in $\ker A_0$ & $\ker A$ ist

$\Rightarrow x = 0$, also $\ker A_0 = \{0\} \Rightarrow A_0$ injektiv surjektiv:

Sei $x \in \operatorname{im} A$: $\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n : x = \underbrace{Ay}_{} = \overbrace{AP_1}^{=AP_1} \overbrace{y}^{\in (\ker A)^\perp} =$

$= A_0 (P_1 y)$

$\Rightarrow A_0$ ist surjektiv

Somit ist A_0 bijektiv, also gibt es eine lineare Inverse A_0^{-1} $\operatorname{im} A \to (\ker A)^\perp$ von A_0.

$P_1 \underbrace{A_0^{-1} x}_{\in (\ker A)^\perp} = A_0^{-1} x \Rightarrow P_1 A_0^{-1} = A_0^{-1}$

Definiere $A^+ := A_0^{-1} P_2$ $\quad (\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $n \times m$ - Matrix$)$

A^+ ist linear.

$A^+ x \in (\ker A)^\perp \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\underbrace{A}_{= A_0 \cdot P_1} \underbrace{A^+}_{= A_0^{-1} \cdot P_2} = A_0 \cdot \underbrace{P_1 \cdot A_0^{-1}}_{= A_0^{-1}} \cdot P_2 = P_2$

$\Rightarrow \boxed{A \cdot A^+ = P_2}$

$(A \cdot A^+)^t = P_2^t = P_2 = A \cdot A^+$

$\underbrace{A^+}_{= A_0^{-1} \cdot P_1} \cdot A = A_0^{-1} \underbrace{P_1 A}_{= A = A_0 \cdot P_1} = A_0^{-1} A_0 \cdot P_1 = P_1$

$\Rightarrow \boxed{A^+ \cdot A = P_1}$

$\to (A^+ A)^t = P_1^t = P_1 = A^+ \cdot A$

$\to (\underbrace{A \cdot A^+}_{P_2} \cdot A) = A$

$\to (\underbrace{A^+ \cdot A}_{P_1} \cdot \underbrace{A^+}_{= A_0^{-1} \cdot P_2}) = \underbrace{P_1 \cdot A_0^{-1}}_{A_0^{-1}} \cdot P_2 = A^+$

Eindeutigkeit:

Sei B eine Pseudoinverse von A.

$(AB)^t = AB \;,\; (AB)^2 = \underbrace{ABA}_{A}B = AB$

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ ist Orthogonalprojektion auf im AB

Zeigen, dass im AB = im A:

Sei $x \in \operatorname{im} A \cdot B \Rightarrow \exists y$ mit $x = A \cdot B \cdot y \Rightarrow x \in \operatorname{im} A$

Sei $x \in \operatorname{im} A \Rightarrow \exists y$ mit $x = \underbrace{A}_{= A \cdot B \cdot A} \cdot y = A \cdot B \cdot (A \cdot y)$

$\Rightarrow x \in \operatorname{im} AB$

Daher $AB = P_2$

$(BA)^t = BA \;,\; (BA)^2 = \underbrace{BAB}_{B}A = B \cdot A$

$\Rightarrow$ BA ist Orthogonalprojektion auf $(\ker BA)^\perp$

Wir zeigen, dass $\ker BA = \ker A$

Sei $x \in \ker A \Rightarrow A \cdot x = 0 \Rightarrow BAx = 0$

$\Rightarrow x \in \ker BA$

Sei $x \in \ker BA \Rightarrow B \cdot A \cdot x = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{A \cdot B \cdot A}_{= A} \cdot x = Ax$

$\Rightarrow x \in \ker A$

Somit ist also $B \cdot A = P_1$.

$B = \underbrace{B \cdot A}_{= P_2 = A \cdot A^+} \cdot B = \underbrace{B \cdot A}_{P_1 = A^+ \cdot A} \cdot A^+ = A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$

$\square$

Wir haben auch gezeigt:

Proposition:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.)\ A \cdot A^+ \text{ ist die Orthogonalprojektion auf } \operatorname{im} A. \\ 2.)\ A^+ \cdot A \text{ ist die Orthogonalprojektion auf } (\ker A)^\perp. \\ 3.)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ ist } A^+ \cdot x \in (\ker A)^\perp. \end{array}}$$

Korollar

1.) $(A^+)^+ = A$

2.) $(A^t)^+ = (A^+)^t$

! 3.) Falls A invertierbar ist $(m=n)$, dann ist $A^+ = A^{-1}$.

Beweis:

1.) $(A^+A)^t = A^+A$, $(AA^+)^t = AA^+$,

$A^+A^+ = A^+$, $AA^+A = A \Rightarrow (A^+)^+ = A$

2.) $$((A^+)^t A^t)^t = AA^+ = (\underbrace{(AA^+)^t}_{=AA^+})^t = (A^+)^t A^t$$

$$(A^t (A^+)^t)^t = (\underbrace{(A^+A)^t}_{=A^+A})^t = A^t (A^+)^t$$

$$A^t (A^+)^t \cdot A^t = (\underbrace{AA^+A}_{A})^t = A^t$$

$$(A^+)^t A^t (A^+)^t = (\underbrace{A^+AA^+}_{=A^+})^t = (A^+)^t \Rightarrow (A^t)^+ = (A^+)^t$$

3.) $$(\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=id})^t = id = A \cdot A^{-1}, \quad (\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{id})^t = id = A^{-1} \cdot A$$

$$\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=id} \cdot A, \quad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=id} \cdot A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^+ = A^{-1}$$

□

Nächstes Lemma + 1.) von übernächsten gilt auch im Unendlichdimensionalen, 2.) von übernächsten nur im Endlichdimensionalen $((V^\perp)^\perp = V)$

Lemma

$(\operatorname{im} A^t)^\perp = \ker A$

Beweis:

Sei $x \in (\operatorname{im} A^t)^\perp$. Sei $y \in \mathbb{R}^m$.

$0 = \langle x, \underbrace{A^t y}_{\in \operatorname{im} A^t} \rangle = y^t A x$. Setze $y = Ax$

$\Rightarrow 0 = (Ax)^t \cdot (Ax) = |Ax|^2 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$

Sei $x \in \ker A$. Sei $y \in \operatorname{im} A^t \Rightarrow \exists v$ mit $y = A^t v$.

$\langle x, \underbrace{y}_{= A^t v} \rangle = v^t \cdot \underbrace{Ax}_{=0} = 0 \Rightarrow x \in (\operatorname{im} A^t)^\perp$

$\square$

Lemma

$\boxed{\begin{array}{l} 1.)\ \ker(A^t \cdot A) = \ker A \\ 2.)\ \operatorname{im}(AA^t) = \operatorname{im} A \end{array}}$

Beweis:

1.) Sei $x \in \ker A \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^t A x = 0$

$\Rightarrow x \in \ker A^t A$.

Sei $x \in \ker A^t A \Rightarrow A^t A x = 0$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow 0 = \underbrace{y^t A^t}_{= (Ay)^t} Ax$

Setze $y = x$: $0 = (Ax)^t (Ax) = |Ax|^2$

$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$.

2.) $\operatorname{im} AA^t = \underbrace{((\operatorname{im} \underbrace{AA^t}_{= (AA^t)^t})^\perp)^\perp}_{\underset{\text{Lemma}}{=} \ker(AA^t)} = \underbrace{(\ker(\underbrace{AA^t}_{= (A^t)^t}))^\perp}_{\underset{1.)}{=} \ker A^t} =$

$$= (\underbrace{\ker A^t}_{\substack{=(\operatorname{im} A)^\perp \\ \text{Lemma}}})^\perp = ((\operatorname{im} A)^\perp)^\perp = \operatorname{im} A$$

$\square$

Proposition:

! Sei A eine $m \times n$-Matrix.

1.) $A^+ = (A^t A)^+ A^t$

2.) $A^+ = A^t \cdot (A \cdot A^t)^+$

Beweis:

1.) $$(A((A^tA)^+A^t))^t = A\underbrace{((A^tA)^+)^t}_{=(A^tA)^+} \cdot A^t = A \cdot (A^tA)^+A^t$$

$$\underbrace{(((A^tA)^+A^t)A)^t}_{=(A^tA)^+(A^tA)} \overset{(C^+C)^t = C^+C}{=} (A^tA)^+(A^tA)$$

$$A((A^tA)^+A^t)A = A(\underbrace{(A^tA)^+(A^tA)}_{\substack{\text{Orthogonalprojektion:} \\ \text{auf } (\underbrace{\ker(A^tA)}_{\ker A})^\perp \\ =P_1}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP_1 = A.$$

$$((A^tA)^+A^t)A((A^tA)^+A^t) = \underbrace{(A^tA)^+(A^tA)(A^tA)^+}_{=(A^tA)^+}A^t =$$

$$= (A^tA)^+A^t.$$

Somit ist $A^+ = (A^tA)^+A^t$.

2.) $\left(A\left(A^t(A\cdot A^t)^+\right)\right)^t = \left((AA^t)(AA^t)^+\right)^t = AA^t\,(AA^t)^+$,

$$(A^t(AA^t)^+A)^t = A^t \underbrace{((AA^t)^+)^t}_{= (AA^t)^+} \cdot A \;\circledeq\; A^t(AA^t)^+A,$$

$$A\left(A^t(AA^t)^+\right)A = \underbrace{(AA^t)\cdot(AA^t)^+}_{\text{Orthogonalprojektion auf } \underbrace{\underbrace{\operatorname{im} AA^t}_{= \operatorname{im} A}}_{\text{Lemma}} \;= P_2} A = P_2 A = A.$$

$$\left(A^t(AA^t)^+\right) A \left(A^t(AA^t)^+\right) = A^t \underbrace{(AA^t)^+(AA^t)(AA^t)^+}_{= (AA^t)^+} =$$

$$= A^t(AA^t)^+$$

$$\Rightarrow A^+ = A^t(AA^t)^+.$$

$\square$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^+ = ?$$

A^tA ... 2×2 Matrix

$A\cdot A^t$ ... 3×3 Matrix $\quad (\operatorname{rg} \leq 2)$

Verwenden $\quad A^+ = (A^t\cdot A)^+ A^t$

$$A^t\cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Gauß ⇒ nur Gauß verwenden

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 9 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad / \cdot 14$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 9 & 1 & 0 \\ 14\cdot 9 & 84 & 0 & 14 \end{array}\right) \quad (-9 \cdot \mathrm{I})$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 14 \end{array}\right) \quad (-3 \cdot \mathrm{II}) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 28 & -3\cdot 14 \\ 0 & 3 & -9 & 14 \end{array}\right) \quad /:$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 3 & -9 & 14 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (A^t \cdot A)^+ = (A^t A)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (A^t A)^+ A^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}}.$$

Andere Möglichkeit: Erraten

$$A = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \qquad A^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^+ = (1) \qquad A^+A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A A^+}_{=(1)} \cdot A = A \qquad A^+ \cdot \underbrace{A \cdot A^+}_{=(1)} = A^+$$

<u>MATLAB</u>: (Computerprogramm)

inv ... Inverse
pinv ... Pseudoinverse

⇒ Bei invertierbaren Matrizen:
Was ist besser: Inverse od. Pseudoinverse berechnen?

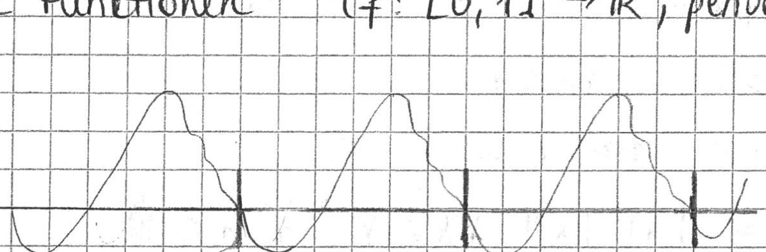
Inverse	Pseudoinverse
schneller	numerisch stabiler
	$(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t$

positiv definit

↳ hat praktische Bedeutung zur Berechnung d. Inversen

III. FOURIERREIHEN

! Periodische Funktionen ($f : [0,1] \to \mathbb{R}$, periodisch fortgesetzt



)

Versuch f durch Standardschwingungen zu approximieren

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$$

Darstellung bezüglich Orthonormalbasis

1.) Banachräume und Hilberträume

Grenzwert von Funktionenfolgen:

$f_n \to f$
- ▹ gleichmäßige Konvergenz (aus Analysis) (nicht durch Norm, aber durch Metrik beschreibbar usw.
- ▹ kompakt gleichmäßige Konvergenz → ~~Norm~~ Metrik
- ▹ punktweise Konvergenz (aus Analysis) → ~~Metrik~~ Topologie
- ▹ fast überall (z.B. Stochastik) → Topologie

Absolute Konvergenz einer Reihe ⇒ Konvergenz

Stimmt das?
- ▹ in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: ja (Vollständigkeit)
- ▹ in $\mathbb{Q}$: nein (nicht vollständig)

Definition

Ein Vektorraum $(V, \|.\|)$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt **normiert**, falls $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ mit:

1.) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

2.) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

3.) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V \quad \forall \lambda \in \overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$

4.) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V.$

Bemerkungen:

- Aus 4.) $\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$
- Durch $d(x,y) := \|x-y\|$ wird eine Metrik auf V definiert. [bei Metrik geht im Wesentlichen 3.) verloren]

Auf metrischen Räumen kann man Grenzwert (Stetigkeit, ...) definieren.

$x_n \to x$ (bzgl. $\|.\|$) $:\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N: \|x_n - x\| < \epsilon.$

Definition

Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt **Vektorraum mit innerem Produkt** $\langle .,. \rangle$, falls $\langle .,. \rangle : V \times V \to \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$ mit:

1.) $\langle v + \lambda w, y \rangle = \langle v, y \rangle + \lambda \langle w, y \rangle \quad \forall v, w \in V, \forall \lambda \in \overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$

2.) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \qquad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in V$

3.) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$

4.) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

(in normierten Raum $\nexists$ Winkel)

(im Raum mit innerem Produkt $\exists$ Winkel)

Bemerkungen:

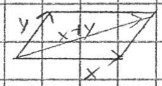
- $\langle v, x+y \rangle = \langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle$
- $\langle v, \lambda x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle$ $\quad \langle v, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle v, x \rangle$ in $\mathbb{C}$

Proposition

Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ VR mit innerem Produkt, dann ist durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm definiert.

Proposition (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann kommt $\|\cdot\|$ von einem inneren Produkt genau dann, wenn die Parallelogrammidentität $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$ gilt.



Konvergenz von Reihen

Absolute Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert

Proposition

Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum, (a_n) Folge in V mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ konvergiert.

Dann gelten:

1.) $\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$

2.) Sei $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, dann ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

gilt nicht für bedingte Konvergenz von Reihen

Beweis:

$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; , \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1.) $\|s\| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|s_n\|}_{= \|\sum_{k=1}^{n} a_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|a_k\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$

2.) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall n \geq N : \|s - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$K := \max\{\sigma^{-1}(j) : j \in \{1, 2, \dots N\}\} \geq N$.

Sei $n \geq K$: $\|s - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}}_{= \underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k}_{= s_N} + \dots}\| \leq \underbrace{\|s - s_N\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_k\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

Also: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$. $\square$

Cauchyfolge

(x_n) heißt Cauchyfolge, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, m \geq N$: $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

(x_n) konvergent $\Rightarrow$ (x_n) Cauchyfolge:

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall n \geq N : \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n, m \geq N$: $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon$.

Definition

Ein normierter Raum heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Definition

> 1.) Ein vollständiger normierter Raum heißt <u>Banachraum</u>.
>
> 2.) Ein Raum mit innerem Produkt, der vollständig ist, heißt <u>Hilbertraum</u>.

Proposition

> Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum, (a_n) Folge in V. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis:

$\left(\sum_{k=1}^{n} \|a_k\| \right)^*$ ist Cauchyfolge. $\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$n > m: \quad \underbrace{\|s_n - s_m\|}_{} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|a_k\| \right)$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

$\Rightarrow (s_n)$ ist Cauchyfolge. Da V vollständig $\Rightarrow$ (s_n) konvergiert

$\square$

[* bel. $\varepsilon > 0$, weil Cauchyfolge $\exists N: \forall n, m \geq N$ ... usw]

$C([0,1], \mathbb{C})$ [Menge aller stetigen Fkt von $[0,1] \to \mathbb{C}$]

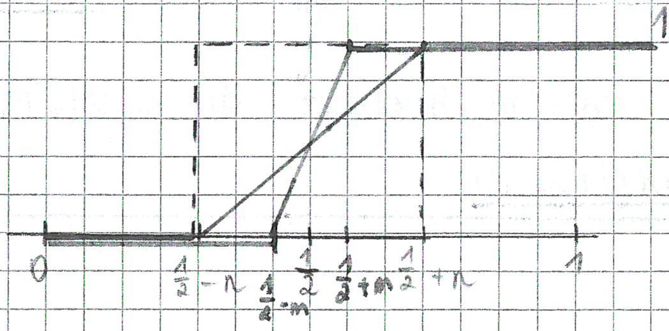
$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}$$ ... Norm von innerem Produkt.

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

$$1 \leq p \leq \infty: \quad \|f\|_p := \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p\, dx}$$

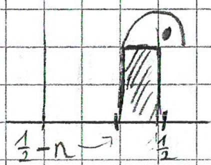
$(C([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig



$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 |f_n - f_m|^2 \leq \frac{2}{N}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{N}} \longrightarrow 0$$

Ang. $f_n \to f \in C([0,1], \mathbb{C})$ falls $f(\frac{1}{2}) > 0$.



Banachräume	Hilberträume
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ bez. $\|\cdot\|$ (im Endlichdim. alle Normen äquivalent)	$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ bez. $\langle\cdot,\cdot\rangle$
$(C([0,1], \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}), \|\cdot\|_\infty)$	$(C([0,1], \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}), \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig

Abstrakte Vervollständigung: $(V, \|\cdot\|)$

$\tilde{V} := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V : (x_n)$ ist Cauchyfolge $\}$

$(x_n) \equiv (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$

$[(x_n)] = \{ (y_n) : (y_n) \equiv (x_n) \}$

$(\tilde{V} = {\{\text{Cauchyfolgen}\}} / {\text{Nullfolgen}})$

Lebesgue-Integral

Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}^s$ heißt **σ-Algebra**,

falls: •) $\emptyset \in \mathcal{A}$

•) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R}^s \setminus A \in \mathcal{A}$

•) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{R}^s \in \mathcal{A}\right)$

Es sei $\mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen der Form

halboffener Quader

$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}\right) := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} : a_j \leq x_j < b_j \quad \forall j \right\}$ enthält.

