3.10.2011

Tutorium: Mo, 10:00-11:00 bzw. 13:00-14:00

Prüfung: schriftlich + mündlich

UE: Bsp.e im Internet → 1. Mal: Bsp.e 1-5

I. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Einleitung

DGL: Beziehung einer Fkt. zu ihrer Ableitung

Funktion: $f(x)$ $\Rightarrow$ schreibt $x(t)$

Ableitung: $f'(x)$ $\Rightarrow$ schreibt $\dot{x}(t)$ (nicht x', weil $x'=1$)

$\ddot{x}, x^{(3)}, \ldots$ $(x^{(0)} = x)$

SATZ: Seien $a \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann $\dot{x} = ax$ $(\dot{x}(t) = a x(t) \ \forall t)$ und

Anfangsbed.

$x(0) = x_0$ wenn $x(t) = x_0 \cdot e^{at}$.

Bew.: $(\Leftarrow)$: $x(t) = x_0 \cdot e^{at}$

$\dot{x}(t) = \underbrace{x_0 e^{at}}_{x(t)} \cdot a = a\, x(t)$ mit $x(0) = x_0$

$(\Rightarrow)$: setze $y(t) = x(t) \cdot e^{-at}$

$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) \cdot e^{-at} + x(t) \cdot e^{-at} \cdot (-a) =$

$= e^{-at} \cdot \underbrace{(\underbrace{\dot{x}(t)}_{a \cdot x(t)} - a \cdot x(t))}_{0} = 0$

Mittelwertsatz

$\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $y(t) = c$ Fkt. konstant → geometr. Erklärung (Steigung) falsch!!!

$\Rightarrow$ $c = y(t) = x(t) \cdot e^{-at}$ $\Rightarrow$ $x(t) = c \cdot e^{at}$

$\Rightarrow$ $x(0) = x_0 = c$ $\Rightarrow$ $x(t) = x_0 e^{at}$ $\square$

<u>Korollar:</u> Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann

$\dot{x} = a \cdot x$, wenn $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $x(t) = c\,e^{at}$.

Frage: Ist König Arthur an dem Tisch in Winchester gesessen?

König Arthur hat, falls er jemals gelebt hat, im 5./6.

Jahrhundert gelebt. $\Rightarrow$ Alter des Tisches bestimmen $\Rightarrow$

$\rightarrow$ C-Isotop, das nach Tod abgebaut wird (weil radioaktiv)

C^{14}-Methode: Libby (1960 Nobelpreis)

$\rightarrow$ muss nicht $\in \mathbb{N}$

$x(t)$ „Anzahl" der C^{14}-Isotope zur Zeit t

$\rightarrow$ nimmt ab

$\dot{x}(t) = -k\,x(t) \overset{\text{SATZ}}{\Longrightarrow} \exists c$ mit $x(t) = c e^{-kt}$

für C^{14} ist $k \approx 1{,}245 \cdot 10^{-4}$ / Jahr

$\Rightarrow x(t) = c e^{-1{,}245 \cdot 10^{-4} \cdot t}$

Messung im Jahr 1976 (C^{14}-Strahlung $\propto$ Menge)

frisch gefällt: 6,68 $\qquad x(0) = 6{,}68 = c$

Tisch: 6,08 $\qquad x(t) = 6{,}08 = c e^{-kt}$

$$\frac{6{,}68}{6{,}08} = \frac{\cancel{c}}{\cancel{c} e^{-kt}} = e^{kt}$$

$$kt = \log\left(\frac{6{,}68}{6{,}08}\right)$$

$$t = \frac{1}{1{,}245 \cdot 10^{-4}} \log\left(\frac{6{,}68}{6{,}08}\right) \approx 756 \text{ Jahre}$$

Der Tisch ist im ~~13.~~ 12./13. Jhd. entstanden.

König Arthur ist niemals an diesem Tisch gesessen.

King Arthur (Waliser) kämpft gegen die Engländer.

$x(t)$ ... Anzahl der Mann/Frau der Armee von König Arthur

$y(t)$ ... Anzahl der Mann/Frau der englischen Armee

$\rightarrow$ stärker

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\tfrac{1}{8} \cdot y(t), \quad x(0) = 8\,000 \\ \dot{y}(t) &= -\tfrac{1}{2} \cdot x(t), \quad y(0) = 15\,000 \end{aligned}\right\} \text{ gekoppelte DGLen}$$

2× 1. Gleichung + 2. Gleichung

$$(2x+y)^{\cdot} = 2\dot{x} + \dot{y} = -\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}(y+2x) = -\frac{1}{4}(2x+y)$$

$$\Rightarrow \quad 2x+y = ce^{-\frac{1}{4}t}$$

$$c = (2x+y)(0) = 31\,000$$

$$\Rightarrow \quad 2x+y = 31000\, e^{-\frac{1}{4}t}$$

2× 1. Gleichung − 2. Gleichung

$$(2x-y)^{\cdot} = 2\dot{x} - \dot{y} = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(2x-y)$$

$$\Rightarrow \quad 2x-y = ce^{\frac{1}{4}t}$$

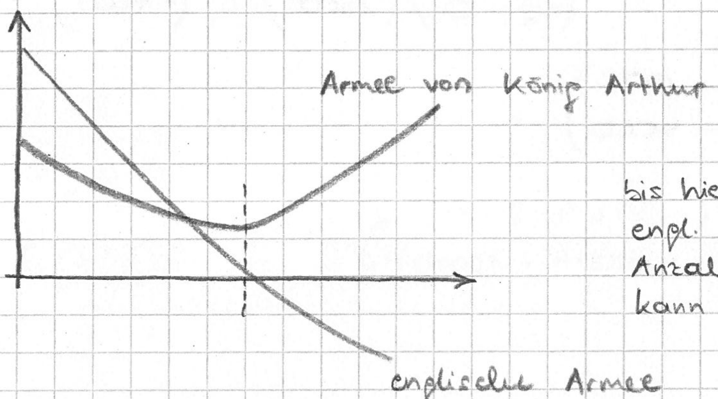
$$c = (2x-y)(0) = \overset{2\cdot 8000-15000}{1000}$$

$$\Rightarrow \quad 2x-y = 1000\, e^{\frac{1}{4}t}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= 31000\, e^{-\frac{1}{4}t} \\ 2x-y &= 1000\, e^{\frac{1}{4}t} \end{aligned}\right\} \oplus,\ /:4$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 7750\, e^{-\frac{1}{4}t} + 250\, e^{\frac{1}{4}t}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 15500\, e^{-\frac{1}{4}t} - 500\, e^{\frac{1}{4}t}$$



bis hier gilt DGL, weil engl. Armee kann keine neg. Anzahl haben, Arthurs Armee kann nicht zunehmen;

Eigentlich haben wir folgendes gemacht:

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

aus 1-dim. gekoppeltes 2-dim. einfaches Gl.-System gemacht

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}y(t) \\ -\frac{1}{2}x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

Diese Matrix haben wir diagonalisiert; d.h. bezgl. einer Basis $\{v_1, v_2\}$ sieht die Matrix so $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ aus.

Eigenwerte dieser Matrix berechnen:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -x & -1/8 \\ -1/2 & -x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{1}{16} \implies x = \pm \frac{1}{4}$$

Eigenwerte: $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \underbrace{y}_{\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}} \qquad \begin{matrix} \dot{\tilde{x}} = -\frac{1}{4}\tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} = \frac{1}{4}\tilde{y} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \tilde{x} = c_1 e^{-\frac{1}{4}t} \\ \tilde{y} = c_2 e^{\frac{1}{4}t} \end{matrix}$$

$\implies X(t) = e^{-\frac{1}{4}t} w_1 + e^{\frac{1}{4}t} w_2$ suche w_1, w_2

$$\begin{pmatrix} 8000 \\ 15000 \end{pmatrix} = X(0) = w_1 + w_2$$

$$\dot{X}(t) = e^{-\frac{1}{4}t} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot w_1 + e^{\frac{1}{4}t} \cdot \frac{1}{4} \cdot w_2$$

$$\dot{X}(0) = -\frac{1}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_2$$

$$\dot{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} X(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1875 \\ -4000 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_2 = \begin{pmatrix} -1875 \\ -4000 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 250 \\ -500 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (-1875 \cdot 4 + 8000) : 2 \\ (-4000 \cdot 4 + 15000) : 2 \end{matrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 7750 \\ 15500 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{-\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 7750 \\ 15500 \end{pmatrix} + e^{\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} 250 \\ -500 \end{pmatrix}$$

Bsp.: $\dot{x} = 9x - 10y \qquad x(0) = 7$

$\dot{y} = -10x - 12y \qquad y(0) = 3$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} X \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 9-x & -10 \\ -10 & -12-x \end{pmatrix} = x^2+3x-208$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+280} \Rightarrow 13, -16$$

1. Methode: Eigenvektoren bestimmen:

$$X = e^{\lambda_1 t} c_1 v_1 + e^{\lambda_2 t} c_2 v_2$$

EV zu 13: $\begin{array}{cc|c} -4 & -10 & 0 \\ -10 & -25 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ \hline \end{array}$ fällt weg (5-faches) z.B.: $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

EV zu −16: $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ weil Matrix symm. $\Rightarrow$ ONB $\Rightarrow$ 2. steht $\perp$ drauf

$$X(t) = e^{-13t} c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{16t} c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 29 & 29 \end{array}$$

$c_2 = 1, c_1 = 1 \longrightarrow$

Lösung: $X(t) = e^{-13t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{16t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

10.10.2011

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$13 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad -16 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{13t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-16t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{13t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-16t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Methode: $x(t) = e^{13t} w_1 + e^{-16t} w_2$

bei 3×3-Matrix müsste man nochmal ableiten, dass man Gleichungssystem lösen kann

0 einsetzen $\quad w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) = e^{13t}\, 13\, w_1 + e^{-16t} (-16)\, w_2$$

0 einsetzen $\quad 13 w_1 - 16 w_2 = \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -106 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \\ 13 & -16 & \begin{pmatrix}33\\-106\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 13 & 0 & -16 & 0 & 33 \\ 0 & 13 & 0 & -16 & -106 \end{array}$$

2 GSe simultan lösen (Gauß)

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 13 & -16 & 33 & -106 \end{array} \; / \mathrm{II} - 13\mathrm{I} \longrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & -29 & -58 & -145 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \; / \mathrm{I} - \mathrm{II} \longrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

$$x(t) = e^{13t}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} + e^{-16t}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

I. Differenzialgleichungen

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_r(t) \end{pmatrix}, \qquad \int_a^b x(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t)\,dt \\ \int_a^b x_2(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b x_r(t)\,dt \end{pmatrix}$$

1.) Was ist eine DGL?

$\dot{x} = f(x,t) \qquad [\dot{x}(t) = f(x(t),t)]$

$\rightarrow$ gewöhnliche DGL (ODE), 1. Ordnung, explizit

Falls t_0, x_0 gegeben: Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$

Def.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^r$, $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$

Dann heißt $\dot{x} = f(x,t)$ Differenzialgleichung

Falls $t_0 \in I$ und $x_0 \in D$, dann ist $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$

Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung

Def.: Eine Funktion $x: I \to \mathbb{R}^r$ $\underline{(D)}$ ($I \to D$) heißt globale Lösung (auf ganzem Intervall def.),

falls x stetig, differenzierbar auf I° und $\forall t \in I_\circ$:

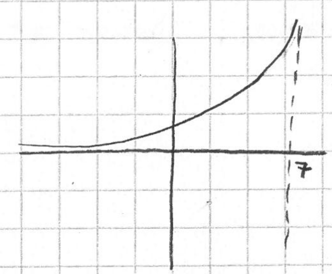
$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad (x(t_0) = x_0)$

Es muss nicht immer globale Lösungen geben.

$\dot{x} = x^2 \qquad (x(0) = \frac{1}{7})$

$x(t) = \frac{1}{7-t}$ ist Lösung $\qquad$ AB: $\frac{1}{7-0} = \frac{1}{7}$ ✓

$\dot{x} = \frac{1}{(7-t)^2} = \Big(\underbrace{\frac{1}{7-t}}_{x}\Big)^2 = x^2$ ✓ erfüllt DGL



$x: (-\infty, 7) \to \mathbb{R}$

Das ist eine lokale, aber keine globale Lösung. weil komme über 7 nicht hinaus

(Lineare DGLen)

M_r $(M_r(\mathbb{R}))$ sind die reellen $r \times r$ - Matrizen

Def.: Sei $\overset{\text{Ordnung d. DGL}}{n} \in \mathbb{N}$, $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} : \mathbb{R} \to \overset{\text{Matrizen}}{M_r}$ stetige Fkten

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ stetige Funktion

Dann heißt $\sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x^{(j)} = f$ eine lineare DGL

(n-ter Ordnung, r-dimensional)

inhomogen: f... Störfaktor, homogen wäre: $f = 0$

Falls $\exists$ $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \in M_r$ und

$A_0(t) = A_0, \dots, A_{n-1}(t) = A_{n-1} \ \forall t$, dann lineare

DGL mit konstanten Koeffizienten.

Bsp.

$\dot{x} = ax \iff \dot{x} - ax = 0$

Prop.: Sei x_s eine Lösung von $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x^{(j)} = f \quad (= f(t))$

Dann ist x genau dann eine Lösung von

$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x^{(j)} = f$, falls es eine Lsg. x_h von $\underbrace{x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x^{(j)} = 0}_{\text{entsprechende homogene DGL}}$

gibt mit $x = x_s + x_h$.

Bew.: ($\Leftarrow$): $\underbrace{x^{(n)}}_{x_s^{(n)}+x_h^{(n)}} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, \underbrace{x^{(j)}}_{x_s^{(j)}+x_h^{(j)}} =$

$$= \underbrace{x_s^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x_s^{(j)}}_{f} + \underbrace{x_h^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(t)\, x_h^{(j)}}_{0} = f$$

$f \leftarrow$ kommt bei impliziter DGL raus $\qquad 0 \leftarrow$ kommt bei homogener DGL raus

($\Rightarrow$): Sei x Lösung: Setze $x_h = x - x_s$. Daher $x = x_s + x_h$.

$$\underbrace{x_h^{(n)}}_{x^{(n)}-x_s^{(n)}} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, \underbrace{x_h^{(j)}}_{x^{(j)}-x_s^{(j)}} =$$

$$= \underbrace{x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x^{(j)}}_{f} - \underbrace{\left(x_s^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\, x_s^{(j)} \right)}_{f} = 0$$

$\square$

2.) Die DGL $\dot{x} = ax + f$

$\dot{x} - ax = f$

homogen: $\dot{x} - ax = 0 \iff \dot{x} = ax \overset{\text{SATZ}}{\iff} x = ce^{at}$. ✓ gelöst

Wie finden wir eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems?