(**Borelmenge**)

λ heißt **Lebesguemaß**, falls: $\lambda: \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

•) $\lambda(B) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}$

•) Falls $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, paarweise disjunkt, dann ist
$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$,

•) $\lambda\left(\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}\right)\right) = \prod_{j=1}^{s} (b_j - a_j)$.

(λ_s)

$\underset{\text{"}\lambda_2}{\lambda}(\text{Kreis mit Radius } 5) = 25\pi$

$\underset{\text{"}\lambda_1}{\lambda}(\mathbb{Q}) = 0$ (von jeder abzählbaren Menge ist Lebesguemaß 0)

$f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}, \quad f \geq 0$

f nimmt nur endlich viele Werte an $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 1_{\underbrace{B_j}_{\in \mathcal{B}}}$

($f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ heißt messbar, falls $\forall B \in \mathcal{B}$ (in $\mathbb{C}$)
$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ (in $\mathbb{R}^s$))

$\int f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \lambda(B_j)$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \cdot (+\infty) = 0 \\ \underset{>0}{\alpha} \cdot (+\infty) = +\infty \;, \quad \underset{\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}}{\alpha} \cdot (+\infty) = +\infty \end{array} \right)$$

$$f \geq 0 \Rightarrow \underbrace{f_n}_{\text{mit nur endl. vielen Werten}} \xrightarrow{\text{punktw.}} f \qquad (f_n) \nearrow$$

$$\int f := \lim_{n \to \infty} \int f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n$$

(lassen $+\infty$ zu)
(f ist Lebesgue-integrierbar, falls $\int f$ eine reelle Zahl ist)

$$\underbrace{g_n}_{\text{nur endl. viele Werte}} \nearrow f \text{ punktw.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n \to \infty} \int f_n$$

$f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{f^+}_{\geq 0} := \max\{f, 0\} \;, \quad \underbrace{f^-}_{\geq 0} := -\min\{f, 0\}$$

$$f = f^+ - f^- \;, \quad |f| = f^+ + f^-$$

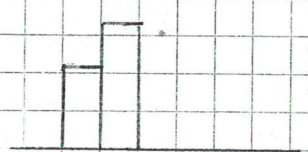
$$f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{C} \;, \quad f = u + iv = (u^+ - u^-) + i \cdot (v^+ - v^-)$$

f heißt <u>Lebesgue-integrierbar</u>, falls $\int u^+, \int u^-, \int v^+, \int v^- \in \mathbb{R}$.
und dann
$$\int f := \left(\int u^+ - \int u^- \right) + i \cdot \left(\int v^+ - \int v^- \right).$$

bei R.i.-$\int$: klass. Treppenfkt (auf Intervalle)

Unterschied:

- R.I.-$\int$: klassische Treppenfunktion (auf Intervalle def.)
- L.-$\int$: allg. Treppenfunktion (auch Borelmenge zugelassen)



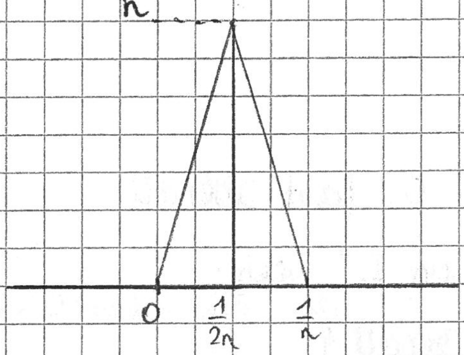
Eigenschaften:

- $\int (f + c \cdot g) = \int f + c \cdot \int g$
- $f \le g$ (reell) $\Rightarrow \int f \le \int g$

bei beide ✓

- f Lebesgue-integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ Lebesgue-integrierbar (bei R.I.-$\int$ falsch)
- f R.i. $\Rightarrow$ f Lebesgue-integrierbar und es kommt dasselbe heraus.

f_n



$f_n \to 0$ pktw.

$\int f_n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = \int 0$

$X \in \mathcal{B}$ (Borelmenge) (meistens $X = [0,1]$)

Definition

kann man nicht durch Topologie beschreiben

$(f_n), f: X \to \mathbb{C}$. Wir sagen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ <u>fast überall</u>, falls $\exists N \in \mathcal{B}$ mit $\lambda(N) = 0$, sodass $\forall x \in X \setminus N: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$\Rightarrow$ Abschwächung von pktw. Konvergenz

Satz von der monotonen Konvergenz (2. wichtigster)

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbare Funktionen, $f_n \ge 0$ und monoton wachsend $f_n \to f$ fast überall. Dann gilt $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Integral u. Grenzwert kann man vertauschen
$\Rightarrow +\infty$ zugelassen

Satz über die dominierte Konvergenz (wichtigster Satz)

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Fkt. $f_n: X \to \mathbb{C}$, $f: X \to \mathbb{C}$ messbar. Weiters sei $g: X \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit $|f_n| \le g$ (fast überall) $\forall n$

(Lebesgue-integrierbare:) $+\infty$ nicht zugelassen !!

f_n dominiert durch g

$\boxed{\text{Falls } f_n \to f \text{ fast überall, dann ist } f \text{ Lebesgue-integrierbar und es gilt } \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n}$

Grenzwert $\leftrightarrow$ Limes
(bei R.-$\int$ nur bei gleichm. Konv.)

Lemma von FATOU (3. Satz)

$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ messbare Fkt., } f_n \geq 0. \text{ Dann gilt } \int \underbrace{\liminf_{n\to\infty} f_n}_{\text{fast überall}} \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n .}$

Menge aller messb. Fkt.

$L^1 := \{ f : X \to \mathbb{R} : \int |f| \text{ existiert} \}$

$\mapsto$ 1. Norm

$\|f\|_1 = \int |f|$

$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = \int |f| \Leftrightarrow f = 0$ fast überall

Eigentlich sollten die Elemente von L^1 sein:
über Äquivalenzklasse def.!

$[f] := \{ g : g = f \text{ fast überall} \}$

(analog L^2, L^p)

$L^2 := \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \int |f|^2 \text{ existiert} \}$

$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g}$

$\|f\|_2 := \sqrt{\int |f|^2}$

$1 \leq p < \infty$:

$L^p := \{ f : \int |f|^p \exists \}$

$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int |f|^p}$

Minkovski-Ungleichung:

$1 < p < \infty$ und wähle q so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$f \in L^p, g \in L^q$: $\quad \Big| \int \underbrace{f\bar{g}}_{\in L^1} \Big| \leq \int \underbrace{|f\bar{g}|}_{\in L^1} \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$\to$ Cauchy-Schwarz'sche Ungl.

Hölder'sche Ungleichung — entspricht Δ-Ungl.

$1 \leq p < \infty$, $f, g \in L^p$.

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p .$$

Fourierreihen sind auf L^2!!

Warum ist L^2 vollständig?

Tschebyschev'sche Ungleichung

$f \in L^2$, $\varepsilon > 0$.

$$\lambda(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \| f \|_2^2$$

$$\left(f \in L^p : \quad - " - \quad \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \| f \|_p^p \right)$$

Beweis:

ε^2 vorziehen · Lebesguemaß

$$\| f \|_2^2 = \int |f|^2 = \underbrace{\int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} |f|^2}_{\geq \varepsilon^2} + \underbrace{\int_{\{|f| < \varepsilon\}} \underbrace{|f|^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq \varepsilon^2 \cdot \lambda(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}).$$

$\square$

Satz

$\boxed{L^2 \text{ ist vollständig.}}$

Beweis:

Sei (f_n) Cauchyfolge in L^2.

Finden Teilfolge (f_{n_k}) mit $\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \|_2 < \frac{1}{4^k}$.

$$A_k := \left\{ x : | f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) | \geq \frac{1}{2^k} \right\}$$

$$\lambda(A_k) \underset{\text{Tschebyschev'sche Ungl.}}{\leq} 4^k \left(\frac{1}{4^k} \right)^2 = \frac{1}{4^k}$$

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$$

$$A \subseteq \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \Rightarrow \lambda(A) \le \sum_{j=k}^{\infty} \underbrace{\lambda(A_j)}_{\le \frac{1}{4^k}} \overset{\text{Indexverschiebung}}{=} \frac{1}{4^k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j}_{\underset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(4^k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow \lambda(A) = 0$.

Sei $x \in X \setminus A \Rightarrow \exists k \; \forall j \ge k : \underbrace{x \in X \setminus A_j}$

$$\Rightarrow |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| < \frac{1}{2^j}$$

(geom. R.) Für $x \in X \setminus A \; \exists \alpha_x$ mit $f_{n_k}(x) \to \alpha_x$.

Definiere $f(x) := \begin{cases} \alpha_x, & x \in X \setminus A \\ 0, & x \in A. \end{cases}$

$\left(g(x) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2, & x \in X \setminus A \\ 0, & x \in A \end{cases} \right.$,

g ist L.i.)

↳ MONOTONE KONVERGENZ

Also $f_{n_k} \to f$ fast überall:

$\Rightarrow \quad |f_{n_k}|^2 \to |f|^2$ f.ü.

$|f_{n_k} - f|^2 \to 0$ f.ü.

$|f|^2 = \lim_{k \to \infty} |f_{n_k}|^2 = \liminf_{k \to \infty} |f_{n_k}|^2$

$\Rightarrow$ (Lemma von FATOU): $\int |f|^2 \le \liminf_{k \to \infty} \underbrace{\int |f_{n_k}|^2}_{\|f_{n_k}\|_2^2} < +\infty$

(d.h. das Integral links existiert).

Sonit ist $f \in L^2$.

Rechnung: $|f_{n_k} - f| \leq g$

Satz über d. dominierte Konvergenz:

$$\|f_{n_k} - f\|_2^2 = \int \underbrace{|f_{n_k} - f|^2}_{\to 0} \longrightarrow \int 0 = 0$$

$$\Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_2 \longrightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_2 \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|_2}_{\substack{\to 0 \\ \text{(weil Cauchyfolge)}}} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_2}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Also $f_n \to f$ in L^2. $\square$

Im Beweis wurde auch gezeigt:

Proposition

$\boxed{(f_n),\ f \in L^2,\ f_n \to f \text{ in } L^2 \Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_k}) \text{ mit } f_{n_k} \to f \text{ fast überall.}}$

Proposition

$\boxed{f \in L^2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists g \text{ stetig mit } \|f - g\|_2 < \varepsilon.}$

(„jede L^2-Funktion kann ich durch stetige Funktionen approximieren“).

(L^2 ist der kleinste Raum, der alle stetigen Funktionen enthält!)

Komplexe Zahlen

▸ $z = x + iy \quad , \quad e^z = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y$

▸ $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

$(e^z)^n = e^{nz} \quad , n \in \mathbb{Z}$

VORSICHT: $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1}} = \sqrt{1} = 1$

▸ Summensätze für sin und cos !!

▸ $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{I}: \; e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \\ \mathrm{II}: \; e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x \end{array}}$$

$\mathrm{I} \oplus \mathrm{II}: \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos x = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix})}}$$

$\mathrm{I} \ominus \mathrm{II}: \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sin x = \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \overset{(\frac{1}{i} = -i)}{=} -\frac{i}{2} \left(e^{+ix} - e^{-ix}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\ \sin x = \frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{array}}$$

Alex

Der Raum L^2

Es sei $s \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^s$ eine nichtleere Borelmenge. Dabei ist es sinnvoll (aber nicht unbedingt notwendig) $\lambda(X) > 0$ vorauszusetzen. Definiere $L^2 = L^2(X, \mathbb{C})$, $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|_2$ als

$$L^2(X, \mathbb{C}) := \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ messbar} : |f|^2 \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \} .$$

(1)
$$\text{Für } f, g \in L^2(X, \mathbb{C}) \text{ sei } \langle f, g \rangle := \int f\overline{g} .$$

$$\text{Falls } f \in L^2(X, \mathbb{C}) \text{ setze } \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, g \rangle} = \sqrt{\int |f|^2} .$$

Dann ist $\langle .,. \rangle$ ein inneres Produkt auf L^2 und $\|.\|_2$ die von diesem inneren Produkt bestimmte Norm.

Um die Vollständigkeit von L^2 zu zeigen (anders gesagt um zu beweisen, dass L^2 ein Hilbertraum ist) benötigt man zunächst einmal die Tschebyschev'sche Ungleichung, die wir jetzt formulieren und beweisen werden.

Proposition 1. *Es sei $f \in L^2$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\lambda\big(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|_2{}^2 .$$

Beweis. Wegen

$$\|f\|_2{}^2 = \int |f|^2 = \int_{\{x:|f(x)|\geq\varepsilon\}} \underbrace{|f|^2}_{\geq\varepsilon^2} + \int_{\{x:|f(x)|<\varepsilon\}} \underbrace{|f|^2}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \underbrace{\int_{\{x:|f(x)|\geq\varepsilon\}} \varepsilon^2}_{=\varepsilon^2\lambda(\{x:|f(x)|\geq\varepsilon\})} + \underbrace{\int_{\{x:|f(x)|<\varepsilon\}} 0}_{=0} = \varepsilon^2\lambda(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\})$$

ergibt sich $\lambda(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|_2{}^2$. □

Damit kann man jetzt die Vollständigkeit von L^2 beweisen. Im Beweis werden wir benötigen, dass $(|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt, was sich aus $0 \leq (|a| - |b|)^2$ ergibt. Daraus erhält man

(2)
$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^j |a_j|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2 ,$$

weil man durch Induktion

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n-2}|a_j| + (|a_{n-1}|+|a_n|)\right)^2 \underset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-2}\underbrace{(|a_{n-1}|+|a_n|)^2}_{\leq 2(|a_{n-1}|^2+|a_n|^2)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-1}|a_{n-1}|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2$$

erhält. Betrachtet man $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ so ergibt sich aus (2), dass

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|\right)^2 \underset{\text{wegen (2)}}{\leq} \sum_{j=1}^{n-1} 2^j|a_j|^2 + 2^{n-1}|a_n|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j|a_j|^2$$

gilt, und daher

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n|a_n|^2\,, \tag{3}$$

wobei bei den Reihen jeweils auch der Wert $+\infty$ zugelassen ist.

Satz 1. *Der Raum $L^2(X,\mathbb{C})$ ist vollständig bezüglich $\|.\|_2$. Weiters gibt es für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(X,\mathbb{C})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2 eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ fast überall.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$.
Behauptung. Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (f_n) mit $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_2 < \frac{1}{4^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Beweis der Behauptung. Weil (f_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4}$ für alle $n, m \geq n_1$.

Sei $k > 1$ und seien $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ mit $\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2 < \frac{1}{4^j}$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ und $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4^{k-1}}$ für alle $n, m \geq n_1$ bereits konstruiert. Da (f_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4^k}$ für alle $n, m \geq N$. Wähle $n_k \geq N$ so, dass $n_k > n_{k-1}$. Dann gilt $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{4^k}$ für alle $n, m \geq n_k$. Weiters gilt wegen $n_{k-1}, n_k \geq n_{k-1}$, dass $\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\|_2 < \frac{1}{4^{k-1}}$. ◇

Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $A_k := \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}$. Wegen Proposition 1 gilt

$$\lambda(A_k) \leq \frac{1}{(\frac{1}{2^k})^2}\underbrace{\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\|_2}_{<\frac{1}{4^k}}{}^2 < 4^k\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 = \frac{1}{4^k}\,.$$

Setze $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$0 \leq \lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \underbrace{\lambda(A_j)}_{<\frac{1}{4^j}} <$$

$$< \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{4^k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j}}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \text{ (geometrische Reihe)}} = \frac{4}{3}\frac{1}{4^k}.$$

Nachdem $\lim_{k\to\infty} \frac{4}{3}\frac{1}{4^k} = 0$, ist $\lambda(A) = 0$.
Behauptung. Sei $x \in X \setminus A$. Dann gibt es ein $\alpha_x \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \alpha_x$. Weiters konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2$.
Beweis der Behauptung. Da $x \in X \setminus A$ gibt es ein K, sodass für alle $j \geq K$ die Eigenschaft $x \notin A_j$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N mit $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Seien $k, p \geq \max\{K, N\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $k < p$ annehmen. Es gilt dann

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_p}(x)| \leq \sum_{j=k}^{p-1} \underbrace{|f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|}_{<\frac{1}{2^j}} \underset{\text{da } x \notin A_j}{<}$$

$$< \sum_{j=k}^{p-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ (geometrische Reihe)}} = \frac{1}{2^k} 2 = \frac{1}{2^{k-1}} \underset{\text{da } k \geq N}{<} \varepsilon .$$

Deshalb ist $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Daher gibt es ein $\alpha_x \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \alpha_x$.

Weil $x \notin A_j$ für $j \geq K$ gilt, erhält man $|f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2 < \left(\frac{1}{2^j}\right)^2$. Somit ist $2^j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2 < \frac{1}{2^j}$ für alle $j \geq K$. Nachdem $\sum_{j=K}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{K-1}}$ (geometrische Reihe), konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2$ nach dem Majorantentest. ◇

Jetzt definieren wir $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \alpha_x, & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ 0 & \text{falls } x \in A, \end{cases} \tag{4}$$

$$\text{und} \quad g(x) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^2, & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ 0 & \text{falls } x \in A. \end{cases} \tag{5}$$

Da $\lambda(A) = 0$ gilt, erhalten wir, dass $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ fast überall. Daraus ergibt sich, dass $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 = |f|^2$ fast überall und $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^2 = 0$ fast überall gelten. Weiters gilt für $x \in X \setminus A$, dass $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|$. Deswegen folgt aus (3), dass

$$|f_{n_k}(x) - f(x)|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| \right)^2 \underset{\text{wegen (3)}}{\leq}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2 = g(x) ,$$

also $|f_{n_k} - f|^2 \leq g$ fast überall für alle $k \in \mathbb{N}$.

Nachdem durch $g_k(x) := \sum_{j=1}^{k} 2^j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|^2$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen definiert ist, die fast überall gegen g konvergiert, folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz, dass

$$\int g = \lim_{k\to\infty} \int \underbrace{g_k}_{=\sum_{j=1}^{k} 2^j |f_{n_j} - f_{n_{j+1}}|^2} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} 2^j \underbrace{\int |f_{n_j} - f_{n_{j+1}}|^2}_{=\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2{}^2} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \underbrace{\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2{}^2}_{<\frac{1}{4^j}} < \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{2^j \left(\frac{1}{4^j}\right)^2}_{=(\frac{1}{8})^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^j \underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{1}{7} .$$

Somit ist g Lebesgue-integrierbar.

Da (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$ ist, ist $(\|f_n\|_2)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ (wegen $\big|\|f_n\|_2 - \|f_m\|_2\big| \leq \|f_n - f_m\|_2$, dem linken Teil der Dreiecksungleichung). Deshalb gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r := \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2$. Offensichtlich ergibt sich daraus, dass $\liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2 = r$ und $\liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2{}^2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2{}^2 = r^2$. Nachdem $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 = |f|^2$ fast überall gilt, ist auch $\liminf_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 = |f|^2$ fast überall. Aus dem Lemma von Fatou folgt, dass

$$\int |f|^2 = \int \liminf_{k\to\infty} |f_{n_k}|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\int |f_{n_k}|^2}_{=\|f_{n_k}\|_2{}^2} = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_2{}^2 = r^2 .$$

Also ist $|f|^2$ Lebesgue-integrierbar und deswegen $f \in L^2$.

Wir haben gezeigt, dass $|f_{n_k} - f|^2 \leq g$ fast überall für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass g Lebesgue-integrierbar ist, und dass $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^2 = 0$ fast überall gilt. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz gilt deshalb

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_2^2}_{=\int |f_{n_k}-f|^2} = \lim_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f|^2 = 0\,,$$

und somit $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_2 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$, weil (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$ ist. Jetzt sei $n \geq N$. Da $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_2 = 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $\|f_{n_k} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K$. Wähle $k \geq K$ so, dass $n_k \geq N$. Dann gilt

$$\| \underbrace{f_n - f}_{=f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f} \|_2 \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Daher gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, also $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2.

Schließlich sei (f_n) eine Folge in L^2, die $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2 erfüllt. Dann ist (f_n) auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_2$. In diesem Fall haben wir eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) konstruiert, die fast überall gegen die in (4) definierte Funktion $\widetilde{f}$ (in (4) wurde diese Funktion f genannt) konvergiert. Nachdem wir auch $\lim_{n\to\infty} f_n = \widetilde{f}$ in L^2 gezeigt haben, muss $\widetilde{f} = f$ fast überall gelten. Somit gilt $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ fast überall. □

Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ *stetig mit kompaktem Träger*, falls f stetig ist und es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^s$ mit $|x| \geq r$. Definiere $C_c(X, \mathbb{C})$ (kurz C_c oder $C_c(X)$) als die Menge aller Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, für die es eine stetige Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger gibt, sodass $f = \widetilde{f}\big|_X$ gilt. Zuerst zeigen wir, dass für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ die Menge $C_c([a, b], \mathbb{C})$ mit der Menge der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ übereinstimmt.

Proposition 2. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann gilt $C_c([a, b], \mathbb{C}) = C([a, b], \mathbb{C})$.*

Beweis. Für $f \in C_c([a, b], \mathbb{C})$ gibt es eine stetige Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger, sodass $f = \widetilde{f}\big|_{[a,b]}$. Da $\widetilde{f}$ stetig ist, ist auch f stetig, also $C_c([a, b], \mathbb{C}) \subseteq C([a, b], \mathbb{C})$.

Jetzt sei $f \in C([a, b], \mathbb{C})$. Definiere $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [a, b], \\ f(a)(x - a + 1) & \text{falls } x \in [a - 1, a], \\ f(b)(b + 1 - x) & \text{falls } x \in [b, b + 1], \\ 0 & \text{falls } x \leq a - 1 \text{ oder } x \geq b + 1. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{f}$ stetig und für $|x| \geq r := 1 + \max\{|a|, |b|\}$ ist $\widetilde{f}(x) = 0$. Also $\widetilde{f}$ ist stetig mit kompakten Träger und $\widetilde{f}\big|_{[a,b]} = f$. Damit ist $C([a,b],\mathbb{C}) \subseteq C_c([a,b],\mathbb{C})$ und daher $C_c([a,b],\mathbb{C}) = C([a,b],\mathbb{C})$. $\square$

Wir zeigen jetzt, dass jede L^2-Funktion durch Funktionen in C_c bezüglich $\|.\|_2$ approximiert werden kann.

Satz 2. *Sei $f \in L^2(X,\mathbb{C})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(X,\mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Beweis. Zuerst definieren wir C_1 als die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, die $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^s$ erfüllen. Für eine Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^s$ sei $C_1(A)$ die Menge aller $f \in C_1$, für die $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ gilt. Weiters sei für $n \in \mathbb{N}$ die Menge D_n durch

$$D_n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s : -n \leq x_j < n \text{ für alle } j \in \{1,2,\ldots,s\} \right\}$$

definiert. Setze $C_1(n) := C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n)$. Beachte, dass offensichtlich $fg \in C_1$ für $f, g \in C_1$ und $fg \in C_1(A)$ für $f \in C_1(A)$ und $g \in C_1$ gelten. Weiters ist wegen $|x| \leq n\sqrt{s}$ für $x \in D_n$ offensichtlich $C_1(n) \subseteq C_c(\mathbb{R}^s)$.

Behauptung 1. Für $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$. Setze $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$ und

$$[a,b) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s : a_j \leq x_j < b_j \text{ für alle } j \in \{1,2,\ldots,s\} \right\}.$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus [a,b))$ mit $\|1_{[a,b)} - f\|_2 < \varepsilon$.

Beweis der Behauptung. Es sei $t \in (0, \frac{1}{2}\min_{j\in\{1,2,\ldots,s\}} |b_j - a_j|)$. Für $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ definiere $f_{t,j} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ durch

$$f_{t,j}(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x_j < a_j \text{ oder } x_j > b_j, \\ 1\,, & \text{falls } a_j + t < x_j < b_j - t, \\ \frac{1}{t}(x - a_j)\,, & \text{falls } a_j \leq x_j \leq a_j + t, \\ -\frac{1}{t}(x - b_j)\,, & \text{falls } b_j - t \leq x_j \leq b_j. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f_{t,j} \in C_1$. Setze $f_t := \min_{j\in\{1,2,\ldots,s\}} f_{t,j}$. Dann ist $f_t \in C_1$. Wenn man $a_t := \begin{pmatrix} a_1+t \\ a_2+t \\ \vdots \\ a_s+t \end{pmatrix}$, $b_t := \begin{pmatrix} b_1-t \\ b_2-t \\ \vdots \\ b_s-t \end{pmatrix}$, $A := [a,b)$ und $A_t := [a_t, b_t)$ definiert, dann gilt $1_{A_t} \leq f_t \leq 1_A$. Insbesondere ist $f_t \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus A)$.

Wegen $1_{A_t} \leq f_t \leq 1_A$ ist $0 \leq 1_A - f_t = |1_A - f_t| \leq 1_A - 1_{A_t}$. Nachdem $1_A - 1_{A_t}$ nur die Werte 0 und 1 annimmt ist $(1_A - 1_{A_t})^2 = 1_A - 1_{A_t}$. Deshalb ist $|1_A - f_t|^2 \leq (1_A - 1_{A_t})^2 = 1_A - 1_{A_t}$. Somit gilt

$$\|1_A - f_t\|_2{}^2 = \int |1_A - f_t|^2 \leq \int (1_A - 1_{A_t}) =$$
$$= \lambda(A) - \lambda(A_t) = \prod_{j=1}^{s} |b_j - a_j| - \prod_{j=1}^{s} |b_j - a_j - 2t| \,.$$

Da $\lim_{t\to 0^+} \left(\prod_{j=1}^s |b_j - a_j| - \prod_{j=1}^s |b_j - a_j - 2t|\right) = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t mit $\|1_A - f_t\|_2{}^2 < \varepsilon^2$. Daher ist $\|1_A - f_t\|_2 < \varepsilon$ und wegen $f_t \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus A)$ ist die Behauptung gezeigt. $\diamond$

Behauptung 2. Es seien A_1, A_2, B Borelmengen in $\mathbb{R}^s$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gäbe es ein $f_1 \in C_1(B)$ und ein $f_2 \in C_1$ mit $\|1_{A_1} - f_1\|_2 < \varepsilon$ und $\|1_{A_2} - f_2\|_2 < \varepsilon$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(B)$ mit $\|1_{A_1 \cap A_2} - f\|_2 < \varepsilon$.

Beweis der Behauptung. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $f_1 \in C_1(B)$ und $f_2 \in C_1$ mit $\|1_{A_1} - f_1\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|1_{A_2} - f_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Offensichtlich ist $f := f_1 f_2 \in C_1(B)$. Weiters gilt

$$|\underbrace{1_{A_1 \cap A_2}}_{=1_{A_1}1_{A_2}} - \underbrace{f}_{=f_1 f_2}| = |1_{A_1}1_{A_2} - 1_{A_1}f_2 + 1_{A_1}f_2 - f_1 f_2| \leq$$
$$\leq \underbrace{|1_{A_1}|}_{\leq 1}|1_{A_2} - f_2| + |1_{A_1} - f_1|\underbrace{|f_2|}_{\leq 1} \leq |1_{A_2} - f_2| + |1_{A_1} - f_1| \,,$$

und wegen (2) ist deshalb $|1_{A_1 \cap A_2} - f|^2 \leq 2\left(|1_{A_1} - f_1|^2 + |1_{A_2} - f_2|^2\right)$. Daher ist

$$\|1_{A_1 \cap A_2} - f\|_2{}^2 = \int |1_{A_1 \cap A_2} - f|^2 \leq 2\left(\int |1_{A_1} - f_1|^2 + \int |1_{A_2} - f_2|^2\right) =$$
$$= 2\big(\underbrace{\|1_{A_1} - f_1\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \underbrace{\|1_{A_2} - f_2\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\big) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2 \,,$$

und somit $\|1_{A_1 \cap A_2} - f\|_2 < \varepsilon$. $\diamond$

Jetzt definiere $\mathcal{A}$ als die Familie aller Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^s$, für die es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(n)$ gibt, das $\|1_{A \cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$ erfüllt. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Nachdem $1_\emptyset = 0$ gilt, gilt für jedes n und jedes $\varepsilon > 0$, dass $\|1_{\emptyset \cap D_n} - 0\|_2 = 0 < \varepsilon$. Offensichtlich ist $0 \in C_1(n)$ und deswegen gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Sei $A \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1$ mit $\|1_{A\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Wegen

$$\underbrace{1_{\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n)}}_{=1-1_{A\cap D_n}} - (1-f) = 1 - 1_{A\cap D_n} - 1 + f = -(1_{A\cap D_n} - f)$$

ergibt sich $\|1_{\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n)} - (1-f)\|_2 = \|1_{A\cap D_n} - f\|_2$. Da $(1-f) \in C_1$ für $f \in C_1$ gilt erhalten wir, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_1$ mit $\|1_{\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n)} - g\|_2 < \varepsilon$ gibt. Nach Behauptung 1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n)$ mit $\|1_{D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Deshalb gibt es nach Behauptung 2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n) = C_1(n)$ mit $\|1_{(\mathbb{R}^s\setminus(A\cap D_n))\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Weil $(\mathbb{R}^s \setminus (A \cap D_n)) \cap D_n = (\mathbb{R}^s \setminus A) \cap D_n$ gilt, folgt daraus, dass $(\mathbb{R}^s \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ist also auch $(\mathbb{R}^s \setminus A_1) \in \mathcal{A}$. Wegen $A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap (\mathbb{R}^s \setminus A_1)$ gibt es nach Behauptung 2 zu jedem n und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(n)$ mit $\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Somit ist $(A_2 \setminus A_1) \in \mathcal{A}$.

Wieder seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Wie soeben gezeigt ist dann auch $(A_2 \setminus A_1) \in \mathcal{A}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $f_1, f_2 \in C_1(n)$ mit $\|1_{A_1\cap D_n} - f_1\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt dann $0 \le (f_1 + f_2)(x) \le 2$, $(f_1 + f_2)(x) = 0$ für alle $x \in (\mathbb{R}^s \setminus D_n)$ und wegen $(A_1 \cup A_2) \cap D_n = (A_1 \cap D_n) \cup ((A_2 \setminus A_1) \cap D_n)$

$$|\underbrace{1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n}}_{=1_{A_1\cap D_n}+1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n}} - (f_1 + f_2)| \le |1_{A_1\cap D_n} - f_1| + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2| \,.$$

Definiert man $f := \min(1, f_1 + f_2)$, dann ist offensichtlich $f \in C_1(n)$ und für jede Borelmenge B gilt $|1_B - f| \le |1_B - (f_1 + f_2)|$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f| &\le |1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - (f_1 + f_2)| \le \\ &\le |1_{A_1\cap D_n} - f_1| + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2| \,,\end{aligned}$$

und wegen (2) ist $|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f|^2 \le 2(|1_{A_1\cap D_n} - f_1|^2 + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2|^2)$. Deswegen gilt

$$\begin{aligned}\|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f\|_2{}^2 &= \int \underbrace{|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f|^2}_{\le 2(|1_{A_1\cap D_n} - f_1|^2 + |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2|^2)} \le \\ &\le 2\Bigg(\underbrace{\int |1_{A_1\cap D_n} - f_1|^2}_{=\|1_{A_1\cap D_n} - f_1\|_2{}^2} + \underbrace{\int |1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2|^2}_{=\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2\|_2{}^2}\Bigg) = \\ &= 2\big(\underbrace{\|1_{A_1\cap D_n} - f_1\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \underbrace{\|1_{(A_2\setminus A_1)\cap D_n} - f_2\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\big) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2 \,.\end{aligned}$$

Daher ist $\|1_{(A_1\cup A_2)\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$ und somit ist $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Als nächstes wollen wir durch Induktion nach k zeigen, dass $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}$ für $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ gilt. Im Fall $k = 1$ ist das offensichtlich. Sei jetzt $k > 1$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{A}$. Wegen $A_k \in \mathcal{A}$ ist daher $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \cup A_k \in \mathcal{A}$.

Jetzt sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Setze $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Weiters seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Definiere $B_1 := A_1 \cap D_n$ und für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ definiere $B_k := \left(A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)\right) \cap D_n$. Dann ist $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Borelmengen und es gelten $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap D_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap D_n = A \cap D_n$. Wegen der σ-Additivität ist

$$(2n)^s = \lambda(D_n) \geq \lambda(A \cap D_n) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)\ ,$$

und deshalb konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)$ in $\mathbb{R}$. Somit gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\left|\lambda(A \cap D_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Setze $G_1 := \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap D_n$ und $G_2 := (A \cap D_n) \setminus G_1$. Dann folgt aus $G_1 = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap D_n = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \subseteq A \cap D_n$, dass $\lambda(G_1) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)$ und daher $\lambda(G_2) = \lambda(A \cap D_n) - \lambda(G_1) = \left|\lambda(A \cap D_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Weil $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}$ gibt es ein $f \in C_1(n)$ mit $\|1_{G_1} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dadurch gilt

$$\|\underbrace{1_{A\cap D_n}}_{=1_{G_1}+1_{G_2}} - f\|_2^{\,2} = \underbrace{\|1_{G_1} + 1_{G_2} - f\|_2}_{\leq \|1_{G_1}-f\|_2 + \|1_{G_2}\|_2}{}^{2} \underset{\text{wegen (2)}}{\leq} 2\big(\underbrace{\|1_{G_1} - f\|_2^{\,2}}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \|1_{G_2}\|_2^{\,2}\big) <$$

$$< 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \int \underbrace{|1_{G_2}|^2}_{=1_{G_2}}\right) = 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \underbrace{\lambda(G_2)}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\right) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2\ ,$$

und somit $\|1_{A\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$. Deshalb ist $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Damit haben wir bewiesen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Betrachte $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$ mit $a < b$, das heißt $a_j < b_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Behauptung 1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f_1 \in C_1$ und ein $f_2 \in C_1(n) = C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n)$ mit $\|1_{[a,b)} - f_1\|_2 < \varepsilon$ und $\|1_{D_n} - f_2\|_2 < \varepsilon$. Wegen Behauptung 2 gibt es daher zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_1(\mathbb{R}^s \setminus D_n) = C_1(n)$ mit $\|1_{[a,b)\cap D_n} - f\|_2 < \varepsilon$, wodurch $[a, b) \in \mathcal{A}$ gilt. Da die Familie der Borelmengen die kleinste σ-Algebra ist, die alle Mengen der Form $[a, b)$ enthält, muss $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen sein.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^s$ eine Borelmenge mit $\lambda(B) < \infty$. Weiters sei $\varepsilon > 0$. Nachdem $(B \cap D_1) \subseteq (B \cap D_2) \subseteq (B \cap D_3) \subseteq \cdots$ und $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B \cap D_n)$ gilt wegen der Stetigkeitseigenschaft, dass $\lambda(B) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B \cap D_n)$. Da $\lambda(B) < \infty$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda(B \setminus D_n) = \lambda(B \setminus (B \cap D_n)) = \lambda(B) - \lambda(B \cap D_n) < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Weil $B \in \mathcal{A}$ ist, gibt es ein $f \in C_1(n) \subseteq C_c(\mathbb{R}^s)$ mit $\|1_{B\cap D_n} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist

$$\|\underbrace{1_B}_{=1_{B\cap D_n}+1_{B\setminus D_n}} - f\|_2{}^2 = \underbrace{\|1_{B\setminus D_n} + 1_{B\cap D_n} - f\|_2}_{\leq \|1_{B\setminus D_n}\|_2 + \|1_{B\cap D_n} - f\|_2}{}^2 \underset{\text{wegen (2)}}{\leq}$$

$$\leq 2\big(\|1_{B\setminus D_n}\|_2{}^2 + \underbrace{\|1_{B\cap D_n} - f\|_2{}^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}}\big) < 2\left(\int \underbrace{|1_{B\setminus D_n}|^2}_{=1_{B\setminus D_n}} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\underbrace{\lambda(B \setminus D_n)}_{<\frac{\varepsilon^2}{4}} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2\,,$$

woraus sich $\|1_B - f\|_2 < \varepsilon$ ergibt.