17.10.2011

$\dot{x} = ax \iff x = ce^{at}$: $e^{at} \ldots a$

$\dot{z} = az \iff z = ce^{at}$

$a = c + di \qquad e^{(c+di)t} = e^{ct} \cdot \cos(dt) + ie^{ct} \cdot \sin(dt)$

$e^{at} \cos bt$, $e^{at} \sin bt \quad \ldots a + bi$

$3 \ldots e^{3t}$

$2 + 3i \ldots e^{2t} \cos 3t$, $e^{2t} \sin 3t$

$6e^{8t} \ldots 8$

$\sin t \ldots i \qquad 0+1i$

$\overset{\curvearrowleft 90°}{9} \;\hat{=}\; 0$

(Funktion) (Zahl)

1. Methode (funktioniert auch bei nichtkonst. Koeffizienten)

$\Rightarrow$ Variation der Konstante:

Ansatz: $x(t) = c(t)e^{at}$ Konst. c variabel

$(\dot{x} = ax + f)$

$$\dot{c}(t)e^{at} + \cancel{c(t)e^{at}a} = \dot{x} = ax + f = \cancel{ac(t)e^{at}} + f(t)$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = f(t)e^{-at} \Rightarrow c(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)e^{-as}\,ds$$

Prop.: Die Funktion $x(t) = e^{at} \cdot \int_{t_0}^{t} f(s)e^{-as}\,ds$ ist eine Lösung von $\dot{x} = ax + f$.

Bew.: $$\dot{x} \overset{HS}{=} \underbrace{ae^{at} \cdot \int_{t_0}^{t} f(s)e^{-as}\,ds}_{x} + \underbrace{e^{at} \overbrace{f(t)e^{-at}}^{\text{Abl. d. Integrals}}}_{f(t)} = ax + f \qquad \square$$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 6e^{3t}$

homogen: $\dot{x} = 2x \Leftrightarrow x = ce^{2t}$

inhomogen: $x = c(t)e^{2t}$

$$\dot{c}e^{2t} + \cancel{2ce^{2t}} = \dot{x} = 2x + 6e^{3t} = \cancel{2ce^{2t}} + 6e^{3t}$$

$$\Rightarrow \dot{c} = 6e^{t} \Rightarrow c = 6e^{t} \Rightarrow x = ce^{2t} = 6e^{t}e^{2t} = 6e^{3t}$$

allg. Lösung: $x(t) = 6e^{3t} + ce^{2t}$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 6e^{3t}, \quad x(0) = 0$

allg. Lösung bestimmen: $x = 6e^{3t} + ce^{2t}$

$0 = x(0) = 6 + c \Rightarrow c = -6$

$\Rightarrow \underline{x(t) = 6e^{3t} - 6e^{2t}}$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 5\sin t$

homogen: wie vorher

inhomogen: $x = c(t)e^{2t}$ ← Ansatz

$\dot{c}e^{2t} + \cancel{2ce^{2t}} = \dot{x} = 2x + 5\sin t = \cancel{2ce^{2t}} + 5\sin t$

$\Rightarrow \dot{c} = 5e^{-2t}\sin t$

$$\int e^{-2t}\underbrace{\sin t}_{(-\cos t)^{\cdot}}\,dt = -e^{-2t}\cos t - 2\int e^{-2t}\underbrace{\cos t}_{(\sin t)^{\cdot}}\,dt =$$

$$= -e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t - 4\int e^{-2t}\sin t\,dt$$

$$\Rightarrow 5\int e^{-2t}\sin t\,dt = -e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t$$

$$\Rightarrow x = ce^{2t} = -\cos t - 2\sin t$$

allg. Lsg.: $x(t) = -\cos t - 2\sin t + ce^{2t}$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 7e^{2t}$

homogen: wie vorher

inhomogen: $x = c(t)e^{2t}$

$\dot{c}e^{2t} + \cancel{2ce^{2t}} = \dot{x} = 2x + 7e^{2t} = \cancel{2ce^{2t}} + 7e^{2t}$

$\Rightarrow \dot{c} = 7 \Rightarrow c = 7t \Rightarrow x = 7te^{2t}$ (spezielle Lsg.)

allg. Lsg.: $x(t) = 7te^{2t} + ce^{2t}$

2. Methode

Passender Ansatz für die Störfunktion

Prop.: Seien $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$.

(1) Falls $\alpha \neq a$, setze $V = \{(c_k t^k + c_{k-1}t^{k-1} + c_1 t + c_0)e^{\alpha t}$, $c_k, \dots, c_0 \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $x \mapsto \dot{x} - ax$ bijektiv $V \to V$.

(2) Setze $V = \{(c_k t^k + \dots + c_1 t + c_0)e^{\alpha t}\cos\beta t +$
$+ (d_k t^k + \dots + d_1 t + d_0)e^{\alpha t}\sin\beta t$,
$c_k, \dots, c_0, d_k, \dots, d_0 \in \mathbb{R})$.$\}$ Dann ist $x \mapsto \dot{x} - ax$ bijektiv $V \to V$.

(3) Setze $W = \{(c_{k+1}t^{k+1} + \ldots + c_1 t + c_0)e^{at} : c_{k+1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}\}$

und $V = \{(c_k t^k + \ldots + c_1 t + c_0)e^{at} : c_k, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}\}$.

Dann ist $x \longmapsto \dot{x} - ax$ surjektiv $W \to V$.

Bew.: $\varphi(x) = \dot{x} - ax$ ist linear

$$\left(\varphi(x) + \lambda y = \underbrace{(x+\lambda y)^{\cdot}}_{\dot{x}+\lambda\dot{y}} - a(x+\lambda y) = \dot{x} - ax + \lambda(\dot{y} - ay) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) \right)$$

(1) $f \in V \Rightarrow f = \underbrace{p(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k} e^{\alpha t}$

$$\varphi(f) = \dot{f} - af = \dot{p}e^{\alpha t} + \alpha p e^{\alpha t} - ap e^{\alpha t} = \underbrace{(\dot{p} + (\alpha - a)p)}_{\text{Polynom Grad} \leq k} e^{\alpha t} \in V$$

Sei $x \in \ker\varphi \Rightarrow 0 = \overbrace{\varphi(x) = \dot{x} - ax}^{\text{homogene DGL}} \Rightarrow x = ce^{at} \in V \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \ker\varphi = \langle 0 \rangle \Rightarrow \varphi$ bijektiv

(2) $x \in V \Rightarrow x = \underbrace{p_1(t)}e^{\alpha t}\cos\beta t + \underbrace{p_2(t)}e^{\alpha t}\sin\beta t$

Polynome Grad $\leq k$

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \dot{x} - ax &= \dot{p}_1 \underbrace{e^{\alpha t}\cos\beta t} + \alpha p_1 \underbrace{e^{\alpha t}\cos\beta t} - \beta p_1 e^{\alpha t}\sin\beta t \\ &+ \dot{p}_2 e^{\alpha t}\sin\beta t + \alpha p_2 e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta p_2 \underbrace{e^{\alpha t}\cos\beta t} \\ &- a p_1 \underbrace{e^{\alpha t}\cos\beta t} - a p_2 e^{\alpha t}\sin\beta t = \\ &= \underbrace{(\dot{p}_1 + \alpha p_1 + \beta p_2 - a p_1)}\underbrace{e^{\alpha t}\cos\beta t} \\ &+ \underbrace{(-\beta p_1 + \dot{p}_2 + \alpha p_2 - a p_2)}_{\text{Polynom Grad} \leq k} e^{\alpha t}\sin\beta t \in V\end{aligned}$$

Sei $x \in \ker\varphi \Rightarrow 0 = \varphi(x) = \dot{x} - ax \Rightarrow x = ce^{at} \in V$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker\varphi = \langle 0 \rangle \Rightarrow \varphi$ bijektiv

(3) Sei $x \in W \Rightarrow x = (\underbrace{c_{k+1}t^{k+1}}_{\text{höchsten angeschrieben}} + \underbrace{p(t)}_{\text{Polynom Grad} \leq k})e^{at}$ ← Rest

$$\varphi(x) = \dot{x} - ax = ((k+1)c_{k+1}t^k + \dot{p})e^{at} + \cancel{a c_{k+1}t^{k+1}}e^{at} + ape^{at}$$

$$- \cancel{a c_{k+1}t^{k+1}}e^{at} - ape^{at} = \underbrace{((k+1)c_{k+1}t^k + \dot{p})}_{\text{Polynom Grad} \leq k}e^{at} \in V$$

$\dim W = k+2, \quad \dim V = k+1$

$\ker\varphi = \{x : \underbrace{\varphi(x) = 0}_{\dot{x} - ax = 0 \iff x = ce^{at}}\} = \{ce^{at} : c \in \mathbb{R}\} \quad (\subseteq W)$

$\dim \ker\varphi = 1 \quad (c)$

$\underbrace{\dim W}_{k+2} = \underbrace{\dim \ker\varphi}_{1} + \dim \operatorname{im}\varphi \implies \dim \operatorname{im}\varphi = k+1$

↳ weil Abb. geht in V (im) → alle Elemente aus V werden getroffen

$\underbrace{\operatorname{im}\varphi}_{\dim = k+1} \subseteq \underbrace{V}_{\dim = k+1} \implies \operatorname{im}\varphi = V \implies \varphi$ surjektiv

$\square$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 8t^2e^{4t}$

Ansatz: $x = \alpha_2 t^2 e^{4t} + \alpha_1 t e^{4t} + \alpha_0 e^{4t}$

jetzt: $\dot{x}$ ausrechnen, $2x + 8t^2e^{4t}$ ausrechnen, Koeff.vgl.

	t^2e^{4t}	te^{4t}	e^{4t}
x	α_2	α_1	α_0
$\dot{x}$	$4\alpha_2$	$2\alpha_2 + 4\alpha_1$	$\alpha_1 + 4\alpha_0$
$2x + 8t^2e^{4t}$	$2\alpha_2 + 8$	$2\alpha_1$	$2\alpha_0$

} Koeff. vgl. (*)

(*) $4\alpha_2 = 2\alpha_2 + 8 \implies 2\alpha_2 = 8$

$2\alpha_2 + 4\alpha_1 = 2\alpha_1 \implies 2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 0$

$\alpha_1 + 4\alpha_0 = 2\alpha_0 \implies \alpha_1 + 2\alpha_0 = 0$

$\implies \alpha_2 = 4 \implies \alpha_1 = -4 \implies \alpha_0 = 2$

$\implies x = (4t^2 - 4t + 2)e^{4t}$

allg. Lsg.: $(4t^2 - 4t + 2)e^{4t} + ce^{2t}$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 5e^{4t}\sin t$

Ansatz: $x = \alpha_1 e^{4t}\cos t + \alpha_2 e^{4t}\sin t$

	$e^{4t}\cos t$	$e^{4t}\sin t$
x	α_1	α_2
$\dot{x}$	$4\alpha_1 + \alpha_2$	$-\alpha_1 + 4\alpha_2$
$2x + 5e^{4t}\sin t$	$2\alpha_1$	$2\alpha_2 + 5$

$$4\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$-\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2\alpha_2 + 5 \quad \Rightarrow \quad -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5$$

$$\left.\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{cc} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x = -e^{4t}\cos t + 2e^{4t}\sin t$$

allg. Lsg.: $x(t) = -e^{4t}\cos t + 2e^{4t}\sin t + ce^{2t}$

Bsp.: $\dot{x} = 2x + 3t^2 e^{2t}$

Ansatz: $x = \alpha_3 t^3 e^{2t} + \alpha_2 t^2 e^{2t} + \alpha_1 t e^{2t} + \alpha_0 e^{2t}$

	t^3e^{2t}	t^2e^{2t}	te^{2t}	e^{2t}
x	α_3	α_2	α_1	α_0 (0) im 1dim
$\dot{x}$	$2\alpha_3$	$3\alpha_3 + 2\alpha_2$	$2\alpha_2 + 2\alpha_1$	$\alpha_1 + 2\alpha_0$
$2x + 3t^2e^{2t}$	$2\alpha_3$	$2\alpha_2 + 3$	$2\alpha_1$	$2\alpha_0$

$\cancel{2\alpha_3 = 2\alpha_3}$

$$3\alpha_3 + \cancel{2\alpha_2} = \cancel{2\alpha_2} + 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 1$$

$$2\alpha_2 + \cancel{2\alpha_1} = \cancel{2\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 + \cancel{2\alpha_0} = \cancel{2\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0$$

α_0 bel. (setze $\alpha_0 = 0$)

$\Rightarrow \quad x = t^3 e^{2t}$

allg. Lsg.: $x(t) = t^3 e^{2t} + c e^{2t}$

24.10.2011

3.) Systeme von linearen DGLen mit konstanten Koeffizienten

$\dot{x} = \underbrace{A}_{r\times r\text{-Matrix}} x + f \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \qquad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}$

Polynom: $t^k v_k + t^{k-1} v_{k-1} + \ldots + t^1 v_1 + v_0$

$\in \mathbb{R}^r$

Man versucht A zu diagonalisieren.

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis $\{v_1, \ldots, v_r\}$ aus Eigenvektoren

$S = (v_1, \ldots, v_r)$ inv.b.

Setze $x = Sy \quad (\Leftrightarrow y = S^{-1}x)$

$S\dot{y} = (Sy)^\cdot = \dot{x} = A\underbrace{x}_{Sy} + f = ASy + f \qquad / \cdot S^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad \dot{y} = \underbrace{S^{-1}AS}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}} y + S^{-1}f$ weil in S, S^{-1} EVen

Lösung: $x = e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + e^{\lambda_r t} v_r$

Kann man jede Matrix diagonalisieren? Nein.

Lin. Alg.: Man kann A auf Jordan'sche (fr.) Normalform bringen.

$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & 0 \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B_s} \end{pmatrix}$ wobei $B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ Jordan-Block

Bsp.:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x$$

Eigenwerte: $0 = x^2 - 6x + 9$

3 ist ein (2-facher) EW.

$$x(t) = t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Grad erhöht sich bei höheren EWen;

1. Problem: mehrfache (reelle) Eigenwerte

Bsp.:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Standardbsp.

Eigenwerte: $0 = x^2 + 1 \implies$ EWe: $\pm i$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{=}$ Wert i

2. Problem: komplexe (nicht reelle) Eigenwerte

3. Problem: mehrfach komplexe Eigenwerte

λ Eigenwert ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, o.B.d.A.: $\operatorname{Im}\lambda > 0$) (2 Fälle

$\implies \exists\ v \in \mathbb{C}^r$ mit $Av = \lambda v + w$ $\quad (0 \ldots 0\ \lambda\ 1\ 0 \ldots 0)$

weil A reelle Matrix

$A\bar{v} = \bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ $\implies \bar{\lambda}$ ist auch EW

$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v + w} = \bar{\lambda}\bar{v} + \bar{w}$ $\quad (0 \ldots 0\ \bar{\lambda}\ 1\ 0 \ldots 0)$

$\lambda = a + bi$ $\qquad v_1 + iv_2$ Eigenvektor zu $a - bi$

$(v_1 + iv_2 \ldots (0 \ldots 0\ a-bi \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0)$

$$\left.\begin{aligned} A(v_1 + iv_2) &= (a-bi)(v_1 + iv_2) + (w_1 + iw_2) \\ A(v_1 - iv_2) &= (a+bi)(v_1 - iv_2) + (w_1 - iw_2) \end{aligned}\right\} \pm$$

$\oplus$ $Av_1 = av_1 + bv_2 + w_1$

$\ominus$ $Av_2 = -bv_1 + av_2 + w_2$

bzgl. $\{v_1, v_2\}$ $(\{v_1, v_2, w_1, w_2\})$

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & \begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0\ldots0 \\ & & 0 & \end{pmatrix}$$

reelle Jordan'sche Normalform: zu $a+bi$ gehören Blöcke:

$$\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & \\ b & a & 0 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & a & -b & \ddots & & \\ 0 & 0 & b & a & & & \\ & & & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & 0 & & & a & -b \\ & & & & & b & a \end{pmatrix}$$

falls $v_1 + iv_2$ EV zu $a-bi$, dann tritt in der allg. Lsg.:

$e^{at}\cos bt\,(c_1v_1 + c_2v_2) + e^{at}\sin bt\,(-c_2v_1 + c_1v_2)$ auf;

Wir müssen jetzt $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$ lösen. EWe: $a \pm ib$

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ist EV zu $a-bi$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ist EV zu $a+bi$

Lsg.: $x = c_1 \underbrace{e^{(a-bi)t}}_{e^{at}(\cos bt - i\sin bt)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \underbrace{e^{(a+bi)t}}_{e^{at}(\cos bt + i\sin bt)} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

<u>Lemma:</u> $x(t) = e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

ist Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$ und $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

<u>Bew.:</u> $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ ✓ (einsetzen + nachrechnen)

$$\dot{x} = e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} a\alpha_1 \\ a\alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -b\alpha_1 \\ -b\alpha_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -a\alpha_2 \\ a\alpha_1 \end{pmatrix} + e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} -b\alpha_2 \\ b\alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{at}\cos bt \underbrace{\begin{pmatrix} a\alpha_1 - b\alpha_2 \\ a\alpha_2 + b\alpha_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}} + e^{at}\sin bt \underbrace{\begin{pmatrix} -b\alpha_1 - a\alpha_2 \\ -b\alpha_2 + a\alpha_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \overbrace{\left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right)}^{x} \qquad \square$$

<u>SATZ</u>: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Dann ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ genau dann eine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$, wenn es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $x(t) = e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$.

<u>Bew.</u>: ($\Leftarrow$): Lemma sagt das aus

($\Rightarrow$): x erfülle $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$.

Setze $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := x(0)$

ziehen von x das ab, von dem wir hoffen, dass Lsg.

$$\text{Def.: } y(t) = x(t) - \left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\dot{y} = \dot{x} - \underbrace{\left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right)^{\cdot}}_{\text{Lemma} \Rightarrow\ A\left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right)} =$$

$$= A \Big(\underbrace{x - \left(e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right)}_{y} \Big) = A\mathbf{y}$$

$$y(0) = x(0) - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Setze } u(t) = e^{-2at}\left(y_1(t)^2 \overset{+\,(!)}{-} y_2(t)^2 \right) \qquad \left[y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dot{u}(t) = e^{-2at}\left(-2ay_1^2 \overset{+\,(!)}{-} 2ay_2^2 \right) +$$

$$+ e^{-2at}\Big(2y_1 \cdot \underbrace{\dot{y}_1}_{ay_1 - by_2} \overset{+\,(!)}{-} 2y_2 \cdot \underbrace{\dot{y}_2}_{by_1 + ay_2} \Big) =$$

$$= e^{-2at}\left(-\cancel{2ay_1^2} - \cancel{2ay_2^2} + \cancel{2ay_1^2} - \cancel{2by_1y_2} + \cancel{2by_1y_2} + \cancel{2ay_2^2} \right) =$$

Mittelwertsatz!

$$= 0$$

$$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ mit } \overset{\text{konstant}}{u(t)} = c \quad \forall t$$

$$c = u(0) = e^{-2at}\Big(\underbrace{y_1(0)^2}_{0} + \underbrace{y_2(0)^2}_{0} \Big) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = u(t) = e^{-2at}\left(y_1(t)^2 + y_2(t)^2 \right)$$

$\Rightarrow \quad y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y_1(t) = y_2(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x(t) = e^{at}\cos bt \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}$ $\square$

Prop.: Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\beta > 0$

(1) Setze $V = \{ t^k e^{\alpha t} v_k + \ldots + t e^{\alpha t} v_1 + e^{\alpha t} v_0, \; v_k, \ldots, v_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

Dann ist $x \mapsto \dot{x} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$ bijektiv $V \to V$.

(2) Falls $\alpha + \beta i \neq a + bi$

setze $V = \{ t^k e^{\alpha t} \cos\beta t\, v_k + \ldots + t e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_1 + e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_0 +$

$+ t^k e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_k + \ldots + t e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_1 + e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_0,$

$v_k, \ldots, v_0, w_k, \ldots, w_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

Dann ist $x \mapsto \dot{x} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$ bijektiv $V \to V$.

(3) Setze $W = \{ t^{k+1} e^{\alpha t}\cos\beta t \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} + t^k e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_k + \ldots$

$+ t e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_1 + e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_0 +$

$+ t^{k+1} e^{\alpha t}\sin\beta t \begin{pmatrix}-\gamma_2\\ \gamma_1\end{pmatrix} + t^k e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_k + \ldots$

$+ t e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_1 + e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_0,$

$v_k, \ldots, v_0, w_k, \ldots, w_0 \in \mathbb{R}^2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \}$,

wobei $\alpha + \beta i = a + bi$,

$V = \{ t^k e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_k + \ldots + e^{\alpha t}\cos\beta t\, v_0 +$

$+ t^k e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_k + \ldots + e^{\alpha t}\sin\beta t\, w_0,$

$v_k, \ldots, v_0, w_k, \ldots, w_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

Dann ist $x \mapsto \dot{x} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ surjektiv $W \to V$

Bew.: $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\varphi(x) = \dot{x} - Ax$ ist linear, weil

$\varphi(x + \lambda y) = \underbrace{(x + \lambda y)^{\cdot}}_{\dot{x} + \lambda \dot{y}} - \underbrace{A(x + \lambda y)}_{Ax + \lambda y} = \dot{x} + Ax + \lambda(\dot{y} - Ay) = \varphi(x) - \lambda\varphi(y)$

(1) $x \in V \Rightarrow x = \underbrace{p(t)}_{\text{Grad} \leq k} e^{\alpha t}$ → Polynom vom Grad $\leq k$

$$\varphi(x) = \dot{x} - Ax = \underbrace{(\alpha p(t) + \dot{p}(t) - Ap(t))}_{\text{Grad} \leq k} e^{\alpha t} \quad \in V$$

Sei $x \in \ker\varphi \Rightarrow \dot{x} = Ax \Rightarrow x = e^{at}\cos bt\, u_1 + e^{at}\sin bt\, u_2$

↳ sonst liegt nicht in unserem Raum

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker\varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ ist bijektiv

(2) $x \in V \Rightarrow x = \underbrace{p_1(t)}_{\text{Grad} \leq k} e^{\alpha t} \cos\beta t + \underbrace{p_2(t)}_{\text{Grad} \leq k} e^{\alpha t} \sin\beta t$

$$\varphi(x) = e^{\alpha t}\cos\beta t \overbrace{(\alpha p_1 + \dot{p}_1 + \beta p_2 - A p_1)}^{\text{Grad} \leq k} +$$

$$+ e^{\alpha t} \sin\beta t \underbrace{(-\beta p_1 + \alpha p_2 + \dot{p}_2 - A p_2)}_{\text{Grad} \leq k}$$

$x \in \ker\varphi \Rightarrow \dot{x} = Ax \Rightarrow x = e^{at}\cos bt\, u_1 + e^{at}\sin bt\, u_2$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker\varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ ist bijektiv

(3) $x \in W \Rightarrow x = e^{at}\cos bt \left(t^{k+1}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix} + \underbrace{p_1(t)}_{\text{Grad} \leq k}\right) +$

$$+ e^{at}\sin bt \left(t^{k+1}\begin{pmatrix}-\gamma_2\\\gamma_1\end{pmatrix} + \underbrace{p_2(t)}_{\text{Grad} \leq k}\right)$$

$$\varphi(x) = e^{at}\cos bt \Big((k+1)t^k \begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix} + t^{k+1} a \begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix} + t^{k+1} b \begin{pmatrix}-\gamma_2\\\gamma_1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{- t^{k+1} A \begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}}_{0} + \dot{p}_1 + a p_1 + b p_2 - A p_1 \Big) + \cancel{e^{\alpha t}}$$

Grad $\leq k$

$$+ e^{at}\sin bt \Big((k+1)t^k \begin{pmatrix}-\gamma_2\\\gamma_1\end{pmatrix} + t^{k+1} \underbrace{\Big(a\begin{pmatrix}-\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix} - b\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}-\gamma_2\\\gamma_1\end{pmatrix}\Big)}_{0} +$$

$$+ \dot{p}_2 + a p_2 - b p_1 - A p_2 \Big) \quad \text{Grad} \leq k$$

$$\ker\varphi = \left\{ e^{at}\cos bt \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix}-\alpha_2\\\alpha_1\end{pmatrix},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim\ker\varphi = 2$, $\dim V = 4(k+1)$; $\dim W = 4(k+1)+2$

$$\dim \operatorname{im}\varphi = \underbrace{\dim W}_{4(k+1)+2} - \underbrace{\dim\ker\varphi}_{2} = 4(k+1) = \dim V$$

$\Rightarrow \operatorname{im}\varphi = V \Rightarrow \varphi$ surjektiv $\square$

31.10.2011

reeller Jordanblock:

früher: inhom. Fall

$$\dot x = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{pmatrix}}_{q\times q\text{-Matrix}} x + f \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Bem.: 4×4-Matrix, 3 ist EW mit alg. VF 4, mit geom. VF 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & 0 \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 0 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & 0 \\ & 3 & 0 & \\ & & 3 & 1 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}$$

komponentenweise:

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= a x_1 + x_2 + f_1 \\ \dot x_2 &= a x_2 + x_3 + f_2 \\ &\vdots \\ \dot x_{q-1} &= a x_{q-1} + x_q + f_{q-1} \\ \dot x_q &= a x_q + f_q \end{aligned}$$

bei Störfkt. (Ausgangsfkt.): P. vom Gr. $\le k$

	homogen	$e^{\alpha t}$, $\alpha \ne a$, $e^{\alpha t}\cos\beta t$	e^{at}
1	$\le q-1$	$\le k$	$\le k+q$
2	$\le q-2$	$\le k$	$\le k+q-1$
$\vdots$			
$q-1$	≤ 1	$\boxed{\le k}$	$\le k+2$
q	Gr. ≤ 0 → e^{at}	Gr. $\le k$	Gr. $\le k+1$

letzte Gleichung: $x_q = ce^{at} + \underbrace{p}_{\le k} f \;\Big|\; + \underbrace{p}_{\le k+1} e^{at}$

vorletzte Gl.: $\dot x_{q-1} = a x_{q-1} + x_q + f$

$\Rightarrow \dot x_{q-1} = a x_{q-1} + ce^{at} + \underbrace{\overset{\text{spezielle Lsg.}}{x_s} + f}$

$x_{q-1} = \underbrace{c_1 e^{at} + c_2 t e^{at}}_{\text{Pol. vom Grad } \le 1}$

Störfkt.: $\le k$ | $\le k+1$
Lsg.: $\boxed{\le k}$ | $\le k+2$ — um 1 erhöhen

komplexer Fall:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & & & & \\ b & a & 0 & 1 & & & & & & \\ & & a & -b & 1 & 0 & & & & \\ & & b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & a & -b \\ & & & & & & & & b & a \end{pmatrix}}_{2q \times 2q\text{-Matrix}} x$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ x_q = \begin{pmatrix} \tilde{x}_q \\ \tilde{y}_q \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

„komponentenweise“:

$$\dot{x}_1 = \overbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}^{A} x_1 + x_2 + f_1$$

$$\dot{x}_2 = A x_2 + x_3 + f_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{q-1} = A x_{q-1} + x_q + f_{q-1}$$

$$\dot{x}_q = A x_q + f_q$$

	homogen	$e^{\alpha t}, e^{\alpha t}\cos\beta t$ mit $\alpha+\beta \neq a+b$	$e^{at}\cos bt$	$\cdot p(t)$, Grad $\leq$
1	$\leq q-1$	$\leq k$	$\leq k+q$	
2	$\leq q-2$	$\leq k$	$\leq k+q-1$	
$\vdots$				
$q-1$	≤ 1	$\leq k$	$\leq k+2$	
q	≤ 0	$\leq k$	$\leq k+1$	
	$e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt$			

$$x_q = e^{at}\cos bt \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + e^{at}\sin bt \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ -\gamma_1 \end{pmatrix} + x_s$$

$$\dot{x}_{q-1} = A x_{q-1} + \underbrace{x_q} + f_{q-1} =$$

$$e^{at}\cos bt\, p_1 + e^{at}\sin bt\, p_2 + \underline{\overset{(?)}{x_s}} \quad ((p_3))$$

$$x_{q-1} = e^{at}\cos bt \underbrace{q_1}_{\leq 1} + e^{at}\sin bt \underbrace{q_2}_{\leq 1} + \qquad \leq k \mid \leq k+2$$

Zusammenfassung:

homogener Fall:

•) a ein q-facher EW

↱ Kurzschreibweise

Lsg.: $t^{q-1}e^{at},\ t^{q-2}e^{at},\ \dots,\ e^{at} \quad \Rightarrow \quad \big(e^{at}\underbrace{p(t)}_{Gr. \le q-1}\big)$

•) $a \pm \overbrace{b}^{\ge 0} i$ ein q-facher EW

Lsg.: $t^{q-1}e^{at}\cos bt,\ t^{q-1}e^{at}\sin bt,\ \dots,\ e^{at}\cos bt,\ e^{at}\sin bt$

$$\Rightarrow \big(e^{at}\cos bt\, \underbrace{p_1(t)}_{Gr. \le q-1} + e^{at}\sin bt\, \underbrace{p_2(t)}_{Gr. \le q-1}\big)$$

inhomogener Fall:

Wir lassen jetzt $q = 0$ als Vielfachheit des Eigenwerts zu.