Betrachte $f \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es paarweise disjunkte Borelmengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mit $\lambda(B_j) < \infty$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, sodass $\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j} \leq |f|^2 = f^2$ und $\left|\int |f|^2 - \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}\right)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4}$ gelten. Im Folgenden verwenden wir, dass $|a-b|^2 \leq a^2 - b^2$ für $0 \leq b \leq a$ gilt, weil $0 \leq a-b \leq a+b$ und daher $|a-b|^2 = (a-b)(a-b) \leq (a-b)(a+b) = a^2-b^2$. Weil die Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ paarweise disjunkt sind, gelten $0 \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j} \leq f$ und $\left|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right|^2 \leq |f|^2 - \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}$, und deswegen gilt auch

$$\left\|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right\|_2^2 = \int \left|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right|^2 \leq$$

$$\leq \int |f|^2 - \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}\right) < \frac{\varepsilon^2}{4}\,.$$

Also ist $\left\|f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es ein $g_j \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $\|1_{B_j} - g_j\|_2 < \frac{\varepsilon}{2n(\sqrt{\alpha_j}+1)}$. Setze $g := \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} g_j$. Es ist dann

$g \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\| \underbrace{f-g}_{=f-\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j}1_{B_j}+\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j}1_{B_j}-\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j}g_j} \|_2 \leq$$

$$\leq \underbrace{\left\| f - \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} 1_{B_j} \right\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} \underbrace{\| 1_{B_j} - g_j \|_2}_{<\frac{\varepsilon}{2n(\sqrt{\alpha_j}+1)}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha_j}}{\sqrt{\alpha_j}+1}}_{\leq 1} \frac{\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2n}}_{=\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ gibt es $f_1, f_2, f_3, f_4 \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$, sodass $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ ($f_1 := (\mathrm{Re}(f))^+$, $f_2 := (\mathrm{Re}(f))^-$, $f_3 := (\mathrm{Im}(f))^+$ und $f_4 := (\mathrm{Im}(f))^-$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $g_1, g_2, g_3, g_4 \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ mit $\|f_j - g_j\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$ für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Definiere $g := (g_1 - g_2) + i(g_3 - g_4)$. Dann ist $g \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ und es gilt

$$\| \underbrace{f}_{=(f_1-f_2)+i(f_3-f_4)} - \underbrace{g}_{=(g_1-g_2)+i(g_3-g_4)} \|_2 =$$

$$= \|(f_1 - g_1) - (f_2 - g_2) + i(f_3 - g_3) - i(f_4 - g_4)\|_2 \leq$$

$$\underbrace{\|f_1 - g_1\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\|f_2 - g_2\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\|f_3 - g_3\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\|f_4 - g_4\|_2}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.$$

Schließlich sei $f \in L^2(X, \mathbb{C})$. Definiere die Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{falls } x \in X, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^s \setminus X. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$. Sei $\varepsilon > 0$. Weil $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ gilt, gibt es ein $\widetilde{g} \in C_c(\mathbb{R}^s, \mathbb{C})$ mit $\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_2 < \varepsilon$. Setze $g := \widetilde{g}\big|_X$. Dann ist $g \in C_c(X, \mathbb{C})$ und es gilt $\|f - g\|_2 \leq \|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_2 < \varepsilon$. □

Man kann also stets jede L^2-Funktion bezüglich $\|.\|_2$ durch Funktionen, die sich auf stetige Funktionen mit kompakten Träger fortsetzen lassen, approximieren. Leider ist es für eine Funktion im Allgemeinen nicht leicht festzustellen, ob sie in dieser liegt oder nicht. Deshalb zeigen wir jetzt noch, dass für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jede L^2-Funktion durch stetige Funktionen bezüglich $\|.\|_2$ approximiert werden kann.

Korollar 2.1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiters sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ in $L^2([a,b],\mathbb{C})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Beweis. Betrachte $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2 gibt es ein $g \in C_c([a,b],\mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Wegen Proposition 2 ist g stetig. $\square$

2.) FOURIERREIHEN

Betrachten $f: [0,1] \to \mathbb{C}$, L^2 $(f \in L^2)$

Proposition

$\boxed{\begin{array}{l} \triangleright \ \|1\|_1 = 1, \\ \quad \|\sqrt{2}\cdot\cos(2\pi n x)\|_2 = 1 \\ \quad \|\sqrt{2}\sin(2\pi n x)\|_2 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ \triangleright \ \langle 1, \sqrt{2}\cdot\cos(2\pi n x)\rangle = \langle 1, \sqrt{2}\cdot\sin(2\pi n x)\rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \triangleright \ \langle \sqrt{2}\cos(2\pi n x), \sqrt{2}\cos(2\pi m x)\rangle = \\ \qquad = \langle \sqrt{2}\sin(2\pi n x), \sqrt{2}\sin(2\pi m x)\rangle = 0 \ \forall n \neq m \in \mathbb{N} \\ \triangleright \ \langle \sqrt{2}\cos(2\pi n x), \sqrt{2}\sin(2\pi m x)\rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \end{array}}$

Beweis:

PS. $\square$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei V_n der von $B_n := \{1, \sqrt{2}\cdot\cos(2\pi x), \dots, \sqrt{2}\cos(2\pi n x),$
$\sqrt{2}\sin(2\pi x), \dots, \sqrt{2}\sin(2\pi n x)\}$

erzeugte Teilraum von L^2 $(\dim V_n = 2n+1)$.

B_n Orthonormalbasis von V_n

Sei $\mathcal{F}_n$ die Orthogonalprojektion von L^2 in V_n.

$(V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots)$ $\qquad \mathcal{F}_n(f)$, $\mathcal{F}_n f$

(Orthogonalprojektion: $\sum \langle v, v_j\rangle \cdot \underset{\text{ONB}}{v_j}$)

Daher $\mathcal{F}_n f = \langle f, 1\rangle \cdot 1 + \sum_{j=1}^{n} \langle f, \sqrt{2}\cos(2\pi j x)\rangle \sqrt{2}\cos(2\pi j x) \oplus$

$\oplus \sum_{j=1}^{n} \langle f, \sqrt{2}\sin(2\pi j x)\rangle \cdot \sqrt{2}\sin(2\pi j x) =$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} \Big(2 \underbrace{\int_0^1 f(x) \cos(2\pi j x)\,dx}_{\text{formaler: } \int_0^1 f(t) \cos(2\pi j t)\,dt}\Big) \cos(2\pi j x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \Big(2 \cdot \int_0^1 f(x) \sin(2\pi j x)\,dx\Big) \sin(2\pi j x)$$

Das sind dann schon die Koeffizienten für die Fourierreihen.

$$\mathcal{F}_n f = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \cos(2\pi j x) + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \sin(2\pi j x),$$

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad a_j = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \cos(2\pi j x)\,dx,$$

$$b_j = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \sin(2\pi j x)$$

$$a_n \cdot \underbrace{\cos(2\pi n x)}_{= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x}\right)} + b_n \cdot \underbrace{\sin(2\pi n x)}_{= -\frac{i}{2}\left(e^{2\pi i n x} - e^{-2\pi i n x}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - i \cdot \frac{b_n}{2}\right)}_{=: c_n} \cdot e^{2\pi i n x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + i \cdot \frac{b_n}{2}\right)}_{=: c_{-n}} \cdot e^{-2\pi i n x}$$

$$a_0 = \underbrace{a_0}_{= c_0} \cdot e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x}$$

$$\mathcal{F}_n f = \sum_{j=-n}^{n} c_j \cdot e^{2\pi i j n}$$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i \cdot \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x - i \cdot 2 \cdot \int_0^1 f(x) \sin(2\pi i n x) \right)$$

$$= \int_0^1 f(x) \Big(\underbrace{(\cos(2n\pi x) - i \sin(2\pi n x)}_{= e^{-2\pi i n x}}) \Big) =$$

$$= \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i n x} \, dx$$

<u>analog</u>: $c_{-n} = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i (-n) x} \, dx$

$$c_0 = \int_0^1 f(x) \, dx$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$: $c_n = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i n x} \, dx = \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle$

Proposition

$\tilde{\mathcal{B}}_n = \{ e^{-2\pi i n x}, e^{-2\pi i (n-1) x}, \dots, \underbrace{1}_{= e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x}}, \dots, e^{2\pi i (n-1) x}, e^{2\pi i n x} \}$

ist Orthonormalbasis von V_n.

<u>Beweis:</u>

$$\| e^{2\pi i k x} \|_2^2 = \int_0^1 | \underbrace{e^{2\pi i k x}}_{=1} |^2 = 1$$

$k \neq j$: $\langle e^{2\pi i k x}, e^{2\pi i j x} \rangle = \int_0^1 \underbrace{e^{2\pi i k x} \cdot e^{-2\pi i j x}}_{= e^{2\pi i (k-j) x}} =$

$$\overset{HS}{=} \frac{e^{2\pi i (k-j) x}}{k-j} \Big|_0^1 = \frac{1}{k-j} \cdot 1 - 1 = 0$$

$\square$

! **Definition**

Sei $f \in L^2$. Setze $a_0 := \int_0^1 f(x) \, dx$, für $n \in \mathbb{N}$

$a_n := 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \cos(2\pi n x) \, dx$ und $b_n := 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \sin(2\pi n x) \, dx$,

und für $n \in \mathbb{Z}$ setze $c_n := \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i n x} \, dx$.

Dann heißt

$$\mathcal{F} f := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(2\pi n x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{2\pi i n x}$$

die <u>Fourierreihe</u> von f.

Fourierreihen auf $[a,b]$

$$\mathcal{F}f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{b-a} \cdot n \cdot (x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{b-a} \cdot n \cdot (x-a) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{2\pi i}{b-a} \cdot (x-a)},$$

wobei $a_0 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_0^1 f(x)\,dx,$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_0^1 f(x) \cdot \cos \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_0^1 f(x) \cdot \sin \ldots,$$

$$c_n = \frac{1}{b-a} \cdot \int_0^1 f(x) \cdot e^{\frac{2\pi i}{b-a}}$$

Hier ist ONB:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \cos \ldots, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \ldots, \ldots, \ldots \right\}$$

bzw. $\left\{ \ldots, \frac{1}{\sqrt{b-a}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{b-a}(x-a)}, \ldots \right\}$

$\mathcal{F}_n f \to \mathcal{F}f$?

Proposition

Sei $a_0 \in \mathbb{C}$, (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{C}$, bzw. $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ „Folge“ in $\mathbb{C}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergieren, bzw. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ konvergiert, dann konvergiert

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x) \text{ in } L^2 \text{ (absolut)},$$

bzw. konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{2\pi i n x}$ in L^2 (absolut).

(beliebige Vertauschungen möglich)

Beweis:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos(2\pi k x)$$

$$n > m: \quad \| s_n - s_m \|_2^2 = \| \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{a_k \cdot \cos(2\pi k x)}_{= \frac{a_k}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi k x)} \|_2^2 = (\text{Pythagoras})$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{\frac{|a_k|^2}{2}}_{\leq |a_k|^2} \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

Wegen der Vollständigkeit konvergiert s_n, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)$.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k e^{2\pi i k x}$$

$$\| s_n - s_m \|_2^2 = \| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e^{2\pi i k x} \|_2^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \xrightarrow{n,m \to +\infty} 0$$

$$\Rightarrow (L^2 \text{ vollst.}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{2\pi i k x} \text{ konvergiert.}$$

$\square$

Proposition

Sei $f \in L^2$. Dann gilt $\mathcal{F}f = \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}_n f$ in L^2 und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergieren.

Weiters gilt:

$$\| \mathcal{F} f \|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \| f \|_2^2,$$

insbesondere: $\| \mathcal{F} f \|_2 \leq \| f \|_2$.

Beweis:

$$\underbrace{\| \mathcal{F}_n f \|^2}_{} = $$

$$= a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(2\pi j x) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(2\pi j x)$$

$$= \| a_0 \cdot 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi j x)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi j x)} \|_2^2 =$$

$$= |a_0|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq \| f \|_2^2$$

$$\| f \|_2^2 = \| (f - \mathcal{F}_n f) + \mathcal{F}_n f \|_2^2 \underset{\langle f - \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n f \rangle = 0}{\overset{\text{Pythagoras}}{=}} \underbrace{\| f - \mathcal{F}_n f \|_2^2}_{\geq 0} + \| \mathcal{F}_n f \|_2^2 \geq$$

$$\geq \| \mathcal{F}_n f \|_2^2$$

$$\| \underbrace{\mathcal{F}_n f}_{= \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{2\pi i j x}} \|_2^2 = \sum_{j=-n}^{n} |c_j|^2 \leq \| f \|_2^2 .$$

Daher konvergieren $|a_0|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$

und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergieren.

Daher gilt: $\mathcal{F} f = \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}_n f$ in L^2.

fast überall konvergent

$$\| \mathcal{F} f \|_2^2 = \lim_{n \to \infty} \| \mathcal{F}_n f \|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \| f \|_2^2$$

$$\Rightarrow \| \mathcal{F} f \|_2 \leq \| f \|_2$$

$\square$

Später zeigen wir: Für $f \in L^2$ gilt $\mathcal{F} f = f$

$(\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}_n f = f)$ in L^2.

Man kann zeigen: Für $f \in L^2$ gilt $\mathcal{F}_n f \to f$ fast überall.

punktweise Konvergenz: Bedingungen angeben

gleichmäßige Konvergenz: Bedingungen angeben

$\Rightarrow$ punktweise $\qquad \Rightarrow L^2$

▶ Es gilt für $f, g \in L^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$: $\mathcal{F}(f+\lambda g) \overset{\text{Linearität}}{=} \mathcal{F}f + \lambda \mathcal{F}g$

<u>Beweis:</u> $\| \mathcal{F}(f+\lambda g) - (\mathcal{F}f + \lambda \mathcal{F}g) \|_2 \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq}$

$$\leq \| \mathcal{F}(f+\lambda g) - \mathcal{F}_n(f+\lambda g) \|_2 +$$

$$+ \| \underbrace{\overset{\text{Orthogonalprojektion}}{\mathcal{F}_n}(f+\lambda g)}_{= \mathcal{F}_n f + \lambda \mathcal{F}_n g} - (\mathcal{F}f + \lambda \mathcal{F}g) \|_2 \leq$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\| \mathcal{F}(f+\lambda g) - \mathcal{F}_n(f+\lambda g) \|_2}_{\to 0, \text{ da } \mathcal{F}_n \; L^2\text{-Fkt.}} + \underbrace{\| \mathcal{F}_n f - \mathcal{F} f \|_2}_{\to 0} + |\lambda| \cdot \underbrace{\| \mathcal{F}_n g - \mathcal{F} g \|_2}_{\to 0}}_{\to 0}$$

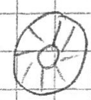
$\Rightarrow \mathcal{F}(f+\lambda g) = \mathcal{F}f + \lambda \mathcal{F}g$. □

▶ Für $f, g \in L^2$ gilt: $\| \mathcal{F}f - \mathcal{F}g \|_2 \leq \| f - g \|_2$.

<u>Beweis:</u>

$\| \underbrace{\mathcal{F}f - \mathcal{F}g}_{= \mathcal{F}(f-g)} \|_2 \leq \| f - g \|_2$ □

▶ Schönere Konvergenzeigenschaften:

- Potenzreihen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (Konvergenzgebiet: ) $R = \infty$
- Laurentreihe: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ (Konvergenzgebiet: )

Fourierreihe: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{e^{2\pi i n x}}_{=\left(e^{2\pi i x}\right)^n}$

Spezialfall d. Laurentreihe !!!

↳ bei Fourierreihe befindet man sich immer am Rand, daher nicht so schöne Eigenschaften!

3. Konvergenz der Fourierreihen

Proposition

$$\boxed{\text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x} = \frac{\sin 2\pi (n+\frac{1}{2})x}{\sin \pi x} \quad \left(= \frac{\sin 2\pi (n+\frac{1}{2})x}{\sin 2\pi \frac{1}{2} x} \right)}$$

Beweis:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x} = e^{-2\pi i n x} \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{e^{2\pi i k x}}_{=\left(e^{2\pi i x}\right)^k} =$$

$$= e^{-2\pi i n x} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} \left(e^{2\pi i x}\right)^k} = e^{-2\pi i n x} \cdot \frac{1-e^{2\pi i (2n+1) x}}{1-e^{2\pi i x}} \; ⊜$$

$$\underset{\text{(endl. geom. Reihe)}}{=} \frac{1-\left(e^{2\pi i x}\right)^{2n+1}}{1-e^{2\pi i x}}$$

$$⊜ \; \frac{e^{-2\pi i n x} - e^{2\pi i (n+1) x}}{1-e^{2\pi i x}} \cdot \left(\frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \right) =$$

$$= \frac{e^{-2\pi i (n+\frac{1}{2}) x} - e^{2\pi i (n+\frac{1}{2}) x}}{e^{-\pi i x} - e^{\pi i x}} =$$

$$= \frac{\cancel{-2i} \sin(2\pi (n+\frac{1}{2}) x)}{\cancel{-2i} \cdot \sin(\pi x)} = \frac{\sin (2\pi (n+\frac{1}{2}) x)}{\sin \pi x} \qquad \square$$

Unsere Funktion können wir uns mit der Eigenschaft $f(x+1) = f(x)$ vorstellen.

Proposition

Es gilt für $f \in L^2$ und $c \in \mathbb{R}$, dann

$$\int_0^1 f(x+c)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Beweis:

$$\int_0^1 f(x+c)\,dx = \underbrace{\int_0^{1-c} f(x+c)\,dx}_{\left(\substack{t=x+c\\ dt=dx}\right) = \int_c^1 f(t)\,dt} + \underbrace{\int_{1-c}^1 f(x+c)\,dx}_{\left(\substack{t=x+c\\ dt=dx}\right) = \int_0^c f(t)\,dt} =$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt. \qquad \square$$

Proposition

Für $f \in L^2$ und $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ gilt

$$\underbrace{\mathcal{F}_n f(x)}_{} = \int_0^1 f(x+t) \cdot \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt.$$

$$= \sum_{j=-n}^{n} c_j \cdot e^{2\pi i j x}.$$

Beweis:

$$\mathcal{F}_n f(x) = \sum_{j=-n}^{n} \underbrace{c_j}_{= \int_0^1 f(t)\cdot e^{-2\pi i j t}\,dt} e^{2\pi i j x} = \sum_{j=-n}^{n} \underbrace{\int_0^1 f(t)\cdot e^{2\pi i j (x-t)}\,dt}_{= \int_0^1 f(x+t)\cdot e^{-2\pi i j t}\,dt} =$$

$\int$ und $\sum$ vertauschen $\to$ Linearität

$$= \int_0^1 f(x+t)\Big(\underbrace{\sum_{j=-n}^{n} e^{-2\pi i j t}}_{= \sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi i j t} \overset{\text{Prop.}}{=} \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}}\Big)\,dt = \int_0^1 f(x+t)\cdot \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})\cdot t}{\sin \pi t}\,dt \qquad \square$$

NACHTRAG ZU FOURIERREIHEN:

In manchen Fällen muss man $\mathcal{F}f$ nicht über a_0, a_n's, b_n's bestimmen

z.B. • $\mathcal{F}(\cos(8\pi x) + 219 \sin(36\pi x)) = \cos(8\pi x) + 219 \sin(36\pi x)$

da Linearkombination von Basiselementen

• $\mathcal{F}(\underbrace{7}_{=7\cdot 1}) = 7$, da Linearkombination von Basiselementen

$1 \rightarrow$ Basiselement

Proposition

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin \pi x}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin \pi x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin \pi x}\,dx.}$$

Problem bei $x=0$: $\frac{0}{0}$

Beweis:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin \pi x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{2\pi(n+\frac{1}{2})x}}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{\sin \pi x}{\pi x}}_{\to 1}} \cdot \underbrace{2(n+\tfrac{1}{2})}_{=2n+1} =$$

$$= 2n+1$$

π kann man weglassen, wenn man 2π – " – davor schreibt, wegen der Periode

$$\frac{\sin \overbrace{2\pi(n+\frac{1}{2})(1-x)}^{2\pi n + \pi - 2\pi}}{\sin \underbrace{\pi(1-x)}_{\pi - \pi x}} = \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})x}{\sin \pi x} =: h(x)$$

$$\int_0^{\frac12} h(x)\,dx = \left(\begin{array}{l} x = 1-y \\ dx = -dy \end{array}\right) = -\int_1^{\frac12} \underbrace{h(1-y)}_{=h\,y}\,dy = \int_{\frac12}^1 h(y)\,dy$$

$\square$

Proposition

> Sei f eine stetige Funktion, $[0,1] \to \mathbb{C}$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, Intervalle $A_1, \dots, A_n$ mit $\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot 1_{A_j} \|_\infty < \varepsilon$.