•) Störfunktion: $e^{\alpha t}\underbrace{p(t)}_{Gr. \le k}$ $\qquad \alpha$ EW mit VF q

Lösung: $e^{\alpha t}\underbrace{q(t)}_{Gr. \le k+q}$

•) Störfunktion: $e^{\alpha t}\cos\beta t\, \underbrace{p_1(t)}_{Gr. \le k} + e^{\alpha t}\sin\beta t\, \underbrace{p_2(t)}_{Gr. \le k}$

$\alpha + \beta i$ EW mit VF q

Lösung: $e^{\alpha t}\cos\beta t\, \underbrace{q_1(t)}_{Gr. \le k+q} + e^{\alpha t}\sin\beta t\, \underbrace{q_2(t)}_{Gr. \le k+q}$

Bsp.:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 & -12 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$0 = p(x) = \det\begin{pmatrix} 7-x & -3 & -4 & -12 \\ 1 & 5-x & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5-x & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} =$$

↳ günstig!

$$= (7-x)\cdot\det\begin{pmatrix} 5-x & 0 & -2 \\ 0 & 5-x & 6 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -3 & -4 & -12 \\ 0 & 5-x & 6 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} -3 & -4 & -12 \\ 5-x & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} = x^4 - 18x^3 + 121x^2 - 372x + 468$$

HORNER:

	1	-18	121	-372	468
1	1	-17	104	-268	200
⋮					
6	1	-12	49	-78	0
6	1	-6	13	0	

Teiler von 468

$1 \cdot 1 - 18 = -17$
$(-17) \cdot 1 + 121 = 104$
⋮

nocheinmal, falls doppelte Nullstelle

$3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$ Nullstellen: 6 (2-fach), $3 \pm 2i$

$x = te^{6t} v_1 + e^{6t} v_2 + e^{3t} \cos 2t \cdot v_3 + e^{3t} \sin 2t \cdot v_4$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = x(0) = v_2 + v_3$$

$\dot{x} = te^{6t} \cdot 6v_1 + e^{6t} \cdot (v_1 + 6v_2) + e^{3t} \cos 2t \cdot (3v_3 + 2v_4) + e^{3t} \sin 2t \cdot (-2v_3 + 3v_4)$

$$v_1 + 6v_2 + 3v_3 + 2v_4 = \dot{x}(0) = \overset{\text{Angabe}}{A} x(0) = \begin{pmatrix} 55 \\ 9 \\ -31 \\ 14 \end{pmatrix}$$

berechne $\ddot{x}$ und $\ddot{x}(0)$

2. Art um $\ddot{x}(0)$ zu bestimmen

$\dot{x} = Ax \implies \ddot{x} = A\dot{x} \implies \ddot{x}(0) = A\dot{x}(0)$

$$12v_1 + 36v_2 + 5v_3 + 12v_4 = \begin{pmatrix} 296 \\ 72 \\ -126 \\ 58 \end{pmatrix}$$

nochmal ableiten:

$$108v_1 + 216v_2 - 9v_3 + 46v_4 = \begin{pmatrix} 1520 \\ 540 \\ -578 \\ 166 \end{pmatrix}$$

Glen simultan lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 8 & 1 & -7 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 55 & 9 & -31 & 14 \\ 12 & 36 & 5 & 12 & 296 & 72 & -126 & 58 \\ 108 & 216 & -9 & 46 & 1520 & 540 & -578 & 166 \end{array}\right)$$

Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

→ Transponiertes von v_1
→ Tr. v. v_2
⋮

Lösung:

$$x(t) = te^{6t}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\0\end{pmatrix} + e^{6t}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + e^{3t}\cos 2t\begin{pmatrix}4\\0\\-6\\2\end{pmatrix} + e^{3t}\sin 2t\begin{pmatrix}8\\0\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Bsp.: allg. Lsg. von $\dot{x} = \begin{pmatrix}-7 & -4\\ 18 & 11\end{pmatrix} x$

EW: $0 = p(x) = \det\begin{pmatrix}-7-x & -4\\ 18 & 11-x\end{pmatrix} = x^2 - 4x - 5$

$2 \pm \sqrt{4+5} = -1, 5$

EVen zu -1: $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -4 & 0\\ \cancel{18} & \cancel{12} & \cancel{0}\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0\end{array}\right)$ EV: $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

zu 5: EV: $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Lösung: $x(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Bsp.: allg. Lsg. von $\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 18 & 11\end{pmatrix}}_{A} x + t^2 e^{3t}\begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$

3 ist EW mit VFO → Grad um 0 erhöhen

gleiche homogene Lsg.

Ansatz

spezielle Lsg.: $x = t^2 e^{3t} v_2 + te^{3t} v_1 + e^{3t} v_0$

	t^2e^{3t}	te^{3t}	e^{3t}
x	v_2	v_1	v_0
$\dot{x}$	$3v_2$	$2v_2 + 3v_1$	$v_1 + 3v_0$
$Ax + f$	$Av_2 + \begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$	Av_1	Av_0

$3v_2 = Av_2 + \begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}10 & 4\\ -18 & -8\end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$

$2v_2 + 3v_1 = Av_1$ $\qquad \begin{pmatrix}10 & 4\\ -18 & -8\end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} v_2 = 0$

$v_1 + 3v_0 = Av_0$ $\qquad \begin{pmatrix}10 & 4\\ -18 & -8\end{pmatrix} v_0 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} v_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\\
-18 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\\
2 & 0 & 10 & 4 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & -18 & -8 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -18 & -8 & 0
\end{array}\right)$$

Gauß $\Rightarrow$ $v_2 = \begin{pmatrix}10\\-22\end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix}2\\-10\end{pmatrix}$

$v_0 = \begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$

allg. Lsg.: $x(t) = t^2 e^{3t}\begin{pmatrix}10\\-22\end{pmatrix} + t e^{3t}\begin{pmatrix}2\\-10\end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix} + \overbrace{c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}^{\text{homogen}}$

Bsp.: $\dot{x} = \begin{pmatrix}-7 & -4\\ 18 & 11\end{pmatrix} x + t e^{5t}\begin{pmatrix}-20\\ 24\end{pmatrix}$ 5 ist einfacher EW $\to$ Grad um 1 erhöhen

spezielle Lsg.: $x = t^{\boxed{2}} e^{5t} v_2 + t e^{5t} v_1 + e^{5t} v_0$

Lösung ist nicht eindeutig!

z.B.: $v_2 = \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$, $v_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

allg. Lsg.: $x(t) = t^2 e^{5t}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} + t e^{5t}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} + e^{5t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \overbrace{c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}^{\text{homogen}}\right)$

Bsp.: $\dot{x} = \begin{pmatrix}-7 & -4\\ 18 & 11\end{pmatrix} x + e^{t}\sin 2t\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$ Grad nicht erhöhen, weil $1+2i$ 0-facher (d.h. kein) EW

spezielle Lsg.: $x = e^t \underline{\cos} 2t \cdot \underline{v_1} + e^t \underline{\sin} 2t \cdot \underline{w_1}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

allg. Lsg.: $x(t) = e^t \cos 2t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + e^t \sin 2t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

7.11.2011

anderer Zugang:

Matrixnorm:

$\left.\begin{array}{l} \cdot)\ \|A\| \geq 0 \\ \cdot)\ \|A\| = 0 \iff A = 0 \\ \cdot)\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ \cdot)\ \|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\| \end{array}\right\}$ Norm

$\cdot)\ \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ Δ-Ungleichung

Bsp.: $|A| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |a_{j,k}|^2}$

Falls $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$, dann $\|A\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\| = \max_{\|v\| \leq 1} \|Av\| =$

$= \sup_{\substack{\|v\| = 1\\ \max}} \|Av\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$.

Man kann zeigen, dass $(M_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ vollständig ist.

Also jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overset{\nearrow \text{Potenzreihe}}{A^n} \quad \text{konvergiert, weil} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\|}_{\le \frac{1}{n!} \|A^n\|} \le$$

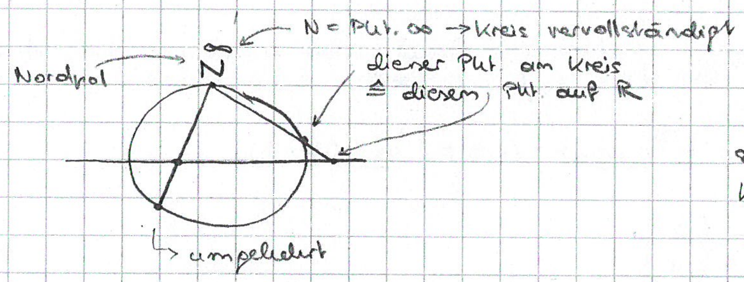
$$A^n = \overbrace{A \cdot \ldots \cdot A}^{n}$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| = e^{\|A\|} \quad \text{konvergent}$$

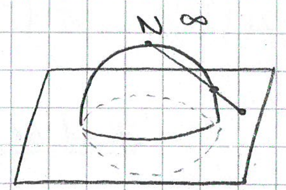
Man kann zeigen, dass $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0 \iff x(t) = e^{tA} x_0$ (Matrix: e^{tA}, Vektor: x_0)

$$\underset{-\infty}{(} \xrightarrow{\quad \mathbb{R} \quad} \underset{+\infty}{)}$$

stauche reelle Zahlen zusammen → bekomme offenes Intervall



stauche reelle Zahlen zu Kreis zusammen



jedem Punkt auf Kugel (außer N) ≙ Punkt auf Ebene + umgekehrt

$$x \to \infty \iff |x| \to +\infty \overset{|x| \ge 0}{\iff} |x| \to \infty$$

Wie ist grob das Verhalten der Lösungen von $\dot{x} = Ax$ nach „langer Zeit"? („$\lim_{t \to +\infty} x(t)$")

Lösungen: $x(t) = p(t)\, e^{(\operatorname{Re}\lambda) t}$ — e-Fkt. überwiegt wenn $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$

$\operatorname{Re}\lambda > 0$: „$\lim_{t \to +\infty} x(t)$" $= \infty$ $\left(\limsup_{t \to +\infty} |x(t)| = (+)\infty \right)$

„$\lim_{t \to -\infty} x(t)$" $= 0$

$\operatorname{Re} < 0$: „$\lim_{t \to +\infty} x(t)$" $= 0$

„$\limsup_{t \to -\infty} |x(t)|$" $= +\infty$

Basis: $\{\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_s}_{\text{gehören zu } \operatorname{Re}\lambda<0}, \underbrace{w_1, \dots, w_u}_{\text{zu } \operatorname{Re}\lambda>0}, \underbrace{y_1, \dots, y_r}_{\text{zu } \operatorname{Re}\lambda=0}\}$

bzgl. der die Matrix Jordan'sche Normalform (JNF) hat

<u>SATZ:</u> Sei A eine $r\times r$-Matrix (über $\mathbb{R}$). Dann gibt es Teilräume E_s und E_u von $\mathbb{R}^r$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Falls $x_0 \in E_s$, dann gilt für die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Falls $x_0 \in E_s \setminus \{0\}$, dann gilt für die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\limsup\limits_{t\to-\infty} |x(t)| = +\infty$.

(2) Falls $x_0 \in E_u$, dann gilt für die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$.

Falls $x_0 \in E_u \setminus \{0\}$, dann gilt für die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\limsup\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$.

Weiters gilt, dass die Dimension von E_s gleich der Anzahl (mit Vielfachheit) der Eigenwerte mit Realteil <0 und die Dimension von E_u gleich der Anzahl der Eigenwerte mit $\operatorname{Re} > 0$ ist.

E_s ist der „stabile Raum" (stable), E_u der „instabile Raum" (unstable).

$\hat{=} \operatorname{Re}<0 \,\hat{=}\, \text{Lsg. } e^{\lambda t} \to 0$

$\hat{=} \operatorname{Re}>0$
$\hat{=} \text{Lsg } e^{\lambda t} \to \infty$

Falls alle EWe $\operatorname{Re} \neq 0$ haben, dann spricht man von einem hyperbolischen System.

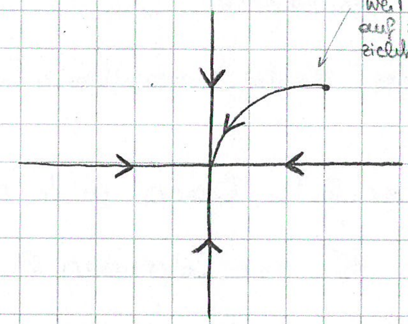
Wie sehen hyperbolische Systeme im $\mathbb{R}^2$ aus?
(Phasendiagramme)

o.B.d.A. EWe λ_1, λ_2 und $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$
↳ Ann.: unterschiedliche Realteile

stabil

1. Fall: $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$:

weil Pfeil auf x-Achse zieht stärker (?)

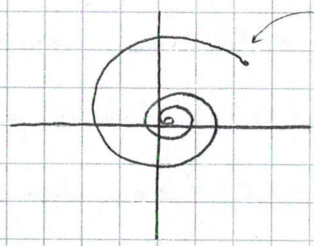


$\dim E_s = 2,\ \dim E_u = 0$

stabil

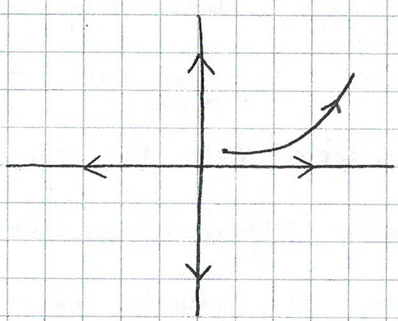
0 ist ein Attraktor.

Sonderfall: $\underbrace{a}_{<0} \pm bi$



Kreis durch cos und sin, aber durch $a = e^t$ nach innen gezogen

2. Fall: $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$:

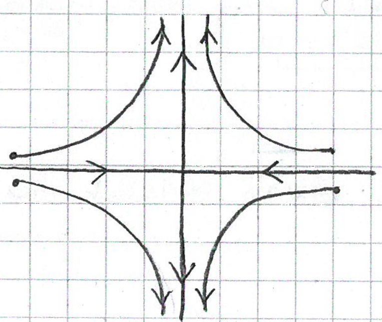


$\dim E_s = 0,\ \dim E_u = 2$

instabil

0 ist ein Repeller.

3. Fall: $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$:



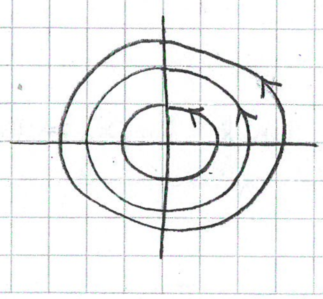
$\dim E_s = 1,\ \dim E_u = 1$

Sattelpunkt

↓

(pos + neg Re)

Fall: $\pm bi$ (EWe)
nicht-hyperbolischer Fall



Bsp.: Chemische Reaktion $A \rightleftarrows B$

$x_1(t)$ ... Menge von A zur Zeit t

$x_2(t)$ ... Menge von B zur Zeit t

ξ_1 ... Menge von A zur Zeit 0

ξ_2 ... Menge von B zur Zeit 0

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

↳ Teil, der von B in A umgewandelt wird

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t)$$

↳ Teil, der von A in B umgewandelt wird

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

$$0 = p(x) = \det \begin{pmatrix} -\alpha_1 - x & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - x \end{pmatrix} = x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) x$$

Eigenwerte: $0, -(\alpha_1 + \alpha_2)$

Eigenvektoren:

zu 0: $\begin{array}{cc|c} -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \cancel{\alpha_1} & \cancel{-\alpha_2} & \cancel{0} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

zu $-(\alpha_1+\alpha_2)$: $\begin{array}{cc|c} \alpha_2 & \alpha_2 & 0 \\ \cancel{\alpha_1} & \cancel{\alpha_1} & \cancel{0} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

allg. Lsg.: $x = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} \alpha_2 & 1 & \xi_1 \\ \alpha_1 & -1 & \xi_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} \alpha_2 & 1 & \xi_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & 0 & \xi_1 + \xi_2 \end{array} \Longrightarrow c_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$c_2 = \xi_1 - \alpha_2 c_1 = \frac{\alpha_1 \xi_1 + \cancel{\alpha_2 \xi_1} - \cancel{\alpha_2 \xi_1} - \alpha_2 \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Lösung: $x(t) = \underbrace{\frac{\xi_1 + \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}}_{} + \underbrace{\frac{\alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{}$

analysieren: Gleichgewichtszustand (stellt sich nach langer Zeit, d.h. $t \to \infty$ ein) — $\to 0$ für $t \to +\infty$ geometrisch schnell

Geometrisch schnell stellt sich der Gleichgewichtszustand ein.

Dieser Gleichgewichtszustand hängt nicht von der Anfangsbedingung ab (nur von der Gesamtmenge $q_1 + q_2$).
und nicht vom Verhältnis $q_1 : q_2$ (!)

4. Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung

$$x^{(n)} + \underbrace{A_{n-1}}_{} x^{(n-1)} + \ldots + \underbrace{A_1}_{} \dot{x} + \underbrace{A_0}_{} x = f$$

$r \times r$-Matrix

Anfangsbedingung: $x(0), \dot{x}(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)$

allgemeiner TRICK (auch für beliebige gewöhnliche DGLen höherer Ordnung): Zurückführen auf 1. Ordnung

Setze $\underbrace{x_1}_{r\text{-dim. Vektor}} := x$, $x_2 := \dot{x}$, $x_3 := \ddot{x}$, ..., $x_n := x^{(n-1)}$

und $\underbrace{X}_{nr\text{-dim. Vektor}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = x^{(n)} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix} =$

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, t)$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix}$$

14. 11. 2011

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \ldots, \dot{x}, x, t)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1 \hat{=} x, \quad x_2 \hat{=} \dot{x}, \ldots, x_n \hat{=} x^{(n-1)}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix}$$

Von der Lsg. von X interessiert ~~wir~~ uns nur $x \hat{=} x_1$

$$x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + A_1\dot{x} + A_0 x = f$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^{(n)} = -A_0 x - A_1\dot{x} - \ldots - A_{n-1}x^{(n-1)} + f$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad \ldots, \quad x_n = x^{(n-1)}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -A_0x - A_1\dot{x} - \ldots - A_{n-1}x^{(n-1)} + f \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{n-2} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} =$$

0 ... $r \times r$-Nullvektor

I ... $r \times r$-Einheitsvektor

$$= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{n-2} & -A_{n-1} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Somit können wir das System wie bereits besprochen lösen.

Bsp.: $\ddot{x} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 18 & -5 \end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -54 & -14 \end{pmatrix} x = 0$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \\ 54 & 14 & -18 & 5 \end{pmatrix} X$$

Eigenwerte:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1-x & 1 \\ 54 & 14 & -18 & 5-x \end{pmatrix} =$$

$$= -x \det \underbrace{\begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 2 & 1-x & 1 \\ 14 & -18 & 5-x \end{pmatrix}}_{\text{Sarrus}} + \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -x & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 54 & 14 & 5-x \end{pmatrix}}_{\text{Sarrus}} =$$

$$= x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$$

HORNER:

1	-6	3	26	-24
1	-5	-2	24	0
1				
-1				
2				
-2	1	-7	12	0

weil vl. doppelte Nullstelle

$$\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = 3, 4$$

Eigenwerte: 4, 3, 1, -2

<u>Eigenvektoren</u> zu 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 54 & 14 & -18 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 18 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{18} & \cancel{9} & \cancel{0} \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zu 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ·

$(e^{4t})' = 4e^{4t}$

zu 3: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(e^{3t})' = 3e^{3t}$

zu -2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$X = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\4\\4\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix} + c_4 e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

also $\quad x(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + c_4 e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

<u>Wichtiger Spezialfall:</u> $r=1$ (1-dim. Fall)

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^{(n)} = -a_0 x - a_1\dot{x} - \ldots - a_{n-1}x^{(n-1)}$$

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \quad x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{pmatrix} X$$

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-x\end{pmatrix}$$

<u>Lemma:</u>

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1\\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 - x\end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n\left(x^n - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j}\, x^j\right)$$

<u>Bew.:</u> Induktion nach n:

$n=1$: $\quad \det(b_1 - x) = b_1 - x = (-1)^1(x - b_1)$

Sei $n > 1$:

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1-x \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{-x \det\begin{pmatrix} -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1-x \end{pmatrix}}_{= (-1)^{n-1}\left(x^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-1-j}\, x^j\right)} + (-1)^{n-1} b_n \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \end{pmatrix}}_{=1} =$$

$$= (-1)^n \underbrace{\left(x^n - \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-1-j}\, x^{j+1}\right)}_{\sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}\, x^j \quad (j+1 \to j)} + \underbrace{(-1)^{n-1} b_n}_{(-1)^n (-\underbrace{b_n}_{b_{n-0}x^0})}$$

$$= (-1)^n \left(x^n - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j}\, x^j\right) \qquad \square$$

Für unser charakteristisches Polynom:

$$p(x) = \det\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-x \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{matrix} \end{array} =$$

$$= (-1)^n \left(x_n - \sum_{j=0}^{n-1} (-a_j)\, x^j\right) = (-1)^n \left(x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right)$$

Wir definieren daher für die DGL $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, x^{(j)} = 0$

das charakteristische Polynom

$$p(x) := x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, x^j$$

Ableitungen durch Potenzen ersetzen

Eigenvektoren

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & -\lambda & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Angenommen die 1. Komponente wäre 0 $\Rightarrow$ $\overset{EV}{\overset{\downarrow}{v}} = 0$

$\Rightarrow$ o.B.d.A. 1. Komponente $= 1$ (weil kann v mit bel. Konst. multiplizieren)

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} = n-1$$

$\Rightarrow$ Jordanblock zu λ hat Größe $=$ algebr. Vielfachheit v. λ

Für die homogene Lösung von $x^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)} = 0$

charakteristische Polynom $p(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = 0$ setzen.

Falls $a \in \mathbb{R}$ eine q-fache Nullstelle (algebr. VF q), dann tritt in der Lösung $\ldots + c_q t^{q-1} e^{at} + c_{q-1} t^{q-2} e^{at} + \ldots + c_1 e^{at} + \ldots$ auf.

Falls $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ und $a + bi$ eine q-fache Nullstelle, dann tritt in der Lösung $\ldots + c_q t^{q-1} e^{at} \cos bt + d_q t^{q-1} e^{at} \sin bt + \ldots$

$\ldots + c_1 e^{at} \cos bt + d_1 e^{at} \sin bt + \ldots$

auf.

Beim Ansatz für die spezielle Lsg. kann man die „homogene Lsg." verplanen.

Bsp.:

$$x^{(15)} - 53\,x^{(14)} + 1264\,x^{(13)} - 17\,384\,x^{(12)} + 145\,089\,x^{(11)} - 659\,861\,x^{(10)} +$$
$$+ 306\,080\,x^{(9)} + 15\,811\,768\,x^{(8)} - 98\,513\,293\,x^{(7)} + 239\,284\,593\,x^{(6)} +$$
$$+ 174\,249\,784\,x^{(5)} - 2\,980\,305\,888\,x^{(4)} + 9\,455\,193\,675\,x^{(3)} +$$
$$- 15\,640\,849\,575\,\ddot{x} + 13\,949\,091\,000\,\dot{x} - 5\,338\,710\,000\,x = 0$$

char. Pol.: $p(x) = x^{15} - 53x^{14} + 1264x^{13} + \dots = 0$

Nullstellen bestimmen:

gleiche VF = 3

$\Rightarrow p(x) = (x-3)^5 (x+4)^2 \left[(x-(7+4i))(x-(7-4i))\right]^3 \cdot \left[(x-(2+i))(x-(2-i))\right]$

→ insges. Grad 15 =

$5+2+2\cdot3+2\cdot1 = 15$

⇒ ✓

allg. Lsg.: $x(t) = c_1 t^4 e^{3t} + c_2 t^3 e^{3t} + c_3 t^2 e^{3t} + c_4 t e^{3t} + c_5 e^{3t} +$

$+ c_6 t e^{-4t} + c_7 e^{-4t} + c_8 t^2 e^{7t} \cos 4t + c_9 t^2 e^{7t} \sin 4t +$

$+ c_{10} t e^{7t} \cos 4t + c_{11} t e^{7t} \sin 4t + c_{12} e^{7t} \cos 4t +$

$+ c_{13} e^{7t} \sin 4t + c_{14} e^{2t} \cos t + c_{15} e^{2t} \sin t$

Bsp.: $\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 0$

$0 = x^2 + x - 12 \qquad -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -4, 3$

$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$

andere Störfkt.

KEINE Nullstelle → nicht erhöhen

Bsp.: $\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 108 t^2 e^{2t}$

homogen ✓

inh.: $x = (\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{2t}$

	$t^2 e^{2t}$	$t e^{2t}$	e^{2t}
x	α_2	α_1	α_0
$\dot{x}$	$2\alpha_2$	$2\alpha_2 + 2\alpha_1$	$\alpha_1 + 2\alpha_0$
$\ddot{x}$	$4\alpha_2$	$8\alpha_2 + 4\alpha_1$	$2\alpha_2 + 4\alpha_1 + 4\alpha_0$
$\ddot{x} + \dot{x} - 12x$	$-6\alpha_2$	$10\alpha_2 - 6\alpha_1$	$2\alpha_2 + 5\alpha_1 - 6\alpha_0$
rechte Seite $108 t^2 e^{2t}$	108	0	0

$\Rightarrow \alpha_2 = -18, \quad \alpha_1 = -30, \quad \alpha_0 = -31$

$x(t) = (-18t^2 - 30t - 31) e^{2t} + x_{homogen}$

Bem.: $\dot{x} = ax \qquad$ char. Pol.: $(\dot{x} - ax = 0) \qquad p(x) = x - a$

Bsp.: $\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 18 t e^{-4t}$ → Nullstelle → erhöhen

$x = (\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t \; (+\alpha_0)) e^{-4t}$

hom. Teil, kann man weglassen

$x(t) = (-7t^2 - 2t) e^{-4t} + x_{homogen}$

Bsp.: $\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 30e^{2t}\sin 3t$

$x = \alpha e^{2t}\cos 3t + \beta e^{2t}\sin 3t$

$x(t) = -e^{2t}\cos 3t - e^{2t}\sin 3t + \overbrace{x_{homogen}}^{c_1e^{-4t}+c_2e^{3t}}$

$x(0) = 6, \quad \dot{x}(0) = 2$

$6 = x(0) = -1 + 0 + c_1 + c_2$

$\dot{x} = -5e^{2t}\cos 3t + e^{2t}\sin 3t - 4c_1e^{-4t} + 3c_2e^{3t}$

$2 = \dot{x}(0) = -5 + 0 - 4c_1 + 3c_2$

$x(t) = -e^{2t}\cos 3t - e^{2t}\sin 3t + 2e^{-4t} + 5e^{3t}$

21.11.2011

Skriptum → Internet !

5) Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

I ... Intervall

I° ... Innere $\quad ([a,b]^\circ = (a,b)^\circ = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b))$

$D \subseteq \mathbb{R}^r \qquad f: D \times I \to \mathbb{R}^r \qquad \dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = x_0$

Prop: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^r$ (nicht leer), $t_0 \in I^\circ$ und $x_0 \in D$, $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$ stetig dann ist eine Funktion $x: I \to \mathbb{R}^r$ genau dann Lösung von der DGL $\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$
(x stetig und diff.b. auf I° und $\forall t \in I^\circ$: $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$)
wenn x Lösung der Integralgleichung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$ ist.

Bew.:

Hauptsatz

$(\Rightarrow)$: $\dot x$ ist stetig weil f und x stetig sind

$$\int_{t_0}^{t} \underbrace{f(x(s),s)}_{\dot x(s)}\, ds \overset{HS}{=} x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{x_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\, ds$$

weil f stetig

$$(\Leftarrow): \quad \dot x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\, ds\right)^{\cdot} \overset{HS}{=} 0 + f(x(t),t) = f(x(t),t)$$ erfüllt DGL

$$x(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(x(s),s)\, ds}_{0} = x_0$$

□

Def.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $D \subseteq \mathbb{R}^r$, $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion ($f(x,t)$).

(1) f heißt Lipschitz-stetig in x falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall t \in I,\ \forall x,y \in D$:

$|f(x,t) - f(y,t)| \le L|x-y|$

(L ... Lipschitz-Konstante, man kann stets $L > 0$ annehmen)

(2) f heißt lokal Lipschitz-stetig in x, falls $\forall x,t \in D \times I$ $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}^r$, $V \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $x \in U$, $t \in V$, so dass $f|_{U \times V}$ Lipschitz-stetig in x ist.

abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius R (bowl)

Prop.: Sei $I = [a,b]$, $D = \underbrace{\overline{B}(x_0,R)}_{= \{y : |y - x_0| \le R\}}$ $(\subseteq \mathbb{R}^r)$ Abstand

$f: D \times I \to \mathbb{R}^r$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x.

Dann ist f Lipschitz-stetig in f.

indirekt

Bew.:

wenn $x = y \Rightarrow 0 \ge 0$, erfüllt ✓

1. Schritt: **Beh.:** Falls $x \neq y$ so sind, dass

$$|f(x,t) - f(y,t)| \ge L|x-y|,$$

dann gibt es $\forall \varepsilon > 0 \quad x_\varepsilon \neq y_\varepsilon \in D \quad \exists t_0 \in I$

mit $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon$ und $|f(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - f(y_\varepsilon, t_\varepsilon)| \geq L|x_\varepsilon - y_\varepsilon|$

Bew. d. Beh.: Sei $A = \{ u \in (0,1) \quad |f(x + u(y-x), t) - f(x,t)|$

$\geq L|(x + u(y-x)) - x| \geq L u |y-x| \}$

$1 \in A \Rightarrow A \neq \overset{\text{leere Menge}}{\emptyset}$, A ist nach unten beschr.