Beweis:

f glm stetig $\Rightarrow \exists\, \delta > 0: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $c_0 := 0 < c_1 < \dots < c_n =: 1$ so, dass $|c_j - c_{j-1}| < \delta \ \forall j$

Setze $A_1 := [c_0, c_1]$, $A_j := (c_{j-1}, c_j]$, $\alpha_j := f(c_j)$.

Sei $x \in [0,1] \Rightarrow \exists!\, j: \ x \in A_j: \ |x - c_j| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{\alpha_j}_{=f(c_j)}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left| f(x) - \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k} \right)(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k} \|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\square$

! Proposition

> Sei $f \in L^2$. Dann gilt: $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 f(x) \cdot \sin(\lambda x)\,dx = 0$.

Beweis:

1. Schritt:

(1_A, A Intervall). Sei $A = [a,b]$ bzw. $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b).

$f = 1_A$ charakteristische Funktion

1, wenn x aus Intervall
0, sonst

$$\int_0^1 f(x) \sin(\lambda x)\,dx = \int_0^1 1_A(x) \cdot \sin(\lambda x)\,dx = \int_a^b \sin(\lambda x)\,dx \overset{(HS)}{=}$$

$$= \frac{\cos(\lambda a) - \cos(\lambda b)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 f(x) \sin(\lambda x)\, dx \right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{\lambda} \Big(\underbrace{|\cos(\lambda a)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos(\lambda b)|}_{\leq 1} \Big) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 f(x) \cdot \sin(\lambda x)\, dx = 0.$$

2. Schritt:

von Prop. zu vor

$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$, klass. Treppenfunkt, A_j Intervalle

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}} \sin(\lambda x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overbrace{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 1_{A_j} \sin(\lambda x)\, dx}^{=0} = 0$$

3. Schritt:

$f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ist stetig. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$, die man durch die klass. Treppenfkt. g bzgl. der ∞-Norm approximiert

A_j Intervalle mit $\|g - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach dem 2. Schritt $\exists \lambda_0 \; \forall \lambda \geq \lambda_0$:

$$\left| \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $\lambda \geq \lambda_0$: $\left| \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{= f - g + g} \sin(\lambda x)\, dx \right| \leq$

$$\leq \underbrace{\left| \int_0^1 \underbrace{(f-g)(x)}_{|.| \leq \|f-g\|_\infty} \cdot \underbrace{\sin(\lambda x)}_{|.| \leq 1} dx \right|}_{\leq \|f-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\, dx \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0.$$

Approximation bzgl. 2-Norm

4. Schritt:

$f \in L^2$. Sei $\varepsilon > 0$ $\to \exists g$ stetig mit $\|g - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach dem 3. Schritt $\exists \lambda_0 \ \forall \lambda \geq \lambda_0$.

$\left| \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\, dx \right| < \varepsilon/2$.

Sei $\lambda \geq \lambda_0$.

$$\left| \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{f-g+g} \cdot \sin(\lambda x)\, dx \right| \leq \underbrace{\left| \underbrace{\int_0^1 (f-g)(x) \sin(\lambda x)\, dx}_{= \langle f-g, \sin(\lambda x) \rangle} \right|}_{\overset{\text{Cauchy Schwarz Ungl.}}{\leq} \underbrace{\|f-g\|_2}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\|\sin(\lambda x)\|_2}_{\leq 1}} + \underbrace{\left| \int_0^1 g(x) \sin(\lambda x)\, dx \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Also $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0$.

Definition

$f : [0,1] \to \mathbb{C}$, $x_0 \in [0,1]$.

$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ für $x_0 \in [0,1)$, $f(1^+) := f(0^+)$

$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ für $x_0 \in (0,1]$, $f(0^-) := f(1^-)$

$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$ für $x_0 \in [0,1)$, $f'(1^+) := f'(0^+)$.

$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$ für $x_0 \in (0,1]$, $f'(0^-) := f'(1^-)$

Proposition

$f : [0,1] \to \mathbb{C}$, $c_0 = 0 < c_1 < \ldots < c_n = 1$, $f|_{(c_{j-1}, c_j)}$ stetig $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(c_j^-) \exists \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

$f(c_j^+) \exists \ \forall j \in \{0, \ldots, n-1\}$ (f stückw. stetig). Dann ist $f \in L^2$

Beweis:

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. $f_j : [c_{j-1}, c_j] \to \mathbb{C}$

$$f_j(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (c_{j-1}, c_j) \\ f(c_{j-1}^+), & x = c_{j-1} \\ f(c_j), & x = c_j. \end{cases}$$

$\Rightarrow \underbrace{f_j}_{|f_j|^2}$ stetig. Nach dem HS existiert

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} |f_j|^2 = \int_{c_{j-1}}^{c_j} |f|^2.$$

Daher existiert $\int_0^1 |f|^2 = \sum_{j=1}^{n} \int_{c_{j-1}}^{c_j} |f|^2$, also $f \in L^2$.

$\square$

Satz

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine L^2-Funktion. Weiters sei $x_0 \in [0,1]$ und es existieren $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$, $f'(x_0^+)$ und $f'(x_0^-)$. Dann gilt:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} F_n f(x_0)}_{} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

$$= Ff(x_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x_0)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e$$

! Beweis:

1. Schritt

Wir definieren $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$g(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{\sin \pi t}, & \text{für } t \in (0, \frac{1}{2}] \\ \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{\sin \pi t}, & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{\pi} \cdot f'(x_0^+), & \text{für } t = 0 \\ \frac{1}{\pi} \cdot f'(x_0^-), & \text{für } t = 1 \end{cases}$$

Behauptung : $g \in L^2$

lim u. Fkt.wert vertauschen ← wegen Stetigkeit

Beweis d. Behauptung:

$$\lim_{t \to 0^+} \underbrace{g(t)}_{} = \lim_{t \to 0^+} \underbrace{\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}} \cdot \underbrace{\frac{\pi t}{\sin(\pi t)}} \cdot \frac{1}{\pi} =$$

$$= \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{\sin(\pi t)} \cdot \frac{\pi t}{\pi t} \quad \to f'(x_0^+) \qquad = \frac{1}{\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}}$$

$\to 1$, weil $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot f'(x_0^+) = \underline{g(0)}$$

$$\lim_{t \to 1^-} \underbrace{g(t)}_{} = \lim_{t \to 1^-} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t-1} \cdot \frac{\pi(t-1)}{\sin(\pi t)} \cdot \frac{1}{\pi} =$$

$$= \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{\sin(\pi t)} \cdot \frac{\pi(t-1)}{\pi(t-1)} \qquad f(x_0+t) = f(x_0+t-1)$$

$$\sin(\underbrace{\pi(t-1)}_{\pi t - \pi}) = \sin(\pi t + \pi) = -\sin(\pi t)$$

$$= -\lim_{t \to 1^-} \underbrace{\frac{f(x_0+t-1) - f(x_0^-)}{t-1}}_{\to f'(x_0^-)} \cdot \underbrace{\frac{\pi(t-1)}{\sin(\pi(t-1))}} \cdot \frac{1}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}} \to 1$$

$$= -\frac{1}{\pi} f'(x_0^-) = \underline{g(1)}$$

7.12.

Daher $\lim_{t \to 0^+} |g(t)|^2 = |g(0)|^2$ und $\lim_{t \to 1^-} |g(t)|^2 = |g(1)|^2$.

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall t \in [0, \delta): \; |g(t)|^2 - |g(0)|^2 \le \big| |g(t)|^2 - |g(0)|^2 \big| < 1$$

$$\Rightarrow |g(t)|^2 < |g(0)|^2 + 1$$

$$\forall t \in (1-\delta, 1]: \; |g(t)|^2 < |g(1)|^2 + 1.$$

Definiere $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ durch:

$$h(t) := \begin{cases} |g(t)|^2, & \text{falls } t \in [\delta, 1-\delta], \\ |g(0)|^2 + 1, & \text{falls } t \in [0, \delta), \\ |g(1)|^2 + 1, & \text{falls } t \in (1-\delta, 1] \end{cases}$$

$|g|^2 \leq h$ und für $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\delta}$, definiere $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch:

$$g_n(t) := \begin{cases} |g(t)|^2, & \text{für } t \in [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}], \\ |g(0)|^2, & \text{für } t \in [0, \frac{1}{n}), \\ |g(1)|^2, & \text{für } t \in (1-\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$g_n \leq h$.

Sei $t \in [\delta, 1-\delta]$: $\sin(\pi t) \geq \sin(\pi\delta)$

$\Rightarrow t \in [\delta, \frac{1}{2}]$:

$$h(t) \leq \frac{1}{\sin^2(\pi\delta)} \cdot |f(x_0+t) - f(x_0^+)|^2,$$

$$t \in (\tfrac{1}{2}, 1-\delta]: \quad h(t) \leq \frac{1}{\sin^2(\pi t)} \cdot |f(x_0+t) - f(x_0^-)|^2$$

$(f \in L^2)$ $\Rightarrow$ $\int_\delta^{1/2} h$ existiert, $\int_{1/2}^{1-\delta} h$ existiert,

$\int_0^\delta \underbrace{h}_{= |g(0)|^2+1}$ existiert und $\int_{1-\delta}^1 \underbrace{h}_{= |g(1)|^2+1}$ existiert

$\Rightarrow \int_0^1 h$ existiert, also h ist Lebesgue-integrierbar.

Da $0 \leq g_n \leq h \Rightarrow g_n$ Lebesgue integrierbar.

Punktweiser Grenzwert von g_n

$t=0$: $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g_n(t)} = |g(0)|^2 \to |g(0)|^2$.

$t=1$: $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{g_n(t)} = |g(1)|^2 \to |g(1)|^2$.

Sei $0 < t < 1$: $\Rightarrow \exists N : \forall n \geq N: \frac{1}{n} < t < 1 - \frac{1}{n}$

$g_n(t) = |g(t)|^2 \to |g(t)|^2$.

Somit $g_n \to |g|^2$ punktweise

$\Rightarrow g_n \to |g|^2$ fast überall.

Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz ist

$\int |g|^2 = \lim_{n\to\infty} \int g_n$ und insbesondere existiert $\int_0^1 |g|^2$

$\Rightarrow g \in L^2$. $\diamond$

2. Schritt:

Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{F}_n f(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-)) \to 0$

$$\mathcal{F}_n f(x_0) \overset{\text{Prop.}}{=} \int_0^1 f(x_0 + t) \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt.$$

Basiselement

$$1 = \mathcal{F}_n 1 \overset{\text{od. mit Formel Prop.}}{=} \int_0^1 \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt \qquad \mathcal{F}_n f(x) = \int_0^1 f(x+t) \cdot \frac{\sin 2\pi(n+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}$$

$$\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-)) \cdot \underbrace{1}_{= \int_0^1 \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt} =$$

$$= f(x_0+) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt}_{\overset{\text{Prop}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt} + f(x_0-) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt}_{\overset{\text{Prop}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0+) \cdot \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x_0-) \cdot \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt$$

$$\underbrace{\mathcal{F}_n f(x_0)}_{= \underbrace{\int_0^1 f(x_0+t) \cdot \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt}_{= \int_0^{\frac{1}{2}} \dots + \int_{\frac{1}{2}}^1 \dots}} - \underbrace{\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))}_{= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0+) \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)} + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x_0-) \frac{\sin(2\pi(n+}{\sin(\pi t}} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{(f(x_0+t) - f(x_0^+)) \cdot \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}}_{= g(t) \cdot \sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \underbrace{(f(x_0+t) - f(x_0^-)) \cdot \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}}_{= g(t) \cdot \sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{g(t)}_{\in L^2 \text{ (1. Schritt)}} \cdot \sin(2\pi \underbrace{(n+\tfrac{1}{2})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty} t)\, dt \longrightarrow \left(\int f \sin(\lambda t) \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0 \right) \; 0$$

Daher $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$.

$\square$

Definition

Eine Funktion $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ heißt <u>stückweise stetig differenzierbar</u> (<u>stückweise C^1</u>), falls es $c_0 = 0 < c_1 < \ldots < c_n = 1$, sodass $f|_{(c_{j-1}, c_j)}$ stetig differenzierbar $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

rechtsseitiger Grenzwert; Ableitung davon

$f(c_j^+)$ und $f'(c_j^+)$ existieren $\forall j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,

linksseitiger G.

$f(c_j^-)$ und $f'(c_j^-)$ existieren $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Korollar

Sei f stückweise C^1.

Dann gilt:

Stetigkeitspunkte

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in (c_{j-1}, c_j) \text{ für } j \in \{1, \ldots, n\} \\ \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)), & \text{für } x \in \{c_0, c_1, \ldots, c_n\} \end{cases}$$

* Mittelwert aus links- u. rechtss. Grenzw.

Insbesondere ist $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f = f$ fast überall.

Beweis:

$x \in (c_{j-1}, c_j) \Rightarrow f$ stetig in $x \Rightarrow f(x^+) = f(x^-) = f(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = f(x)$.

$\square$

SATZ

$$\boxed{\text{Sei } f \in L^2. \text{ Dann gilt } \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f = f \text{ in } L^2 \text{ (insbesondere } \|\mathcal{F} f\|_2 = \|f\|_2).}$$

! Beweis:

1. Schritt: klass. Treppenfunkt.

$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}$, ... A_j ... Intervalle

f ist stückweise $C^1 \Rightarrow \mathcal{F}_n f \to f$ fast überall

Weiters wissen wir, dass $\mathcal{F}_n f$ in L^2 konvergent $\Rightarrow \exists g \in L^2$ mit $\mathcal{F}_n f \to g$ in L^2

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\mathcal{F}_{n_k} f \to g$ fast überall

Andererseits $\mathcal{F}_{n_k} f \to f$ fast überall

$\Rightarrow f = g$ fast überall $\Rightarrow f = g$ in L^2

Somit $\mathcal{F}_n f \to f$ in L^2

2. Schritt: f durch g bzgl. ∞-Norm approx.

$f: [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists g = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}$, A_j Intervalle mit $\|g - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Nach dem 1. Schritt $\exists N \; \forall n \geq N$: $\|\mathcal{F}_n g - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $n \geq N$: $\|\mathcal{F}_n f - f\|_2 \leq \underbrace{\|\mathcal{F}_n f - \mathcal{F}_n g\|_2}_{\leq \|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\mathcal{F}_n g - g\|_2}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|g - f\|_2}_{\leq \|g-f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$

Daher $\mathcal{F}_n f \to f$ in L^2.

3. Schritt:

Sei $f \in L^2$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists g$ stetig mit $\|g - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Nach dem 2. Schritt $\mathcal{F}_n g \to g$ in L^2, also $\exists N \; \forall n \geq N$:

$\|\mathcal{F}_n g - g\|_2 < \varepsilon/3$.

Sei $n \geq N$. $\|\mathcal{F}_n f - f\|_2 \leq \underbrace{\|\mathcal{F}_n f - \mathcal{F}_n g\|_2}_{\leq \|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\mathcal{F}_n g - g\|_2}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|g - f\|_2}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$

Deshalb $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f = f$ in L^2. $\square$

Gleichmäßige Konvergenz

Für „Fourierreihen" ist gleichmäßige Konvergenz $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ konvergiert

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergieren.

Satz

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1, stetig und $f(0) = f(1)$.
Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f = f$ gleichmäßig.

Beweis:

$f, f' \in L^2$. $\mathcal{F}f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}$, $\mathcal{F}(f') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{2\pi i n x}$.

Definiere $J_1 := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : |c_n| < \frac{1}{n^2}\}$

$J_2 := \mathbb{Z} \setminus J_1$

Für $n \in J_2$ gilt: $n^2 |c_n| \geq 1$.

$$\sum_{n \in J_1} |c_n| = |c_0| + \sum_{n \in J_1 \setminus \{0\}} \underbrace{|c_n|}_{< \frac{1}{n^2}} \leq \overbrace{|c_0| + 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{konvergiert, da } 2>1}}^{\text{Majorante}}$$

$\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ neg. u. positiv

Wegen des Majorantentests konvergiert $\sum_{n \in J_1} |c_n|$.