$\Rightarrow \exists u_0 \in \mathbb{R}$ mit $u_0 = \overset{\text{infimum (d. Elemente in A)}}{\inf A}$

1. Fall: $u_0 = 0$: $\exists u \in A$ mit $u < \frac{\varepsilon}{|y-x|}$

Setze $y_\varepsilon = x + u(y-x)$, $x_\varepsilon = x$

$$\Rightarrow |y_\varepsilon - x_\varepsilon| = \underbrace{u}_{< \frac{\varepsilon}{|y-x|}} |y-x| < \varepsilon$$

$$|f(y_\varepsilon, t) - f(x_\varepsilon, t)| =$$
$$= |f(x + u(y-x), t) - f(x,t)| \geq$$
$$\geq \underbrace{L u |y-x|}_{|y_\varepsilon - x_\varepsilon|} = L|y_\varepsilon - x_\varepsilon|$$

2. Fall: $u_0 > 0$: $\exists u_1 \in A$ mit $u_0 \leq u_1 < u_0 + \frac{\varepsilon}{|y-x|}$

Setze $y_\varepsilon = x + u_1(y-x)$

$\Rightarrow u_1 - \frac{\varepsilon}{|y-x|} < u_0$

gibt viele — Mittelwert ist eine davon

$\exists u_2$ mit $u_1 - \frac{\varepsilon}{|y-x|} < u_2 < u_0$

Setze $x_\varepsilon = x + u_2(y-x)$

$$\underbrace{|y_\varepsilon - x_\varepsilon|}_{= \underbrace{(u_1 - u_2)}_{> 0}(y-x)} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{< \frac{\varepsilon}{|y-x|}} |y-x| < \varepsilon$$

$$|f(\underbrace{y_\varepsilon}_{x+u_1(y-x)}, t) - f(\underbrace{x_\varepsilon}_{x+u_2(y-x)}, t)| \geq$$

$$\geq \underbrace{|f(x+u_1(y-x), t) - f(x,t)|}_{\substack{\geq L u_1 |y-x| \\ (\text{weil } u_1 \in A)}} - \underbrace{|f(x,t) - f(x+u_2(y-x))|}_{\substack{u_2 \notin A \text{ weil } < \inf A \\ \leq L u_1 |y-x|}}$$

$$\geq L u_1 |y-x| - L u_2 |y-x| = L \underbrace{(u_1-u_2)\,|y-x|}_{= y_\varepsilon - x_\varepsilon}$$

$\square$

__2. Schritt__: Ang. f nicht Lipschitz-stetig in x

$\Longrightarrow \forall n\ \exists\ t_n, x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und

$|f(x_n,t_n) - f(y_n,t_n)| \geq n\,|x_n - y_n|$

$D \times I \subseteq \mathbb{R}^r$ ist abgeschlossen und beschränkt

$\Longrightarrow D\times I$ ist kompakt ($\Longrightarrow$ folgenkompakt)

$\Longrightarrow \exists\ x_0 \in D,\ t_0 \in I$ und $\exists$ Teilfolge (x_{n_k}, t_{n_k}) von (x_n, t_n) mit $x_{n_k} \to x_0$, $t_{n_k} \to t_0$

$$y_{n_k} = \underbrace{x_{n_k}}_{\to x_0} + \underbrace{(y_{n_k} - x_{n_k})}_{\to 0} \to x_0$$

f lokal Lipschitz-stetig in $x \Longrightarrow \exists\ U, V$ offen, $x_0 \in U$, $t_0 \in V$, $\exists L$: $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L\,|x-y|$ $\forall\ x,y \in U, t \in V$

$\exists\ n_k > L$ mit $x_{n_k} \in U$, $t_{n_k} \in V$

$$L\,|x_{n_k} - y_{n_k}| \geq |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(y_{n_k}, t_{n_k})| \geq \underbrace{n_k}_{> L}\,|x_{n_k} - y_{n_k}| >$$

$> L\,|x_{n_k} - y_{n_k}|$ WID.!

Also ist f Lipschitz-stetig in x.

$\square$

__Prop.__: Sei $D = \overline{B}(x_0, R)$, $I = [a,b]$, $D_0 \supseteq D$ (Obermenge) offen, $I_0 \supseteq [a,b]$ [$\mapsto \neq I^\circ$] offen, $f: D_0 \times I_0 \to \mathbb{R}^r$ C^1 (stetig diffb.).

Dann ist f Lipschitz-stetig auf $D \times [a,b]$.

__falscher Bew.__: MWS (→ Mittelwertsatz): $\underbrace{|f(x,t) - f(y,s)|}_{= df_{(\xi)}((x,t)-(y,s))} \leq L\,|(x,t) - (y,s)|$

ABER im Mehrdimensionalen gibt es MWS NICHT in dieser Form! → FALSCH aber Beweisidee für Bew.

Bew.: Setze $L = r \max \left\{ \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x,t) \right| \quad (x,t) \in \underbrace{D \times [a,b]}_{\text{kompakt}} \right.$

verwende Satz vom Min. und Max.

Sei $j \in \{1, \dots, r\}$. Seien $x, y \in D$, $s,t \in [a,b]$.

Setze $g(u) = f_j(x + u(y-x), t + u(s-t))$

$g: [0,1] \to \mathbb{R} \overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in [0,1]$ mit

$f_j(y,s) - f_j(x,t) = g(1) - g(0) = \dot{g}(\xi) \underbrace{(1-0)}_{1} =$ Kettenregel

mehrdim. Abl.

$= \underbrace{df_j}_{\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_j}{\partial x_r} \cdot \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial t}}_{\frac{\partial f_j}{\partial x_{r+1}}}\right)} \cdot \begin{pmatrix} y-x \\ s-t \end{pmatrix} \Rightarrow |f_j(y,s) - f_j(x,t)| \leq \frac{L}{r} |(y,s) - (x,t)|$

$$|f(y,s) - f(x,t)| = \sqrt{\underbrace{\sum_{j=1}^{r} \underbrace{|f_j(y,s) - f_j(x,t)|^2}_{\leq \frac{L^2}{r^2} |(y,s)-(x,t)|^2}}_{\leq \frac{L^2}{r} |\dots|^2 \leq L^2 |\dots|^2}} \leq$$

$\leq L |(y,s) - (x,t)|$

$\square$

PRÜFUNG: $\not\!/.$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von PICARD und LINDELÖF

SATZ: Seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^r$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a,b > 0$,

$f: \overline{B}(x_0, \overset{\text{Radius}}{b}) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Weiters sei $M > 0$ so dass $|f(x,t)| \leq M$ $\forall x \in \overline{B}(x_0, b)$, $\forall b \in [t_0 - a, t_0 + a]$.

Setze $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

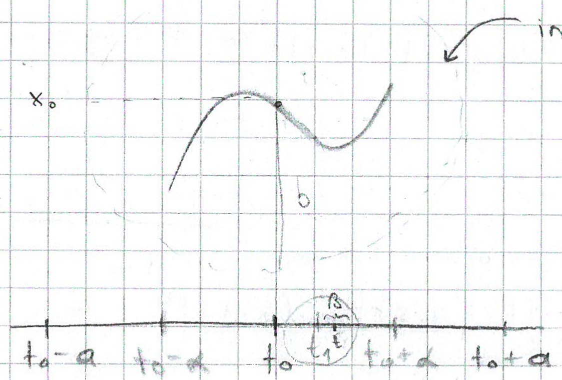
Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $x: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ $\forall t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. also eindeutige Lsg.

$\times$

Weiters gilt $|x(t) - x_0| \leq M \cdot |t - t_0| \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Insbesondere $\Rightarrow x(t) \in \overline{B}(x_0, b) \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Prüfung: SATZ erklären: Vor. en: Fkt. muss stetig + lok.-L.-stetig sein
$\Rightarrow$ dann gibt es $\forall$ (lokal) eine eind. best. e Lsg.; kann auch angeben, wie weit Lsg. geht;
(nicht Details erzählen)



Bew.: f lokal Lipschitz-stetig in $x \Rightarrow f$ ist Lip.-stetig in x
mit Lipschitz-Konstante $L > 0$
$(|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|)$

28.11.2011

$|f(x,t)| \leq M$

1. Schritt: Sei $t_1 \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ und $x_1 \in \mathbb{R}^r$ so, dass
$|x_1 - x_0| \leq M|t_1 - t_0|$.
Wähle $\beta = \min\{a, \frac{b}{M}, \alpha - |t_1 - t_0|, \frac{1}{2L}\}$. *
Definiere $\mathcal{A} = C([t_1 - \beta, t_1 + \beta], \overline{B}(x_1, b - M|t_1 - t_0|); x(t_1) = x_1)$
$\hookrightarrow$ Menge d. stetigen Funktionen (continuous)

$\mathcal{A}$ ist bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ein vollst. metrischer Raum.
Für $x \in \mathcal{A}$ definiere $Tx(t) := x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s), s)\, ds$
für $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$

Mengen, bei denen man einen Abstand zw. 2 Elementen bestimmen kann

Beh.: (1) $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

(2) $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}: \overbrace{\| Tx_1 - Tx_2 \|_\infty}^{\text{Abstand}} \le \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \|_\infty$

d.h. T ist Kontraktion mit Kontraktionskonstante 1/2

↳ zieht Menge bei mehrfacher Anwendung in sich zusammen, weil verringert Abstände zw. 2 Pkt. in d. Menge bel.

(3) $\forall t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]: |Tx(t) - x_1| \le M|t - t_1|$

Bew. d. Beh.: Sei $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$

$$|Tx(t) - x_1| = \left| \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds \right| \le \left| \int_{t_1}^{t} \underbrace{|f(x(s),s)|}_{\le M}\,ds \right| \le M|t - t_1|. \quad (3) ✓$$

$$Tx(t_1) = x_1 + \int_{t_1}^{t_1} \ldots$$

Für $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$: $|Tx(t) - x_1| \le M\underbrace{|t - t_1|}_{\le \beta \overset{*}{\le} \alpha - |t_1 - t_0|} \le M\underbrace{\alpha}_{\le \frac{b}{M}} - M|t_1 - t_0| \le$ $\quad \alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

$\le b - M|t_1 - t_0|$, also $Tx \in \mathcal{A}$. (1) ✓

Seien $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Sei $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$.

$$|Tx_1(t) - Tx_2(t)| = \left| \int_{t_1}^{t} f(x_1(s),s) - f(x_2(s),s)\,ds \right| \le$$

(x_1 fällt weg)

$$\le \left| \int_{t_1}^{t} \underbrace{|f(x_1(s),s) - f(x_2(s),s)|}_{\le L \underbrace{|x_1(s) - x_2(s)|}_{\le \|x_1 - x_2\|_\infty}}\,ds \right| \le L \underbrace{|t - t_1|}_{\le \beta \overset{*}{\le} \frac{1}{2L}} \|x_1 - x_2\|_\infty \le$$

gesen wir dazu (pos.)

wegen Lipschitz-stetigkeit

gilt für bel. t → also auch für Supremum

(für jeden $|\;|$, daher auch für größten)

$\le \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty \Rightarrow \|Tx_1 - Tx_2\|_\infty = \sup\limits_{t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]} |Tx_1(t) - Tx_2(t)| \le$

(2) ✓

$\le \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty$ ◊

2. Schritt:

Beh.: $t_1 \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, x_1 so, dass $|x_1 - x_0| \le M|t_1 - t_0|$,

$\beta := \min\{\alpha - |t_1 - t_0|, \frac{1}{2L}\}$. Dann besitzt $x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[t_1 - \beta, t_1 + \beta]$.

Bew. d. Beh.: $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ und ist Kontraktion

↳ vollst. metrischer Raum

eine Kontraktion $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ besitzt genau einen Fixpunkt ($x \in \mathcal{A}$ mit $Tx = x$)

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz $\exists!\, x \in \mathcal{A}$ mit $Tx = x$.

$\Rightarrow x(t) = Tx(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds$ → x ist eine Lsg. von Integralgl.

(↳ Proposition 1: ist auch Lsg. d. DGL)

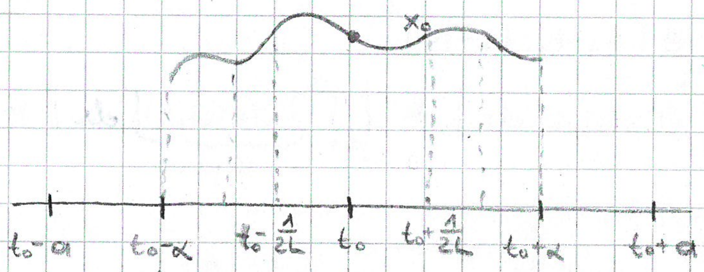
Eindeutigkeit:

Sei $y(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(y(s),s)\,ds \quad \forall t \in [t_1-\beta, t_1+\beta]$.

$\Rightarrow y \in \mathcal{A}$ und $Ty(t) = y(t)$, also $Ty = y \Rightarrow y = x$. ◇

3. Schritt:

Lsg. auf immer größer werdende Intervalle ausgedehnt



komme nur so weit

gehe immer weiter, bis ganzes Intervall $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ komme

Sei $k \in \mathbb{N}$ minimal mit $k\frac{1}{2L} \geq \alpha$.

(*) $\beta_1 = \alpha_1$

Für $j \in \{1,2,\dots,k-1\}$ setze $\beta_j := \frac{1}{2L}$ und $\alpha_j := j\frac{1}{2L}$,

$\beta_k := \alpha - (k-1)\frac{1}{2L}$ und $\alpha_k := \alpha$ Abstände

Beh.: Für $j \in \{1,2,\dots,k\}$, $\exists$ Lösung x von $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$ auf $[t_0-\alpha_j, t_0+\alpha_j]$.

Bew. d. Beh.: Induktion:

$j=1$: nach dem 2. Schritt $\exists$ Lsg. von $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$

≙ β von vorher

auf $[t_0-\underbrace{\alpha_1}_{=\beta_1\ (*)}, t_0+\alpha_1]$

IS

Sei $j>1$: $\exists$ Lsg. x_{j-1} von $\boxed{x_{j-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_{j-1}(s),s)\,ds}$ auf $[t_0-\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_{j-1}]$.

wollen zeigen, dass gilt für $x_j(t)$

nach dem 2. Schritt $\exists$ Lsg u_1 von

$$u_1(t) = x_{j-1}(t_0+\alpha_{j-1}) + \int_{t_0+\alpha_{j-1}}^{t} f(u_1(s),s)\,ds$$

auf $[t_0+\alpha_{j-1}-\beta_j, t_0+\underbrace{\alpha_{j-1}+\beta_j}_{\alpha_j}]$ und

$\alpha_{j-1}+\beta_j = (j-1)\frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} = j\frac{1}{2L} = \alpha_j$

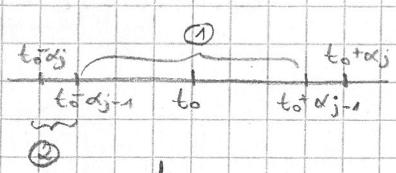
$\exists$ Lsg. u_2 von $u_2(t) = x_{j-1}(t_0-\alpha_{j-1}) + \int_{t_0-\alpha_{j-1}}^{t} f(u_2(s),s)\,ds$

auf $[t_0-(\underbrace{\alpha_{j-1}+\beta_j}_{=\alpha_j}),\ t_0-\alpha_{j-1}+\beta_j]$

3 Lsg.en für
3 versch. Intervalle

Setze $x_j(t) = \begin{cases} x_{j-1}(t) & \text{für } t\in[t_0-\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_{j-1}] \\ u_1(t) & \text{für } t\in(t_0+\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_j) \text{ oder } [\ ] \\ u_2(t) & \text{für } t\in(t_0-\alpha_j, t_0-\alpha_{j-1}) \end{cases}$

Sei $t\in[t_0-\alpha_j, t_0+\alpha_j]$



1\. Fall: $t\in[t_0-\alpha_{j-1}, t_0+\alpha_{j-1}]$:

$$x_j(t) = x_{j-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\underbrace{x_{j-1}(s)}_{=x_j},s)\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_j(s),s)\,ds$$

$$|\dots| \le |\int|\dots|\,ds| \le M|t-t_0|$$

$$|x_j(t)-x_0| \le M|t-t_0| \quad \text{(siehe Vereinfachung in Schritt 1)}$$

2\. Fall: $t\in[t_0-\alpha_j, t_0-\alpha_{j-1}]$:

$$x_j(t) = u_2(t) = \underbrace{x_{j-1}(t_0-\alpha_{j-1})}_{x_0+\int_{t_0}^{t_0-\alpha_{j-1}}} + \int_{t_0-\alpha_{j-1}}^{t} f(\underbrace{u_2(s)}_{=x_j},s)\,ds =$$

Schritt 2: wenn $|x_1-x_0|\le M|t_1-t_0|$, dann besitzt Integralgleichung auf jeweiligem Intervall eindeutig bestimmte Lösung

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\underbrace{x_{j-1}}_{=x_j}(s),s)\,ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{\boxed{t_0-\alpha_{j-1}}} f(x_j(s),s)\,ds + \int_{\boxed{t_0-\alpha_{j-1}}}^{t} f(x_j(s),s)\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_j(s),s)\,ds$$

$\rightarrow$ auch auf diesem Intervall ist Integralgl. erfüllt

$$|x_j(t)-x_0| \le \underbrace{|x_j(t)-x_j(t_0-\alpha_{j-1})|}_{\le M|\underbrace{t-(t_0-\alpha_{j-1})}_{-t+(t_0-\alpha_{j-1})}|} + \underbrace{|x_j(t_0-\alpha_{j-1})-x_0|}_{\le M\underbrace{|\cancel{t_0}-\alpha_{j-1}-\cancel{t_0}|}_{M\alpha_{j-1}}} \le$$

Δ-Ungl.

$$\le -Mt+Mt_0-\cancel{M\alpha_{j-1}}+\cancel{M\alpha_{j-1}} = M\underbrace{(t_0-t)}_{|t_0-t|=|t-t_0|} = M|t-t_0| \quad \diamond$$

1.–3. Schritt: Integralgl. hat Lösung

4\. Schritt:

Existenz: Nach dem 3. Schritt $\exists$ Lösung $x:[t_0-\alpha, t_0+\alpha]\to\mathbb{R}^r$

von $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds \quad (j=k)$ und es gilt

x Lsg. von $\dot{x} = f(x,t) \Longleftrightarrow x$ Lsg. von $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$

(mit Hauptsatz bewiesen)

$$|x(t) - x_0| \leq M|t-t_0| \xRightarrow{\text{1. Prop.}} \dot{x}(t) = f(x(t),t) \quad \forall t \in (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$$

Eindeutigkeit: Indirekt ang.: $\exists\, x,y : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^r$ stetig,

$\dot{x}(t) = f(x(t),t)$, $\dot{y}(t) = f(y(t),t)$ $\forall t \in (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$,

$x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ und $x \neq y$.

(2 Funktionen verschieden)

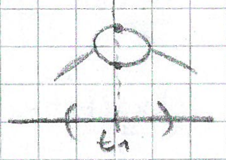
$\exists t$ mit $x(t) \neq y(t)$. Es kann $t < t_0$ oder $t > t_0$ gelten.

O.B.d.A. können wir $t > t_0$ annehmen. ($t < t_0$ analog)

$$t_1 := \inf \underbrace{\{t \in (t_0, t_0+\alpha] : x(t) \neq y(t)\}}_{\neq \emptyset \text{ weil gibt Element } t \text{ und nach unten beschränkt}} \geq t_0$$

(hat also inf)

Beh.: $x(t_1) = y(t_1)$ behaupten, dass es so ein t_1 nicht gibt



Bew. d. Beh.: ind. ang.: $x(t_1) \neq y(t_1)$

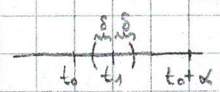
Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}|x(t_1) - y(t_1)| > 0$

Funktionswerte liegen nahe beieinander

$\exists\, \delta > 0 : \forall t \in (t_1-\delta, t_1+\delta) : |x(t) - x(t_1)| < \varepsilon$,
$|y(t) - y(t_1)| < \varepsilon$

Wähle t so, dass $\max\{t_0, t_1-\delta\} < t < t_1$.

$$2\varepsilon = |x(t_1) \underbrace{\;}_{-x(t)+x(t)} - y(t_1)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x(t_1) - x(t)| + |\underbrace{x(t)}_{=y(t)} - y(t_1)| =$$



$$= \underbrace{|x(t_1) - x(t)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|y(t) - y(t_1)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon \quad \text{WID.!}$$

Also $x(t_1) = y(t_1)$ $\diamond$

Insbes. $t_1 < t_0 + \alpha$

Setze $x_1 := x(t_1)$ $(= y(t_1))$ und $\beta := \min\{\alpha - |t_1 - t_0|, \frac{1}{2L}\} > 0$

Nach dem 2. Schritt $\exists!\, u : [t_1-\beta, t_1+\beta]$ Lsg. von

$$u(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(u(s),s)\,ds.$$

Weil x,y Lösungen d. DGL $\xRightarrow{\text{1. Prop.}}$ $x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s),s)\,ds$

auch Lsg.en d. Int. gl.

und $y(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(y(s),s)\,ds$.

$\Rightarrow \forall t \in [t_1-\beta, t_1+\beta]$ gilt $x(t) = y(t)$

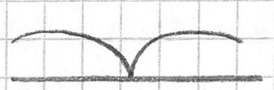
Nach der Def. von t_1 $\exists\, t \in (t_1, t_1+\delta)$ mit $x(t) \neq y(t)$.

$\Rightarrow$ WID.! Also ist die Lösung eindeutig. $\square$

↳ wegen Stetigkeit d. Lsgen gibt es Umgebung, wo Fkt.swerte noch unterschiedlich

Prop.: $\dot{x} = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$

Dann sind 0 und t^3 Lösungen.



$3x^{2/3}$ ist nicht Lipschitz-stetig.

↳ weil sonst hätte DGL eine eindeutige Lsg. (hat aber 2 —)

5.12.2011

Existenzsatz von Peano

Satz: f stetig $\Rightarrow$ $\exists$ lokal eine Lösung von

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$$

Bew.skizze: Stone-Weierstraß $\Rightarrow \exists\, (f_n)$ Lipschitz-stetig mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Picard-Lindelöf $\Rightarrow \exists$ lokal (eindeutige) Lsg. von $\dot{x}_n = f(x_n, t)$, $x_n(t_0) = x_0$

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen, beschränkt, gl.m. stetig

$\left(x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(x_n(s), s)\, ds \right)$

$\Rightarrow$ Menge kompakt ($\Rightarrow$ folgenkompakt) ↱ jede Folge hat konv. Teilfolge

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x$

$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds$

$\Rightarrow \dot{x} = f(x,t)$ $\square$

6. Elementare Lösungsmethoden

1. Trennung der Variablen

Die DGL lässt sich auf die Form

(*) $f_1(x)\dot{x} = f_2(t)$ bringen.

Es sei F_1 eine Stammfunktion von f_1 ($F_1'(x) = f_1(x)$)

und F_2 eine Stammfunktion von f_2 ($F_2'(t) = f_2(t)$).

Die Lösung (in impliziter Form) ist durch

$F_1(x(t)) = F_2(t) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

<u>Bew.</u>: $(F_1(x(t)))^{\cdot} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{F_1'}_{f_1}(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = f_1(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$

$\Rightarrow \quad f_1(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = (\underbrace{F_1(x(t))}_{F_2(t)+c})^{\cdot} = \dot{F_2}(t) + 0 = f_2(t)$ → erfüllt DGL (*)

□

<u>Bsp.</u>: $\dot{x} = 8t^3 e^x \iff e^{-x}\dot{x} = 8t^3$

$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}, \quad \int 8t^3\,dt = 2t^4$

$-e^{-x} = 2t^4 + \tilde{c} \iff e^{-x} = -2t^4 - \tilde{c} = -2t^4 + \hat{c}$

$\iff -x = \log(\hat{c} - 2t^4) \iff x(t) = -\log(\overset{\text{egal}}{\hat{c}} - 2t^4)$

Formale Schreibweise:

$e^{-x}\underbrace{\dot{x}}_{\frac{dx}{dt}} = 8t^3$ „$\iff e^{-x}\,dx = 8t^3\,dt$" ...

↳ darf man eig. nicht, aber egal, weil wollen beweisen, dass es so funktioniert

Existenzsatz von Peano überprüfen

<u>Bsp.</u>: – " – , $x(0) = \log 3$, stetig diff.bar

$f(x,t) = 8t^3 e^x \quad C^1 \Rightarrow$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x

→ lokal ∃ eindeutig bestimmte Lsg.

Der Existenzsatz von Giuseppe Peano

Vorraussetzung für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf ist die Stetigkeit und die lokale Lipschitz-Stetigkeit in x der Funktion f. Unter der einfacheren, aber schwächeren Annahme, dass f stetig ist, erhält man immer noch die Existenz von lokalen Lösungen. Allerdings muss diese Lösung nicht mehr eindeutig sein. Dies zeigt das Beispiel der Differenzialgleichung $\dot{x}(t) = 3x(t)^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = 0$. Hier ist die Funktion $3x^{\frac{2}{3}}$ stetig, und sowohl $x(t) := 0$, als auch $x(t) := t^3$ sind Lösungen dieser Differenzialgleichung. Jetzt formulieren und beweisen wir den *Existenzsatz von Peano.*

Satz 1. *Es seien $r \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^r$ und $a, b, M \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $M > 0$. Weiters sei $f : \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ eine stetige Funktion, die $\left|f(x,t)\right| \leq M$ für alle $(x,t) \in \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$ erfüllt. Setze $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Dann gibt es eine stetige Funktion $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x(t_0) = x_0$, die $\dot{x}(t) = f\big(x(t), t\big)$ für alle $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ erfüllt. Außerdem gilt $\left|x(t) - x_0\right| \leq M|t - t_0|$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, insbesondere ist $x(t) \in \overline{B}(x_0, b)$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Beweis. Wegen einer Folgerung aus dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lipschitz-stetige Funktion $f_n : \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ mit $\left|f_n(x,t)\right| \leq M$ für alle $(x,t) \in \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$, sodass $\|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{n}$ gilt. Da f_n Lipschitz-stetig ist, ist f_n stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Deshalb gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $x_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x_n(t_0) = x_0$ und $\dot{x}_n(t) = f_n\big(x_n(t), t\big)$ für alle $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, und diese Funktion erfüllt $|x_n(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Nachdem $\dot{x}_n(t) = f_n\big(x_n(t), t\big)$ gilt, folgt aus einer Proposition (die mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen wurde), dass $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n\big(x_n(s), s\big)\, ds$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gilt.

Definiere $\mathcal{F}$ als den Abschluss von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\big(C\big([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^r\big), \|.\|\big)$, also $\mathcal{F} := \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Da $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ kompakt. Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen. Wir werden jetzt zeigen, dass $\mathcal{F}$ auch beschränkt und gleichgradig stetig ist. Es sei $y \in \mathcal{F}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n mit $\|y - x_n\|_\infty < \varepsilon$. Wegen $|y(t)| - |x_n(t)| \leq |y(t) - x_n(t)| \leq \|y - x_n\|_\infty < \varepsilon$ und

$$|x_n(t)| - |x_0| \leq |x_n(t) - x_0| \leq M\underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha} \leq M\alpha$$

erhält man $|y(t)| \leq |x_n(t)| + \varepsilon \leq |x_0| + M\alpha + \varepsilon$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Somit ist auch $\|y\|_\infty \leq |x_0| + M\alpha + \varepsilon$, und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist

$\|y\|_\infty \leq |x_0| + M\alpha$. Es gilt also $\|y\|_\infty \leq |x_0| + M\alpha$ für jedes $y \in \mathcal{F}$, wodurch die Beschränktheit von $\mathcal{F}$ gezeigt ist.

Jetzt sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{3M}$. Dann ist $\delta > 0$. Es seien $t_1, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ so, dass $|t_1 - t_2| < \delta$. Weiters sei $y \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann gibt es ein n mit $\|y - x_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Wir erhalten

$$\Big| \underbrace{x_n(t_1)}_{=x_0+\int_{t_0}^{t_1} f_n\left(x_n(s),s\right)\,ds} - \underbrace{x_n(t_2)}_{=x_0+\int_{t_0}^{t_2} f_n\left(x_n(s),s\right)\,ds} \Big| = \left| \int_{t_2}^{t_1} f_n\big(x_n(s), s\big)\,ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_2}^{t_1} \underbrace{|f_n(x_n(s), s)|}_{\leq M}\,ds \right| \leq M \underbrace{|t_1 - t_2|}_{<\delta = \frac{\varepsilon}{3M}} < M\frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Deswegen ist

$$\big|y(t_1) - y(t_2)\big| \leq \underbrace{\big|y(t_1) - x_n(t_1)\big|}_{\leq \|y - x_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\big|x_n(t_1) - x_n(t_2)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\big|x_n(t_2) - y(t_2)\big|}_{\leq \|y - x_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Daher ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

Die Menge $\mathcal{F}$ ist somit eine beschränkte, abgeschlossene und gleichgradig stetige Teilmenge von $\big(C\big([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^r\big), \|.\|\big)$, wobei $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ein kompakter metrischer Raum ist. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\mathcal{F}$ daher kompakt, und auch folgenkompakt. Nachdem (x_n) eine Folge in $\mathcal{F}$ ist und $\mathcal{F}$ folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x \in \mathcal{F}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x\|_\infty = 0$ (weil es eine andere Teilfolge geben könnte, die gegen ein anderes Element von $\mathcal{F}$ konvergiert, erhält man nicht mehr die Eindeutigkeit der Lösung).