Da $f' \in L_2$ konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2$.

$$\tilde{c}_n = \int_0^1 f'(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{f(x)\cdot e^{-2\pi i n x}\Big|_0^1}_{f(1)\,-\,f(0)\,=\,0} \oplus$$

$$\oplus\ 2\pi i n \underbrace{\int_0^1 f(x)\cdot e^{-2\pi i n x}\, dx}_{=\,c_n} =$$

$$= 2\pi i n \cdot c_n .$$

$$\sum_{n\in J_2} \underbrace{|c_n|}_{\substack{|c_n|\cdot \underbrace{1}_{\le n^2} \\ \le\, n^2 \cdot |c_n|}} \le \sum_{n\in J_2} \underbrace{n^2 \cdot |c_n|^2}_{\substack{|\underbrace{n\cdot c_n}_{=\frac{1}{2\pi i}\cdot \tilde{c}_n}|^2}} \le \frac{1}{4\pi^2}\cdot \sum_{n\in J_2} |\tilde{c}_n|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2 \text{ konvergiert}$$

↑ Majorante

Nach dem Majorantentest konvergiert $\sum_{n\in J_2} |c_n|$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = \sum_{n\in J_1} |c_n| + \sum_{n\in J_2} |c_n| \quad \text{konvergiert}$$

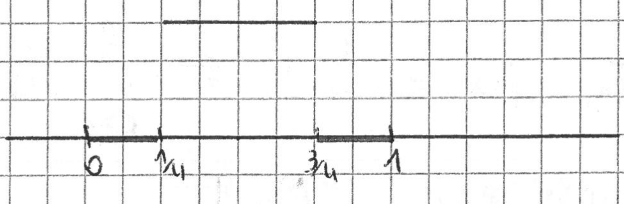
Daher konvergiert $\mathcal{F}_n f$ gleichmäßig (gegen g)

$\Rightarrow g = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n f$ punktweise $\Rightarrow g = f$

Daher $\mathcal{F}_n f \to f$ gleichmäßig. $\square$

Beispiel

$f = 1_{[\frac{1}{4};\, \frac{3}{4}]}$



$\mathcal{F} f$?

$$a_0 = \int_0^1 f = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \cos(2\pi n x)\, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{1/4}^{3/4} 1 \cdot \cos(2\pi n x)\, dx \overset{HS}{=} \frac{1}{\pi n} \cdot \sin(2\pi n x) \Big|_{1/4}^{3/4} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \cdot \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \circleddash$$

$$\circleddash \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi n}, & \text{falls } n \equiv 3(4) \\ -\frac{2}{\pi n}, & \text{falls } n \equiv 1(4). \end{cases}$$

Bsp 36–40

$$b_n = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x)\, dx = 2 \cdot \int_{1/4}^{3/4} \sin(2\pi n x)\, dx =$$

$$= -2 \cdot \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \Big|_{1/4}^{3/4} = -\frac{1}{\pi n} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} \cdot n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} n \text{ ungerade} : & 0 - 0 = 0 \\ n \equiv 0(4) : & 1 - 1 = 0 \\ n \equiv 2(4) : & -1 + 1 = 0 \end{cases} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(2\pi x)}{1} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(6\pi x)}{3} +$$

$$- \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(10\pi x)}{5} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cdot \cos(2\pi(2n-1)x)$$

$$\mathcal{F}_{2n-1} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \cdot \cos(2\pi(2k-1)x)$$

Konvergenz: $f = 1_{[1/4,\, 3/4]}$ stückweise C^1

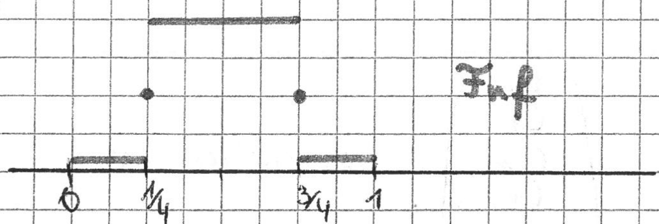
$\mathcal{F}_n \to f$ in L^2 (weil $f \in L^2$)

Punktweiser Grenzwert:

$$\mathcal{F}_n f(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}, \text{ weil } f \text{ stetig in } x \text{ und } f(0) = f(1) \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}, \text{ weil} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_n f(\tfrac{1}{4}) \longrightarrow \frac{f(\frac{1}{4}^+) + f(\frac{1}{4}^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{F}_n f(\tfrac{3}{4}) \longrightarrow \frac{f(\frac{3}{4}^+) + f(\frac{3}{4}^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\max_{x \in [0,1]} \mathcal{F}_n f(x) \not\longrightarrow 1$$

$$x_n = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\mathcal{F}_{2n-1} f(x_n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \cos\Big(\underbrace{2\pi(2k-1)\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{= \frac{\pi}{2}\cdot(2k-1) + \frac{\pi}{2n}(2k-1)}\Big) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(2k-1)\right) \cdot \cos \ldots - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)}_{=(-1)^{k-1}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right)$$

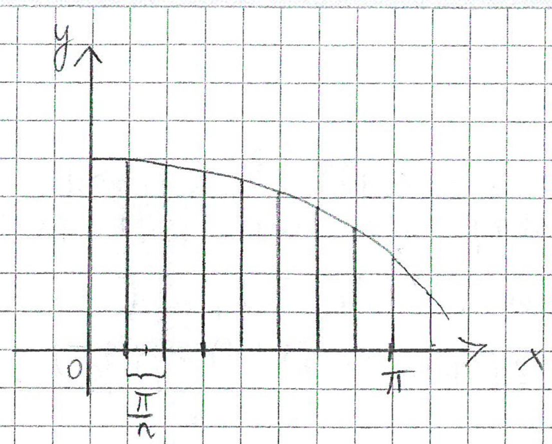
$$-(1)\cdot(-1)^{k-1}$$

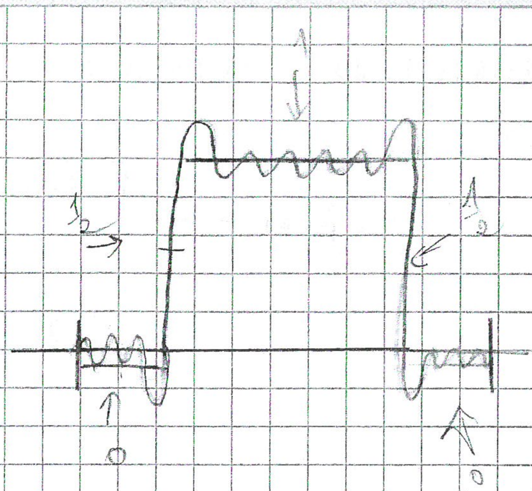
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{2k-1} \cdot (-1)^k \cdot (-1)^k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{n}\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2er gekürzt

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{n}\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{n}}}_{\text{Riemann-Summe für } \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx} \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$$





$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}f : \begin{pmatrix} \vdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_{-1} \\ c_2 \\ c_{-2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$ → abzählbar viele

Fouriertransformation:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi i t x} \, dt , \quad \mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

4. Lagrange-Interpolation

kenne Funktion an endlich vielen Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$, Werte $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Satz

Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ mit $x_j \neq x_k$ für $j \neq k$, und $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom p vom Grad $\leq n$ mit $p(x_j) = y_j$ für $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Weiters gilt: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$

Beweis:

- Eindeutigkeit:

  Seien p, q 2 solche Polynome, $p - q$ Polynom vom Grad $\leq n$.

  $$(p-q)(x_j) = \underbrace{p(x_j)}_{= y_j} - \underbrace{q(x_j)}_{= y_j} = 0$$

  $p - q$ hat $(n+1)$ - Nullstellen $\Rightarrow p - q = 0 \Rightarrow p = q$.

- Existenz (Formel):

  $$p(x_r) = \sum_{k=0}^{n} y_k \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x_r - x_j}{x_k - x_j}}_{= \begin{cases} r \neq k: & 0 \\ r = k: & 1 \end{cases}} = y_r$$

  $\square$

Um Auslöschung zu vermeiden, Stützstellen möglichst äquidistant wählen.

Beispiel:

Polynom p vom Grad ≤ 2 mit $p(\overset{x_0}{-1}) = 10$, $p(\overset{x_1}{2}) = 13$ und $p(\overset{x_2}{3}) = 26$.

$$p(x) = 10 \cdot \frac{x - \overset{x_1}{2}}{\underset{x_0 - x_1}{-1-2}} \cdot \frac{x - \overset{x_2}{3}}{\underset{x_0 - x_2}{-1-3}} + 13 \cdot \frac{x+1}{2+1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 26 \cdot \frac{x+1}{3+1} \cdot \frac{x-2}{3-2} = \underline{\underline{3x^2 - 2x + 5}}$$

5.) Diskrete Fouriertransformation

! Problem:

kennen f nur an endlich vielen Stützstellen $\left(0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\right)$

wollen Fourierreihe „bestimmen".

N, Stützstellen $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$, Werte $y_0, y_1, \dots, y_{N-1} \in \mathbb{C}$.

$N = 2K + 1$

$$\mathcal{F}_N f = \sum_{j=-K}^{K} c_j \cdot e^{2\pi i j x}$$

$$\mathcal{F}_N f\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{j=-K}^{K} c_j \cdot \underbrace{e^{\frac{2\pi i j k}{N}}}_{=\left(e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right)^j} = \sum_{j=-K}^{K} c_j z^j =: \text{Laurentpolynom}$$

auch negative Werte ! Potenzen

Laurentpolynom nicht schön

$$\Rightarrow \quad = \sum_{j=0}^{K} c_j z^j + \underbrace{\sum_{j=-K}^{-1} \dots}_{} \quad \ominus$$

$$= \sum_{j=1}^{K} c_{-j} \cdot \underbrace{\left(e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right)^{-j}}_{} = \sum_{j=1}^{K} c_{-j} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{N}(N-j)}$$

$$= e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i k}}_{= e^{\frac{2\pi i k N}{N}}}$$

$$\ominus \sum_{j=0}^{K} \underbrace{c_j}_{=:\gamma_j} \cdot e^{\frac{2\pi i k j}{N}} + \sum_{j=K+1}^{N-1} \underbrace{c_{j-N}}_{=:\gamma_j} \cdot e^{\frac{2\pi i k j}{N}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j \cdot \underbrace{e^{\frac{2\pi i k j}{N}}}_{=z^j} \quad \ldots \text{ Polynom}$$

Satz

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sei } N \in \mathbb{N},\ y_0, y_1, \ldots, y_{N-1} \in \mathbb{C}. \text{ Dann gibt es ein eindeutig} \\ \text{bestimmtes Polynom } p(z) := \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j z^j \text{ mit} \\ p\left(\frac{k}{N}\right) = y_k \text{ für } k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.\end{array}}$$

Diskrete Fouriertransf. ist Spezialfall von Lagrange Interpolation

Beweis:

Lagrange-Interpolation. $\square$

Orthogonalbasis in $\mathbb{C}^N$: $\{e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}\}$,

$$e_k := \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot 0} = 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot 2} \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot (N-1)} \end{pmatrix}, \qquad |e_k| = \sqrt{N}$$

endl. geom. Reihe

$$\underset{k \neq m}{\langle e_k, e_m \rangle} = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{e^{\frac{2\pi i k j}{N}} \cdot e^{-\frac{2\pi i m j}{N}}}_{=\left(e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)}\right)^j} \overset{\downarrow}{=} \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)}\right)^N}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)}} =$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi i (k-m)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)}} = 0.$$

$$v = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{\langle v, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}}_{= \gamma_k} \cdot e_k$$

In unserem Fall $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix}$

j-te Komponente:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{\langle y, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}}_{} \cdot e^{+\frac{2\pi i}{N} kj}$$

$$=: \gamma_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} y_r \cdot e^{\frac{-2\pi i}{N} kr}$$

konjungierte $\Rightarrow \ominus$

Wir können diskrete Fouriertransformation (dft) als bijektive, lineare Abbildung $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ auffassen.
Sie hat eine Inverse, die inverse diskrete Fouriertransformation (idft)

Satz Beweis

Sei $N \in \mathbb{N}$, $y_0, y_1, \dots, y_{N-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $p(z) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j z^j$ vom Grad $\leq N-1$ mit $p\left(\frac{k}{N}\right) = y_k \; \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Weiters gelten $\forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$:

1.) $\gamma_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \, e^{\frac{-2\pi i}{N} jk}$ $\quad \left(dft \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix} \right)$,

diskrete Fouriertransf.

2.) $y_j = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot jk}$ $\quad \left(idft \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \right)$

inverse diskrete Fouriertransf.

Alex

Diskrete Fouriertransformation – Reelle Version

Für $N \in \mathbb{N}$ definiere ein *trigonometrisches Polynom vom Grad* $\leq \frac{N-1}{2}$ als $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} b_k \sin(2\pi kx)$, falls N ungerade ist, und $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} a_k \cos(2\pi kx) + a_{\frac{N}{2}} \cos(\pi Nx) + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} b_k \sin(2\pi kx)$, falls N gerade ist. Das folgende Resultat ergibt sich als einfache Folgerung der komplexen Version. Man kann es auch unter Verwendung der reellen Orthogonalbasis beweisen.

Proposition 1. *Es sei $N \in \mathbb{N}$, und es seien $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq \frac{N-1}{2}$ mit $p\left(\frac{k}{N}\right) = y_k$ für $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Weiters gilt für ungerade N, dass*

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} b_k \sin(2\pi kx) \ ,$$

und für gerade N, dass

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} a_k \cos(2\pi kx) + a_{\frac{N}{2}} \cos(\pi Nx) + \sum_{k=1}^{[\frac{N-1}{2}]} b_k \sin(2\pi kx) \ ,$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \ ,$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\left(\tfrac{2\pi}{N} kj\right) \ , \quad \text{für } k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\tfrac{N-1}{2}\right]\right\},$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\left(\tfrac{2\pi}{N} kj\right) \ , \quad \text{für } k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\tfrac{N-1}{2}\right]\right\}, \text{ und}$$

$$a_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos(\pi j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j y_j \ , \quad \text{falls } N \text{ gerade ist.}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_{N-1} \\ \gamma_2 \\ \gamma_{N-2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

manchmal besser umgeordnet

Für γ_j: $4N+2$ Multiplikationen

insgesamt: $(4N+2)N = 4N^2 + 2N \approx N^2$ Multiplikationen !

6.) Schnelle Fouriertransformation

schnelle Fouriertransformation: **fft**

! Ob es geht, hängt von N ab; geht nicht, wenn N Primzahl

! $N = n_1 \cdot n_2$ geht; besonders gut, wenn $N = 2^c$!

z.B.:

$N = 2M$

$$\gamma_{2k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{2M-1} y_j \cdot e^{\frac{-2\pi i}{2M} \cdot j(2k)} = \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{0}^{M-1} \dots + \underbrace{\sum_{M}^{2M-1} \dots}_{} \right) \circeq$$

$$\begin{array}{c}\text{Index-}\\\text{verschiebung}\end{array} = \sum_{j=0}^{M-1} y_{j+M} \cdot \underbrace{e^{\frac{-2\pi i}{M}(j+M) \cdot k}}_{}$$

$$= e^{\frac{-2\pi i}{M} \cdot j \cdot k} \cdot \underbrace{e^{-2\pi i k}}_{=1} =$$

$$= e^{-\frac{2\pi i}{M} \cdot j \cdot k}$$

$$\circeq \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} (y_j + y_{j+M}) \cdot e^{\frac{-2\pi i}{M} \cdot j \cdot k}$$

$M = \frac{N}{2}$ Multiplikationen !

$$\gamma_{2k+1} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2M-1} y_j \cdot e^{-\frac{2\pi i}{2M} \cdot j \cdot (2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \Big(\sum_{0}^{M-1} y_j \cdot e^{-\frac{2\pi i}{2M} \cdot j} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{M} \cdot j \cdot k} + \underbrace{\sum_{M}^{2M-1} \ldots}_{} \Big) =$$

$$\overset{\text{Indexverschiebung}}{=} \sum_{j=0}^{M-1} y_{j+M} \cdot \underbrace{e^{-\frac{2\pi i}{2M}(j+M)}}_{} \cdot \underbrace{e^{-\frac{2\pi i}{M}(j+M) \cdot k}}_{}$$

$$= e^{-\frac{2\pi i}{2M} j} \cdot \underbrace{e^{-\pi i}}_{=-1} \qquad = e^{-\frac{2\pi i}{M} \cdot j \cdot k} \cdot \underbrace{e^{-2\pi \ldots}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} (y_j - y_{j+M}) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{M} \cdot j \cdot k - \frac{\pi i}{M} \cdot j}$$

N Multiplikationen

insgesamt $N \underbrace{M}_{\frac{N}{2}} = \underline{\frac{1}{2} \cdot N^2}$ „Schmäh" kann man α-Mal durchführen

Für $\underline{N = 2^\alpha}$: $\overset{\alpha=1}{\frac{1}{2} \cdot N^2}$, $\overset{\alpha=2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot N^2}, \ldots$,

insgesamt $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \cdot \underbrace{N^2}_{} = \underline{N \text{ Multiplikationen}}$

$$\underbrace{\cancel{\frac{1^\alpha}{2^\alpha}} \cdot (2^\alpha)^2 = (2^\alpha)^2}_{}$$

$$= 2^\alpha = N$$

→ nur mehr N Multiplikationen

WAS TUN, WENN $N \neq 2^?$

z.B: $N = 6$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_6 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, besser 0er eher in der Mitte

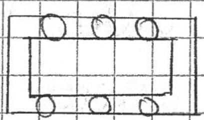
2^3 Einhänge

schön verteilt, z.B. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ 0 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$

7.) Das jpeg-Verfahren

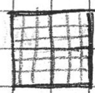
Digitalfoto: klassisch: Film belichtet (chemischer Prozess)

SW, Farbfoto



Filmspur

digital in Bildpunkte zerlegt (Pixel)



Wir wollen Speicherplatz sparen.

Beim jpeg-Verfahren lassen sich die ursprünglichen Daten nicht mehr herstellen (Verlustverfahren – für das menschliche Auge nicht erkennbar)

pro Bildpunkt 3 Werte rgb (rot, grün, blau)

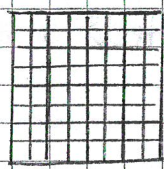
pro Farbe $2^8 = 256$ Werte

insgesamt: 2^{24} $(= 256^3) = 16\,777\,216$ Farben, die man darstellen kann rgb wird umgewandelt in:

1.) Helligkeit
2.) Farbton
3.) Sättigung

Vorteil: das menschl. Auge kann die Helligkeit viel besser unterscheiden

<u>Bild wird in 8×8-Blöcke unterteilt.</u>



<u>8x8 Matrix</u>, Vektor mit <u>64 Komponenten</u>
↳ 2er-Potenz ⇒ schnelle Fouriertransformation!!

Auf diesen Vektor dft (in Form der fft) anwenden
(gerundet auf ganze Zahlen → <u>1. Verlust</u>)

Hoffnung: Eintragungen weiter unten klein und können weggelassen werden, ohne dass sich viel ändert

<u>1. Idee:</u> alle Werte ab 8. Stelle weglassen

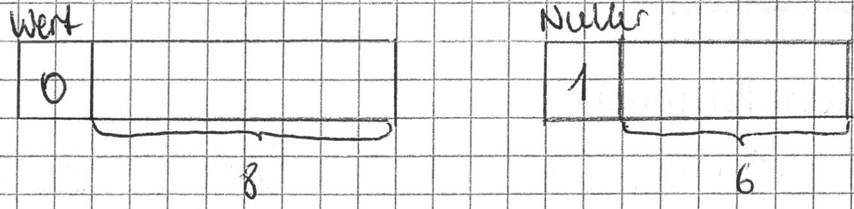
gute Idee? NEIN, kommt drauf an, wo der 8-er Block liegt
- wenn großer Kontrast an der Stelle, dann sind 8 Stellen zu wenig
- wenn wenig Kontrast im Bild, dann genügen vielleicht weniger

<u>brauchen flexibles Verfahren</u>
Overhead: Bild mit Katze

besser: Es wird Wert r vorgegeben.

alle γ_j mit $|\gamma_j| \leq r$ werden 0 gesetzt.

Wenn wir auf Wert stoßen, geben wir den Wert an,
wenn auf 0: Anzahl der 0-er die folgen:



dann zum Anschauen: inverse Fouriertransformation

$r = 1$:	Wert ↓ w 74	w 7	w 14	w −8	w −4	n 2	. . .				
$r = 4$:	w 74	w 7	w 14	w −8	w −4	n 2	w 5	w 7	n 4		

$r = 1$: 88%

$r = 5$: 16%

! In Wirklichkeit:

- 2-dimensionale Fouriertransformation
- Man nimmt nicht die Fouriertransformation, sondern die Cosinustransformation (reelle Zahlen)

IV. BERECHNEN VON FUNKTIONSWERTEN

1.) HORNER SCHEMA

Funktionswerte von Polynome:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

naiv: für x^n ... $n-1$ Multipl. mit a_n: n Multipl.

insgesamt: $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \approx n^2$ Multipl.

! **Proposition**

> Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom, x_0 eine Zahl.
> Definiere $b_{n-1} := a_n$ und für $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ setze $b_k := b_{k+1} x_0 + a_{k+1}$, und $b := b_0 x_0 + a_0$.
> Dann gilt:
> $$p(x) = (x - x_0) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + b.$$
> Insbesondere gilt $p(x_0) = b$.

	a_n	a_{n-1}	....	a_1	a_0
x_0	$\downarrow$ b_{n-1}	b_{n-2}	....	b_0	b

n Multiplikationen!

Beweis:

Klammer ausmultiplizieren

$$(x - x_0) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + b = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b_k x_0 x^k} + b =$$

Index verschieben

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} x^k = b_{n-1} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \dots = \sum_{k=1}^{n-1} \dots + b_0 x_0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{b_{n-1}}_{=a_n} x^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (\underbrace{b_{k-1}}_{=b_k x_0 + a_k} - b_k x_0) x^k}_{=a_k} \underbrace{- b_0 x_0 + \underbrace{b}_{=b_0 x_0 + a_0}}_{=a_0} =$$

$$= a_n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = p(x)$$

$$p(x_0) = \underbrace{\underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k x_0^k}_{=0} + b = b.$$

$\square$

Beispiel:

$p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 5 \quad , \quad x_0 = 3 \quad (p(3))$

	2	6	-4	5
3	2	12	32	101

$\underline{p(3) = 101}$

$$p(x) = (x-3) \cdot (2x^2 + 12x + 32) + \overbrace{101}^{= a \text{ (Rest)}}$$

Beispiel:

$p(x) = x^2 - 1 \quad , \quad x_0 = 3$

	1	0	-1
3	1	3	8

$\underline{p(3) = 8}$, $p(x) = (x-3)(x+3) + 8$

Nullstellen:

Falls $p(x) = \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{Z}}^{\neq 0} x^n + \ldots + \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Z}}$

p Nullstelle $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q}$ $(ggT(t,s) = 1)$ $t \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow t \mid a_0$ und $s \mid a_n$

$(\underbrace{a}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{b}_{\in \mathbb{Z}} i : \quad a^2 + b^2 \mid a_0)$

Nullstellen von $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 5$

Teiler von a_0: $1, -1, 5, -5$

	2	6	−4	5	
1	2	8	4	9	1 ist keine Nullstelle
−1	2	4	−8	13	
5	2	16	76	385	
−5	2	−4	16	−75	

Beispiel:

Nullstellen von $x^3 - 2x^2 - x + 2$ $(1, -1, 2, -2)$

	1	−2	−1	2	
1	1	−1	−2	0	1 ist eine Nullstelle

$x^2 - x - 2 = 0$

$_2x_3 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \quad \Big| \pm \frac{3}{2}$

$x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = -1$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $1, -1, 2$

Beispiel

Nullstellen von $6x^3 - 79x^2 + 340x - 475$

	6	−79	340	−475
1	6	−73	267	−208
−1	6	−85	425	−900
5	6	−49	95	0

$$6x^2 - 49x + 95 = 0$$

$$_2x_3 = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 6 \cdot 95}}{12} = \frac{49 \pm 11}{12}$$

$$x_2 = 5$$

$$x_3 = \frac{38}{12} = \frac{19}{6} = 3{,}1\dot{6}$$

Nullstellen: $5 \; (2\times)$, $\frac{19}{6}$

Erweitertes HORNER-Schema

Ableitung an der Stelle x_0 berechnen

$$p(x) = \underset{\overset{\parallel}{b_n^{(0)}}}{a_n} x^n + \ldots + \underset{\overset{\parallel}{b_1^{(0)}}}{a_1} x + \underset{\overset{\parallel}{b_0^{(0)}}}{a_0}$$

	$b_n^{(0)}$	$b_{n-1}^{(0)}$	$\ldots$	$b_1^{(0)}$	$b_0^{(0)}$	
x_0	$b_{n-1}^{(1)}$	$b_{n-2}^{(1)}$	$\ldots b_1^{(1)}$	$b_0^{(1)}$	$b^{(1)}$	$0! = 1$
	$b_{n-2}^{(2)}$	$b_{n-3}^{(2)}$	$b_0^{(2)}$	$b^{(2)}$		$1! = 1$
	$\vdots$	$\vdots$				$2! = 2$
	$b_0^{(n)}$	$b^{(n)}$				$3! = 6$
	$b^{(n+1)}$					$4! = 24$
						$\vdots$

Es gilt: $\boxed{p^{(r)}(x_0) = r! \cdot b^{(r+1)}}$

insgesamt: $\underbrace{n + (n-1) + \ldots + 1}_{= \frac{n(n+1)}{2} \sim n^2 \text{ Multiplikationen}} + 2(n-1) \approx n^2$ Multiplikationen

! PRÜFUNG:

Warum ist HORNER-Schema gut?

→ habe die Ableitungen fast genauso schnell berechnet wie auf naive Weise die Funktionswerte.

! Lemma

$r \in \mathbb{N}_0$, $p(x) = (x-x_0)^r \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{Polynom}}$

Dann gilt für $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$, dass es ein Polynom q_j gibt, sodass

$$p^{(j)}(x) = \frac{r!}{(r-j)!} \cdot (x-x_0)^{r-j} g(x) + (x-x_0)^{r-j+1} \cdot q_j(x)$$

Beweis:

Induktion:

$j=0$: $q_0(0) = 0$

$$\underbrace{\frac{r!}{(r-0)!}}_{=1} \cdot (x-x_0)^{r-0} \cdot g(x) + (x-x_0)^{r-0+1} \underbrace{q_0(x)}_{=0} =$$

$$= (x-x_0)^r \cdot g(x) = p(x) = p^{0}(x)$$

Sei $j \in \{1, 2, \dots, r\}$:

$$p^{(j-1)}(x) = \frac{r!}{(r-j+1)!} \cdot (x-x_0)^{r-j+1} \cdot g(x) + (x-x_0)^{r-j+2} \cdot q_{j-1}(x)$$

$$p^{(j)}(x) = \left(p^{(j-1)}(x)\right)' =$$

$$= \underbrace{\frac{r!}{(r-j+1)!} \cdot (r-j+1)}(x-x_0)^{r-j} g(x) + \frac{r!}{(r-j+1)!} \cdot (x-x_0)^{r-j+1} \cdot g'(x) \oplus$$

$$= \frac{r!}{(r-j)! \cdot \cancel{(r-j+1)}} \cdot \cancel{(r-j+1)}$$

$$\oplus \; (r-j+2)(x-x_0)^{r-j+1} \cdot q_{j-1} + (x-x_0)^{r-j+2} \cdot q'_{j-1} =$$

$$= \frac{r!}{(r-j)!} \cdot (x-x_0)^{r-j} \cdot g(x) + (x-x_0)^{r-j+1} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(\frac{r!}{(r-j+1)!} \cdot g'(x) + (r-j+2) \cdot q_{j-1}(x) + (x-x_0) \cdot q'_{j-1}(x)\right)}_{=: \, q_j(x) \text{ ist Polynom}}$$

$\square$

Proposition

$$\boxed{\text{Für } r \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ gilt } p^{(r)}(x_0) = r! \cdot b^{(r+1)}.}$$

Beweis:

Behauptung: Für $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt

$$p(x) = (x-x_0)^r \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + \sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j$$

Beweis der Beh.:

Induktion:

$$r = 0: \quad \underbrace{(x-x_0)^0}_{=1} \cdot \sum_{j=0}^{n} \underbrace{b_j^{(0)}}_{=a_j} \cdot x^j + 0 = p(x)$$

Sei $r \in \{0,1,\dots,n\}$.

$$p(x) = (x-x_0)^{r-1} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-r+1} b_j^{(r-1)} x^j}_{} + \sum_{j=0}^{r-2} b^{(j+1)} (x-x_0)^j \overset{\text{IV}}{=}$$

$$\underset{\text{HORNER}}{=} (x-x_0) \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + b^{(r)}$$

$$\overset{\text{IV}}{=} (x-x_0)^r \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + b^{(r)} (x-x_0)^{r-1} + \sum_{j=0}^{r-2} b^{(j+1)} (x-x_0)^j =$$

$$= (x-x_0)^r \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + \sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j .$$

$\diamond$

Sei $r \in \{0,1,\dots,n\}$.

$$p(x) \underset{\text{Beh.}}{=} (x-x_0)^r \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_r^{(r)} x^j + \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} b^{(j+1)} (x-x_0)^j}_{\text{Polynom vom Grad } \le r-1}$$

Nach obigem Lemma $\exists$ Polynom q_r mit:

$$p^{(r)}(x) = \underbrace{\frac{r!}{(r-r)!}}_{=r!} \cdot \underbrace{(x-x_0)^{r-r}}_{=1} \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + (x-x_0)^1 q_r(x) + \overset{\substack{\text{Polynom }(r-1)\text{. Grad} \\ r \text{ mal abgeleitet} \\ \downarrow}}{0} =$$

$$= r! \cdot \sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x^j + (x-x_0)\, q_r(x)$$

$$\Rightarrow p^{(r)}(x_0) = r! \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-r} b_j^{(r)} x_0^j}_{\underset{\text{HORNER}}{=} b^{(r+1)}} + \underbrace{0 \cdot q_r(x_0)}_{=0} = r! \, b^{(r+1)}$$

$\square$

Beispiel: $p(x) = 7x^5 - 20x^4 - 93x^3 + 62x^2 + 164x - 120$

ges.: alle Ableitungen an der Stelle 3:

	7	-20	-93	62	164	-120	r!	
3	7	1	-90	-208	-460	-1500	1	= 0!
diese Zeile nun zum Rechnen verwenden	7	22	-24	-280	-1300		1	= 1!
	7	43	105	35			2	= 2!
	7	64	297				6	= 3!
	7	85					24	= 4!
	7						120	= 5!

$p(3) = -1500 \cdot 1$

$p'(3) = -1300 \cdot 1$

$p''(3) = 35 \cdot 2 = 70$

$p'''(3) = 297 \cdot 6 = 1782$

$p^{iv}(3) = 85 \cdot 24 = 2040$

$p^{(5)}(3) = 7 \cdot 120 = 840$

$p^{(n)}(3) = 0 \quad \forall n \geq 6$

2.) Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (R = \infty)$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad |s_n - e^x|$$

Abschätzung

Wähle c so, dass $c \geq |x|$ (c natürliche Zahl)

$$n \geq c: \quad |\underbrace{s_n}_{= \sum_0^n \dots} - \underbrace{e^x}_{= \sum_0^\infty \dots}| \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \underbrace{\frac{|x|^k}{k!}}_{\leq \frac{c^k}{k!}} \leq$$

$$\leq \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{c}{n+2} + \underbrace{\frac{c^2}{(n+2)(n+3)}}_{\leq \left(\frac{c}{n+2}\right)^2} + \underbrace{\frac{c^3}{(n+2)(n+3)(n+4)}}_{\leq \left(\frac{c}{n+2}\right)^3} + \dots\right)$$

$$\underset{\text{geom. R.}}{\leq} \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{n+2}}$$

(Fehlerabschätzung ohne Satz von Taylor).

Für die Praxis sollte man auch Rundungsfehler berücksichtigen.

Potenzreihe sollen wir kennen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \qquad (R = \infty)$$

$\sum_{k=0}^{n} \dots$ Multiplikationen: $\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$: $1 + 2k + 2k$

- oben $2k$ Multipl. + 1 Division

innerhalb d. Summe

\ unten $2k$ Mult.

insgesamt: $(n+1) + 4 \cdot \underbrace{\sum_1^n k}_{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} = (n+1)(2n+1) \approx 2n^2$

→ mit Summe

↑ Index fängt bei 0 an

Besser: $v = x \cdot x$ (zusätzlicher Speicherplatz)

$u_0 := x$, $t_0 := 1$ und $w_0 := x$

Für $n \geq 1$:

u, t, w wird abgespeichert
t zählt mit, wie weit wir sind

$u_n = \frac{-v}{(t_{n-1}+1)\cdot(t_{n-1}+2)} \cdot u_{n-1}$, $t_n := t_{n-1} + 2$, $w_n := w_{n-1} + u_n$

Multiplikationen: $1 + 3n$ ← 3 Mult $(-1\,v, -v\,u_{n-1}, (t_{n-1}+1)(t_{n-1}+2))$

1 Division

Geht so für sin, cos, e^x

(würde auch für sinh und cosh so gehen, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)

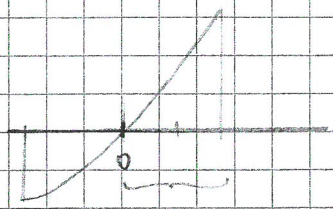
Potenzreihen werden auch zur Berechnung von π verwendet (arctan)

3.) Das Newtonverfahren

z.B.: $\sqrt[2]{x}$ oder konkreten $\sqrt{2}$

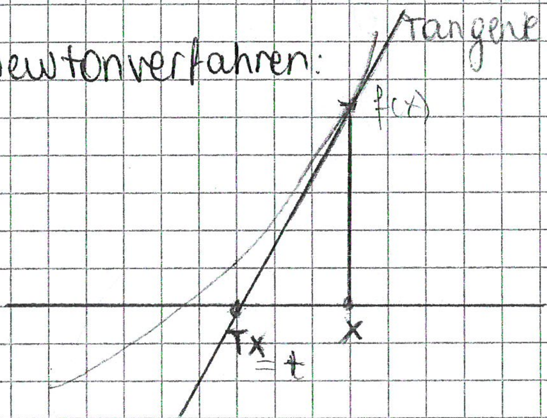
$x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$

Nullstellen von Funktionen: Bolzano - Weierstraß



Funktioniert immer, aber relativ langsam

Newtonverfahren:



Tangente in x: $y(t) = f'(x) \cdot (t-x) + f(x)$

$0 = f'(x) \cdot (t-x) + f(x) \Rightarrow t = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$T_x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$\Rightarrow 0 = f'(x) \cdot t - f'(x)\, x + f(x)$

$-f(x) + f'(x) \cdot x = f'(x) \cdot t \quad | : f'(x)$

$\circ) \quad T_x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$t = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Startwert: x_1: $x_2 = Tx_1$, $x_3 = Tx_2$, ...

$x_n = T^{n-1} x$

$(T^0 x := x, \quad T^n x := T(T^{n-1} x) = (\underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n\times})(x))$

c) Startwert : x_1

Für $n > 1$: $x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

Beispiel:

$\sqrt{2}$: $f(x) = x^2 - 2$

$$Tx = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$T1 = \frac{3}{2} \quad , \quad T2 = \frac{3}{2}$$

Startwert $\frac{3}{2}$

Anzahl d. Schritte	tatsächlicher Fehler ≤	Fehlerabschätzung ($\delta = \frac{1}{2}$)
5	$9 \cdot 10^{-25}$	$5{,}5 \cdot 10^{-18}$
8	$3 \cdot 10^{-196}$	$7{,}4 \cdot 10^{-139}$
11	$4{,}1 \cdot 10^{-1568}$	$8{,}3 \cdot 10^{-1106}$
21	$7{,}4 \cdot 10^{-1651000}$	$3 \cdot 10^{-1131624}$

$$T_x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{stetig, falls } f \; C^1 \text{ und } f'(x) \neq 0 \; \forall x$$

Ang. $x_n = T^{n-1} x \to x_0$

$$\underbrace{T x_0}_{\lim T^{n-1} x} = \lim T^n x = x_0 \quad ,$$

Also $\cancel{x_0} = T x_0 = \cancel{x_0} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0$

wenn das nicht vorausgesetzt, bleibt wohl Newton-V. trotzdem!

Proposition

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$, $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 $\left(U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b) \right)$, sodass $\forall x \in U : \lim_{n\to\infty} \underbrace{T^{n-1} x}_{x_n} = x_0$, wobei $Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Beweis:

$$Tx_0 = x_0 - \frac{\overbrace{f(x_0)}^{=0}}{f'(x_0)} = x_0 \quad \text{Fixpunkt}$$

$$T'x = 1 - \underbrace{\frac{f'(x)^2 - f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}}_{} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2} \quad \text{stetig überall dort, wo } f'(x) \neq 0$$

$$= 1 - \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$T'x_0 = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{=0} \cdot f''(x_0)}{f'(x_0)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \exists\, U \text{ von } x_0 \text{ mit } |T'x| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in U$$

Sei $x \in U$. $|Tx - \underbrace{x_0}_{=Tx_0}| = |\underbrace{Tx - Tx_0}_{=T'(\xi)(x-x_0)}| = \underbrace{|T'(\xi)|}_{\leq \frac{1}{2}} |x - x_0| \leq$

$$\leq \frac{1}{2} |x - x_0|$$

$$|T^{n-1}x - x_0| \leq \frac{1}{2} |T^{n-2} x - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |T^{n-3} x - x_0| \leq \ldots$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x - x_0|$$

Banach'sche Fixpunktsatz steckt dahinter $\square$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q\, |x_n - x_{n-1}| \quad (q < 1)$$

$$\Rightarrow |x_n - x_0| \leq C q^n |x - x_0|$$

Banachische Fixpunktsatz

Satz

je Cauchy-Folge konv

> Sei (M,d) ein vollständiger, metrischer Raum,
> $T: M \to M$ sei eine Kontraktion (d.h. $\exists\, q<1$ mit
> $d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in M$).
> Dann besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x_0
> ($Tx_0 = x_0$). Weiters gilt $\forall x \in M$: $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$
> $\left(d(T^n x, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x, x_0)\right)$.

Beweis:

1. Schritt:

Beh.: Falls Fixpunkt $\exists$, dann ist er eindeutig.

Beweis d. Beh.: $x_0, \tilde{x}_0$ Fixpunkte

$$\underset{\substack{\| \\ Tx_0}}{d(x_0}, \underset{\substack{\| \\ T\tilde{x}_0}}{\tilde{x}_0)} \leq q \cdot d(x_0, \tilde{x}_0) \Rightarrow d(x_0, \tilde{x}_0) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$$

$\diamond$

2. Schritt:

Beh.: $\forall x \in M$ ist $(T^n x)$ konv.

Beweis d. Beh.: $n < m$: $d(T^n x, T^m x) \leq$

$$\leq d(T^n x, T^{n+1} x) + \underbrace{d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q \cdot d(T^n x, T^{n+1} x)} + \dots + \underbrace{d(T^{m-1} x, T^m x)}_{\leq q^{\cdots} d(T^n x, T}$$ $\leq$

$$\underbrace{\leq q\, d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q^2 d(T^n x, T^{n+1} x)}$$

$$\leq \underbrace{d(T^n x, T^{n+1} x)}_{\substack{\leq q\, d(T^{n-1} x, T^n x) \\ \vdots \\ \leq q^n d(x, Tx)}} \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^{\cdots})}_{\leq \frac{1}{1-q}} \leq$$

⑤ $\frac{q^n}{1-q}\, d(x, Tx) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow (T^n x)$ CF $\overset{M \text{ vollst.}}{\Longrightarrow}$ $(T^n x)$ konv

◇

3. Schritt:

Behauptung: $x_0 := \lim T^n x$. Dann $Tx_0 = x_0$.

Beweis: $d(Tx_0, x_0) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{d(Tx_0, T^n x)}_{\leq q \cdot \underbrace{d(x_0, T^{n-1}x)}_{\to 0}} + \underbrace{d(T^n x, x_0)}_{\to 0} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow Tx_0 = x_0$.

◇

4. Schritt:

Überlegen, dass man damit fertig ist.

□

! Satz

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar, $x_1 \in (a,b)$ Startwert.

Es gebe ein $\delta > 0$ mit $[x_1 - \delta, x_1 + \delta] \subseteq (a,b)$.

Weiters gäbe es $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ mit

1.) $|f'(x)| \geq \beta$ (min von f') $\forall x \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$

2.) $|f''(x)| \leq \gamma$ (max von f'') $\forall x \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$

3.) $q := \frac{\gamma}{\beta} \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| < 1$, ($f'(x_1) \neq 0$ wegen 1))

4.) $\left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \cdot \frac{1}{1-q} \leq \delta$.

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ Nullstelle

mit $f(x_0) = 0$. Weiters gilt für die durch $(x_1 = x_1)$ mit Startwert x_1

$x_n = Tx_{n-1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ $\left(Tx := x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)$

definierte Folge, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und

$$\underbrace{|x_n - x_0|}_{\substack{\text{Fehler} \\ = T^{n-1}x_1}} \le \underbrace{\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}}}_{\text{Abschätzung d. Fehlers nach n Schritten}}$$

$$a^{b^c} := a^{(b^c)} \text{ i.A. } \neq (a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

$\Rightarrow$ Assoziativität gilt nicht bei Potenzen

Beweis:

1. Schritt:

Behauptung: 1.) f hat auf $[x_1-\delta, x_1+\delta]$ höchstens eine Nullstelle

2.) $x_n - x_{n-1} = -\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

3.) Falls $x_n, x_{n-1} \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$, dann ist $|x_{n+1}-x_n| \le \frac{\gamma}{\beta}|x_n - x_{n-1}|^2$

Beweis d. Beh.:

1.) $|f'| \ge \beta > 0 \quad \forall x \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$

$\Rightarrow f$ streng monoton auf $[x_1-\delta, x_1+\delta] \Rightarrow f$ injektiv auf $[x_1-\delta, x_1+\delta] \Rightarrow \exists$ höchstens eine Nullstelle

2.) $x_n - x_{n-1} = -\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad | + x_{n-1}$

$$\overset{\shortparallel}{T}x_{n-1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

3.) $x_n - x_{n-1} \overset{2.)}{=} -\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \Rightarrow f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = -f(x_{n-1})$

$\Rightarrow f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$

$$\underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{\underset{2.)}{=} -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} = \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|} \leq \frac{1}{\beta} \cdot \underbrace{|f(x_n)|}_{=|f(x_n) - \underbrace{0}_{= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}|} \ominus$$

$$\ominus \frac{1}{\beta} \cdot |\underbrace{f(x_n) - f(x_{n-1})}_{\underset{MWS}{=} f'(\xi_1)(x_n - x_{n-1})} - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})| =$$

$$= \frac{1}{\beta} |x_n - x_{n-1}| \cdot |\underbrace{f'(\xi_1) - f'(x_{n-1})}_{\underset{MWS}{=} f''(\xi_2)(\xi_1 - x_{n-1})}| \leq \frac{\gamma}{\beta} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

$$\underbrace{f''(\xi_2)(\xi_1 - x_{n-1})}_{\leq \underbrace{|f''(\xi_2)|}_{\leq \gamma} \underbrace{|\xi_1 - x_{n-1}|}_{\leq |x_n - x_{n-1}|}}$$

$\diamond$

<u>2. Schritt:</u>

<u>Behauptung:</u> $\forall n$ ist $x_n, x_{n+1} \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$

und $|x_{n+1} - x_n| \leq q^{2^{n-1}-1} \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|$

<u>Beweis d. Beh.:</u>

Induktionsanfang: $n = 1$

$x_1 \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$.

$$\left[\, |x_2 - x_1| \underset{1.\text{Schritt }(2)}{=} \left|-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| = \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{1}{1-q} \leq \delta \,\right]$$

nicht relevant

$$|x_2 - x_1| = \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \underbrace{1}_{= q^{2^{n-1}-1}} \leq q^{2^{n-1}-1} \cdot \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|.$$

$\leq$?

Sei $n > 1$: $\quad x_n, x_{n-1} \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$

$$|x_n - x_{n-1}| \le q^{2^{n-2}-1} \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right|$$

$$|x_{n+1} - x_n| \underset{\substack{\text{1. Schritt} \\ 3.)}}{\le} \frac{\gamma}{\beta} |x_n - x_{n-1}|^2 \le \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right|^2 \cdot q^{2^{n-1}-2} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{\gamma}{\beta} \cdot \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right|}_{=q} q^{2^{n-1}-2}}_{} \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| = q^{2^{n-1}-1} \cdot \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right|$$

$$= q^{2n-1-1}$$

$$|x_{n+1} - x_1| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{\le \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \cdot q^{2^{n-1}-1}} + \overbrace{|x_{n-1} - x_{n-2}|}^{\le \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \cdot q^{2^{n-2}-1}} + \ldots + \underbrace{|x_2 - x_1|}_{\le \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right|} \le$$

lückenhafte geom. Reihe

$$\le \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \cdot \underbrace{\left(q^{2^{n-1}-1} + q^{2^{n-2}-1} + \ldots + 1 \right)}_{\le 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}} \le$$

geom. Reihe

$$\le \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \cdot \frac{1}{1-q} \le \delta. \qquad \Diamond$$

Beweis wird am Montag fortgesetzt

! Beispiel:

$\sqrt[4]{3}$, $f(x) = x^4 - 3$

$$T_x = x - \frac{x^4-3}{4x^3} = \frac{3x}{4} + \frac{3}{4x^3}$$

$x_1 := \frac{5}{4}$, $\delta := \frac{1}{4}$

$[1, \frac{3}{2}]$ $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$

auf diesem Intervall arbeiten wir
$[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$

$\beta = 4$, $\gamma = 27$, $\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| = \frac{143}{2000}$

$$q = \frac{\gamma}{\beta} |\cdot| = \frac{27}{4} \cdot \frac{143}{2000} = \frac{3861}{8000} < 1$$

$$\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{572}{4139} \leq \frac{1}{4} = \delta$$

$$|x_n - \sqrt[4]{3}| \leq \frac{143}{2000} \cdot \frac{\left(\frac{3861}{8000}\right)^{2^{n-1}-1}}{1 - \left(\frac{3861}{8000}\right)^{2^{n-1}}}$$

Schritte	Fehler $\leq$
6	$1{,}12 \cdot 10^{-11}$
10	$1{,}51 \cdot 10^{-163}$
13	$1{,}73 \cdot 10^{-1297}$
23	$3{,}56 \cdot 10^{-1327038}$

[auf 10 Stellen genau]

Format-X ® by Format Werk

3. Schritt:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot q^{2^{n-1}-1}$$

↳ bereits in 2. Schritt gezeigt

Sei $n < m$: $|x_n - x_m| \leq \underbrace{|x_n - x_{n+1}|}_{\underset{(2. Schritt)}{\leq} \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot q^{2^{n-1}-1}} + \underbrace{|x_{n+1} - x_{n+2}|}_{\leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot q^{2^{n}-1}} + \ldots + \underbrace{|x_{m-1} - x_m|}_{\leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| q^{2^{m-2}-1}} \leq$

$$\leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \underbrace{\left(q^{2^{n-1}-1} + q^{2^n-1} + \ldots + q^{2^{m-2}-1}\right)}$$

$$= q^{-1}\left(q^{2^{n-1}} + q^{2 \cdot 2^{n-1}} + \ldots + q^{2^{n-1} \cdot 2^{m-1}}\right) =$$

$$= q^{2^{n-1}-1}\left(1 + q^{2^{n-1}} + q^{3 \cdot 2^{n-1}} + \ldots + q^{(2^{m-1}-1) \cdot 2^{n-1}}\right)$$

$$\leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot q^{2^{n-1}-1} \underbrace{\left(1 + q^{2^{n-1}} + \left(q^{2^{n-1}}\right)^2 + \ldots\right)}_{\underset{(geom.\ Reihe)}{=} \frac{1}{1-q^{2^{n-1}}}} =$$

$$= \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot q^{2^{n-1}-1} \cdot \frac{1}{1-q^{2^{n-1}}}$$

Sei $\varepsilon > 0$: $\dfrac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} \longrightarrow 0 \Rightarrow \exists N \ \forall n \geq N$

$$\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} < \varepsilon$$

Seien $n, m \geq N$. O.B.d.A: $n < m$

$$|x_n - x_m| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)$ ist Cauchyfolge $\Rightarrow \exists x_0 \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

↳ x_n konv.

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} x_n \overset{T \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{Tx_n}_{x_{n+1}} = x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = Tx_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow f(x_0) = 0$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall m \geq N$: $|x_m - x_0| < \varepsilon$

$$|x_n - x_0| \leq \underbrace{|x_n - x_m|} + \overbrace{|x_m - x_0|}^{<\varepsilon} \; <$$

$m > \max\{n, N\}$

$$\leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}}$$

$$< \varepsilon + \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_0| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \cdot \frac{q^{2^{n-1}-1}}{1-q^{2^{n-1}}} \qquad \square$$

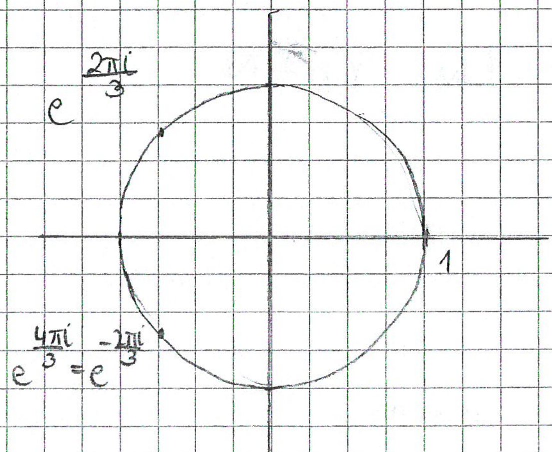
↳ Newtonverfahren konv. relativ rasch

$$r > |T'x_0| \Rightarrow |x_n - x_0| \leq C \cdot r^n$$

x_0 einfache Nullstelle von f: $T'x_0 = 0$.

x_0 n-fache Nullstelle: $T'x_0 = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

Global: Newtonverfahren für $z^3 - 1$



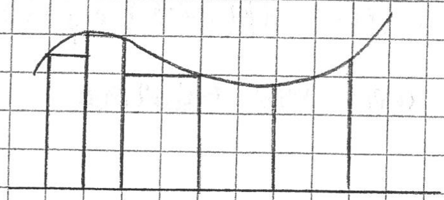
$e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = 1$

$e^{\pi i} = -1$

Juliamenge,
Fraktal,
Chaos

V. Weitere Numerische Verfahren

1.) Numerische Integration



1. Riemannsumme mit linken Randwert

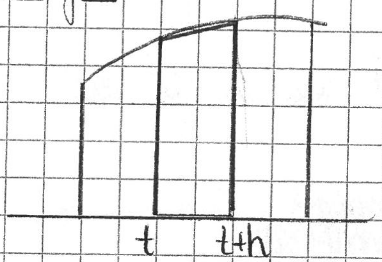
$[a,b]$ in n gleich große Intervalle

Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$

Konvergenz $\lessapprox Ch = C \cdot \frac{1}{n}$

verschieden

Trapezregel:



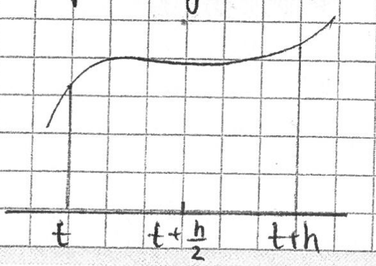
$$\int_t^{t+h} f \approx h \cdot \frac{f(t) + f(t+h)}{2}$$

$$T(f,h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)$$

Falls $|f''(x)| \leq C \quad \forall x \in [a,b]$, dann gilt

$$\left|T(f,h) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq C\,\frac{b-a}{12}\,h^2 = C \cdot \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Simpsonregel (Kepler'sche Fassregel)



Lagrange - Interpolation

$$p(x) = f(t) \cdot \frac{x-(t+\frac{h}{2})}{-\frac{h}{2}} \cdot \frac{x-(t+h)}{-h} +$$

$$+ f\left(t+\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{x-t}{\frac{h}{2}} \cdot \frac{x-(t+h)}{-\frac{h}{2}} +$$

$$+ f(t+h) \cdot \frac{x-t}{h} \cdot \frac{x-\left(t+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

mühsame Rechnung: $\int_t^{t+h} p(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(t) + 4f\left(t+\frac{h}{2}\right) + f(t+h)\right)$

KEPLER'SCHE FASSREGEL

1 4 2 4 2 4 2 4 2 4 1

$$S(f,h) = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + 4\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(2k-1)\frac{h}{2}\right)\right)$$

↳ Simpson formel

Falls $|f^{(4)}(x)| \le C \quad \forall x \in [a,b]$, dann gilt

$$\left|S(f,h) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le C\,\frac{b-a}{2880}\cdot h^4 = C\cdot\frac{(b-a)^5}{2880}\cdot\frac{1}{n^4}$$

Simpson formel und Kepler'sche Fassregel müssen wir nicht auswendig können

→ nur wie schnell konv. → h^2 ... Trapezregel
h^4 ... Simpsonregel
h ... Riemann

Beispiel:

$$\int_1^2 \underbrace{\log x}_{1\cdot\log x,\ 1=x'}\,dx = \underbrace{x\cdot\log x\,\Big|_1^2}_{2\log 2-\underbrace{\log 1}_{=0}} - \underbrace{\int_1^2 \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{=1}}_{=1} = 2\cdot\log 2 - 1 \approx 0{,}38629436112$$

(genau)

Trapezregel:

$n=1$: $T(f,1) = \frac{1}{2}\cdot(\log 1 + \log 2) = \frac{\log 2}{2} \approx 0{,}3466$

Schnitte	Wert	Fehler
10	0,38588	10^{-3}
100	—	$4{,}17\cdot 10^{-6}$
1000	—	$4{,}17\cdot 10^{-7}$

Simpsonregel: $n=1$: $S(f,1) = \frac{1}{6}\left(\log 1 + \log 2 + 4 \cdot \underbrace{\log \frac{3}{2}}_{\log 3 - \log 2}\right) =$

$$= \frac{2}{3}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 \approx 0{,}3858346$$

Schritte	Fehler
10	$6{,}1 \cdot 10^{-8}$
100	$6{,}1 \cdot 10^{-12}$
1000	$6{,}1 \cdot 10^{-16}$
1 000 000	$6{,}1 \cdot 10^{-24}$

konvergiert, aber im Vergleich zu Newton langsam

2.) Numerische Verfahren für Differenzialgleichungen

Insbesondere häufig in der Physik

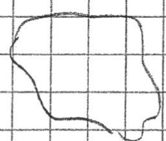
$\dot{x} = f(x,t)$ Lösung $x(t)$, die $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$ $\forall t$

gewöhnliche Diff. gl. 1. Ordnung (2. Ordnung: $\ddot{x} = -g$)

partielle DGL: z.B. Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Anfangsbedingung: $x(t_0) = x_0$

Randbedingung:  (bei partiellen DGL)

hier: eindimensionale gewöhnliche DGL 1. Ordnung

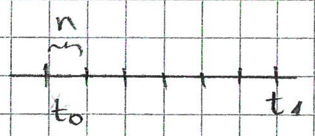
Existenz und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

$f(x,t)$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x

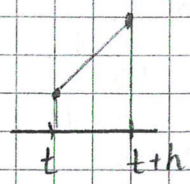
(f C^1 $\Rightarrow$ f Lipschitz stetig)

Dann besitzt $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ lokal eine eindeutig bestimmte Lösung

t_1 $\qquad$ $x(t_1)$ bestimmen



$$h = \frac{t_1 - t_0}{n}$$



$x(t)$

__Euler-Verfahren__: $x(t+h) = x(t) + h f(x(t), t)$

Konvergent: $C \cdot h = C \cdot \frac{1}{n}$

verschieden

besser: __HEUN-Verfahren__

$$k_1 := f(x(t), t)$$
$$k_2 := f(x(t) + h \cdot k_1, t+h)$$
$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

verschieden

Fehler: $C h^2 = C \frac{1}{n^2}$

__RUNGE-KUTTA-Verfahren__ (weitere Verfeinerung)

$$k_1 := f(x(t), t)$$
$$k_2 := f\left(x(t) + \frac{h}{2} k_1, t + \frac{h}{2}\right)$$
$$k_3 := f\left(x(t) + \frac{h}{2} \cdot k_2, t + \frac{h}{2}\right)$$
$$k_4 := f(x(t) + h k_3, t+h)$$

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Fehler: $C h^4 = C \frac{1}{n^4}$