Sei $\varepsilon > 0$. Es ist $\overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{r+1}$, und deshalb ist sie kompakt. Daher ist die stetige Funktion f auch gleichmäßig stetig. Somit gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\big|f(y_1, t) - f(y_2, t)\big| < \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$ für alle $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ und alle $y_1, y_2 \in \overline{B}(x_0, b)$ mit $|y_1 - y_2| < \delta$. Dann gibt es ein k, sodass $\|x_{n_k} - x\|_\infty < \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\right\}$ und $\|f_{n_k} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$. Für jedes $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ist dann wegen $\big|x_{n_k}(s) - x(s)\big| \leq \|x_{n_k} - x\|_\infty < \delta$ die Eigenschaft $\big|f\big(x_{n_k}(s), s\big) - f\big(x(s), s\big)\big| < \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$ erfüllt. Jetzt sei $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ beliebig. Man erhält somit

$$\left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\big|f\big(x(s), s\big) - f\big(x_{n_k}(s), s\big)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}}\,ds \right| \leq \underbrace{\left| \int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\,ds \right|}_{=\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha}} \leq \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\,.$$

Weiters gilt auch

$$\left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{\left|f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x_{n_k}(s),s\big)\right|}_{\le\|f_{n_k}-f\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} ds\right| \le \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\,ds\right|}_{=\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\underbrace{|t-t_0|}_{\le\alpha}} \le \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1},$$

woraus wir

$$\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x(s),s\big)\Big)\,ds\right| \le$$

$$\le \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x_{n_k}(s),s\big)\Big)\,ds\right|}_{\le|\int_{t_0}^{t}|f_{n_k}(x_{n_k}(s),s)-f(x_{n_k}(s),s)|\,ds|\le\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} +$$

$$+\underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x(s),s\big)\Big)\,ds\right|}_{\le|\int_{t_0}^{t}|f(x_{n_k}(s),s)-f(x(s),s)|\,ds|\le\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} \le \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}+\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}=2\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$$

erhalten. Daraus ergibt sich

$$\left|x(t)-\left(x_0+\int_{t_0}^{t}f\big(x(s),s\big)\,ds\right)\right| \le$$

$$\le \underbrace{|x(t)-x_{n_k}(t)|}_{\le\|x_{n_k}-x\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} + \left| \underbrace{x_{n_k}(t)}_{=x_0+\int_{t_0}^{t}f_{n_k}(x_{n_k}(s),s)\,ds} - \left(x_0+\int_{t_0}^{t}f\big(x(s),s\big)\,ds\right)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\alpha+1} + \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x(s),s\big)\Big)\,ds\right|}_{\le 2\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}+2\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}=\varepsilon\,.$$

Weil $\varepsilon>0$ beliebig war, muss $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f\big(x(s),s\big)\,ds$ für jedes $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ gelten. Aus einer Proposition (die mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen wurde) folgt, dass $\dot{x}(t)=f\big(x(t),t\big)$ für alle $t\in(t_0-\alpha,t_0+\alpha)$ gilt.

Damit ist die Existenz einer Lösung gezeigt. Für ein beliebiges $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ gilt $x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}f(x(s),s)\,ds$ wegen $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(s),s)\,ds$, und daher

$$|x(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(x(s),s)\,ds\right| \le \left|\int_{t_0}^{t}\underbrace{|f(x(s),s)|}_{\le M}\,ds\right| \le M|t-t_0|\,.$$

Somit haben wir auch die gewünschte Abschätzung für diese Lösung gezeigt. Wegen

$$|x(t) - x_0| \leq M \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha \leq \frac{b}{M}} \leq M \frac{b}{M} = b$$

erhalten wir schließlich auch $x(t) \in \overline{B}(x_0, b)$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, womit der Beweis beendet ist. $\square$

$a = 1,\ b = \frac{1}{2}$ gewählt

$$\underbrace{[\underset{x_0 - b}{\log 3 - \tfrac{1}{2}},\ \underset{x_0 + b}{\log 3 + \tfrac{1}{2}}]}_{\text{abgeschl. Kugel mit Radius } b \text{ um } x_0} \times [\underset{\substack{x_0 - a \\ (2)}}{-1},\ \underset{\substack{x_0 + a \\ (2)}}{1}]$$

$M = 100$ gewählt

$$\alpha = \min\{\underbrace{a}_{1}, \underbrace{\tfrac{b}{M}}_{\frac{1}{200}}\} = \frac{1}{200}$$

eindeutig best. Lsg. $x : [-\frac{1}{200}, \frac{1}{200}] \to \mathbb{R}$

$x(t) = -\log(c - 2t^4)$

$\log 3 = x(0) = -\log c \implies \log c = -\log 3 = \log \frac{1}{3}$

$\implies c = 1/3$

$x(t) = -\log(\frac{1}{3} - 2t^4)$

wie weit ist das Lsg.?

ist eindeutige Lösung bis zu dem Punkt, wo

$\frac{1}{3} - 2t^4 = 0$ wird $\implies$ bis $t = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$,

also $x : (-\sqrt[4]{\frac{1}{6}}, \underbrace{\sqrt[4]{\frac{1}{6}}}_{0{,}6389431042 5})$

<u>Bsp.:</u> $\dot{x} = \frac{x \cos t}{1 + x^2}$, $x(0) = 1$

$f(x, t) = \frac{x \cos t}{1 + x^2}$ ist $C^1 \implies$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x

$\xrightarrow{EEPL}$ lokal $\exists!$ Lsg.

$(\frac{1}{x} + x)\, dx = \cos t\, dt$

$\int (\frac{1}{x} + x)\, dx = \log|x| + \frac{x^2}{2}$, $\int (\cos t)\, dt = \sin t$

$\log|x| + \frac{x^2}{2} = \sin t + c$

0 einsetzen: $\underbrace{0}_{\log 1} + \frac{1}{2} = 0 + c \implies \log|x| + \frac{x^2}{2} = \sin t + \frac{1}{2}$

$$\underbrace{2\log|x|}_{\log x^2} + x^2 = 2\sin t + 1$$

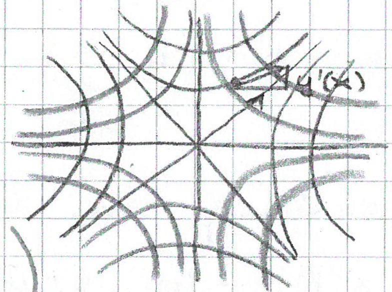
NICHT zur PRÜFUNG!

Orthogonale Trajektorien: ← eine Anwendung

Kurvenschar in $\mathbb{R}^2$; sucht diejenige Kurvenschar, die in jedem Punkt senkrecht darauf steht

Bsp.: $x^2 - y^2 = c$ Kurvenschar (Hyperbelschar)

→ in DGL umschreiben



$y(x)$

$y'(x)$ Steigung → Tangentialvektor

normal darauf: $\begin{pmatrix} y'(x) \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{y'(x)} \end{pmatrix}$

DGL: $2x - 2y\,y' = \overset{c'}{0}$

$$yy' = x$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

für die orthogonalen Trajektorien y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{x}{y} \iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \qquad \left(\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \log y, \quad -\int \frac{1}{x}\,dx = -\log x$$

$$\log y = -\log x + \tilde{c}$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{e^{\tilde{c}}}_{c} \iff xy = c$$

orthogon. Traj. en (Hyperbeln mit x-, y-Achsen als Asymptoten)

2. Exakte Differentialgleichung

$$f_1(x,t)\,\dot{x} = -f_2(x,t)$$

$$\Longleftrightarrow f_1(x,t)\,\dot{x} + f_2(x,t) = 0 \quad (*)$$

$$\left(f_1(x,t)\,dx + f_2(x,t)\,dt = 0 \right)$$

So eine DGL heißt exakt, falls es eine Funktion F gibt ($\underset{\text{im Wesentlichen}}{:}\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) mit $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1$ und $\frac{\partial F}{\partial t} = f_2$.

(Man nennt $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt$ das exakte Differential von F.)

F nennt man „Stammfunktion".

Die Lösung ist dann durch $F(x(t),t) = c$ gegeben.

Bew.: ableiten

$$0 = (F(x(t),t))^{\cdot} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mehrdimensionale Kettenregel}}}{=} \overbrace{dF_{(x(t),t)}}^{\left(\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial t}\right)} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{f_1}\dot{x} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{f_2} = f_1(x(t),t)\,\dot{x}(t) + f_2(x(t),t)$$

DGL $(*)$ erfüllt $\square$

Wie finde ich F? $\to$ 2 Methoden:

- 1. Methode: $\to$ selten

$$F(x,t) = \int_C \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$ wobei c eine Kurve von (x_0,t_0) nach (x,t) ist

- 2. Methode: $\to$ beliebter!

integriere f_1 nach x, erhalte $F_1(x,t) + \underset{\uparrow}{c}(t)$, keine Konst. mehr!

differenziere das nach t und setze $= f_2$

Bsp.: $x\dot{x} = -t$

$x\,dx + t\,dt = 0$

$F = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c(t)$ nicht von t abh., weil Fkt. F (Stammfkt.) wird als Fkt. von 2 Variablen aufgefasst (x,t)

$t = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 + \dot{c}(t) \Rightarrow c(t) = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}$

UNTERSCHIED zw. Stammfkt. und Lsg.!

$\Rightarrow F = \frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2}$

Lsg.: $\frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2} = \tilde{c} \Leftrightarrow \underline{x(t)^2 + t^2 = c}$ ← muss Lsg. extra hinschreiben

Wie sehe ich, ob DGL exakt?

$f_1, f_2 \; C^1 \Rightarrow F \; C^2$

Satz von Schwarz: $\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{f_2}\Big) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{f_1}\Big)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial t}$$

haben gezeigt: wenn

DGL exakt $\Rightarrow$ Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial t}$

I. A. gilt die Umkehrung nicht!

Aber wenn das Gebiet, auf dem man arbeitet, einfach zusammenhängend ist (d.h., dass Gebiet keine Löcher hat), dann gilt die Umkehrung.

(einf. zus.h.: konvex $\Rightarrow$ sternförmig $\Rightarrow$ einf. zus.h.)

(also wenn Gebiet genügend schön ist)

3. Integrierender Faktor

Im Allgemeinen ist $f_1(x,t)\,\dot{x} + f_2(x,t) = 0$ nicht exakt.

Versuche eine Funktion $g(x,t)$ zu finden, so dass

$g(x,t)\,f_1(x,t)\,\dot{x} + g(x,t)\,f_2(x,t) = 0$ exakt ist.

(Diese hat natürlich dieselben Lösungen wie die ursprüngliche DGL.)

Wie findet man g?

Es muss gelten:

$$\underbrace{\frac{\partial(g f_1)}{\partial t}}_{f_1 \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial f_1}{\partial t}} \overset{\text{Integrabilitätsbed.}}{=} \underbrace{\frac{\partial(g f_2)}{\partial x}}_{f_2 \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f_2}{\partial x}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f_1 \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial f_1}{\partial t} = f_2 \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

partielle DGL für g $\rightarrow$ komplizierter als vorher
$\rightarrow$ nicht sinnvoll (hier)

So etwas funktioniert aber ganz gut, wenn g nur von x oder nur von t abhängt.

$\hookrightarrow \quad 0 = f_2 g' + g \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (?)$

12.12.2011

Bsp.: $\dot{x} = -\dfrac{x}{3t-4x}$

suchen integrierenden Faktor, der nicht von t abhängt

$(3t-4x)\,dx + x\,dt = 0 \qquad \frac{\partial(3t-4x)}{\partial t} \neq \frac{\partial x}{\partial x} \rightarrow$ nicht exakt

$g(x)(3t-4x)\,dx + g(x)\,x\,dt = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g(3t-4x)\right) = g\cdot 3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(g\cdot x) = g'\cdot x + g \quad \Longrightarrow \quad g'\cdot x = 2g$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Trennung der Variablen}}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{g}\,dg = \frac{2}{x}\,dx \qquad \underbrace{\int \frac{1}{g}\,dg}_{\log g} = \underbrace{\int \frac{2}{x}\,dx}_{2\log x}$$

$\Rightarrow \log g = 2\log x \Rightarrow \underline{g = e^{2\log x}} = (e^{\log x})^2 = \underline{\underline{x^2}}$

kein c, weil suchen nur eine Lsg.

$(3tx^2 - 4x^3)dx + x^3 dt = 0$

$F = \int x^3 dt = x^3 t + c(x)$

$\cancel{3tx^2} - 4x^3 = \frac{\partial F}{\partial x} = \cancel{3x^2t} + c' \Rightarrow c = -x^4$

$\Rightarrow F_{(x,t)} = x^3 t - x^4$

Lsg.: $x(t)^3 t - x(t)^4 = c$

$\boxed{\text{4. Lineare Differentialgleichungen}}$

jetzt nicht konst. Koeff.en sondern allgemein

homogenes System lösen (Trennung d. Variablen)

eine partielle Lsg. bestimmen (Variation d. Konstante)

$r=1,\ n=1$: $\dot{x} = a(t)x + f(t)$

homogen: $\dot{x} = a(t)x \iff \frac{1}{x}dx = a(t)dt$

$\Rightarrow \log x = \int a(t)dt + \tilde{c}$

$\Rightarrow x(t) = c e^{\int a(t)dt}$

$r>1,\ n=1$: Es gibt keine allg. Methode sie zu lösen!

Prop.: Der Lösungsraum ist r-dimensional.

$(\dot{x}(t) = \underset{\text{Matrix}}{A(t)} \cdot x(t))$

Bew.: Sei $j \in \{1, \dots, r\}$.

$\dot{x} = A(t)x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

hat nach dem Existenz- und Eindeut.satz (von PICARD + LINDELÖF) lokal

eine eindeutig bestimmte Lsg. $x_{(j)}$

zeige, dass $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(r)}\}$ Basis

·) z.z.: l.u.

Ang.: $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_{(j)} = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_{(j)}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ also l.u.

·) z.z.: Erzeugendensystem

Sei x eine Lsg von $\dot{x} = A(t)x$.

Setze $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = x(0)$

$$\left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_{(j)}\right)^{\cdot} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \underbrace{\dot{x}_{(j)}}_{A(t)x_{(j)}} = A(t)\left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_{(j)}\right)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_{(j)}\right)(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = x(0) \xRightarrow{\text{Existenz- u. Eind.satz}} x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_{(j)} \qquad \square$$

$\rightarrow$ muss r l.u. Lsgen finden, also feststellen, ob l.u.:

Prop.: Seien $x_{(1)}, \ldots, x_{(r)}$ Lsgen von $\dot{x} = A(t)x$.

Dann sind äquivalent:

(1) $\{x_{(1)}, \ldots, x_{(r)}\}$ sind l.u.

(2) $\det(x_{(1)}(t), \ldots, x_{(r)}(t)) \neq 0 \quad \forall t$ für alle t *

(3) $\exists t$ mit $\det(x_{(1)}(t), \ldots, x_{(r)}(t)) \neq 0$ für ein t

Bew.: $(1) \Rightarrow (2)$: $\exists t_0$ mit $\det(\ldots) = 0 \Rightarrow \sum \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0 \text{ für mind. ein } j} x_{(j)}(t_0) = 0$

$\sum \lambda_j x_{(j)}$ Lsg. $\xRightarrow{\text{Ex.- und Eind.satz}} \sum \lambda_j x_{(j)} = 0$ WID. zu l.u.!

$(2) \Rightarrow (3)$: ✓

$(3) \Rightarrow (1)$: $\sum \lambda_j x_{(j)} = 0 \Rightarrow \sum \lambda_j x_{(j)}(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$

* d.h. wenn ich ein t gefunden habe, gilt es $\forall$

$r=1,\ n>1:$

Prop: Der Lösungsraum von

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t)\,x = 0$$

ist n-dimensional.

Def.: Setze $W(t) = \det \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) & x_{(2)}(t) & \ldots & x_{(n)}(t) \\ \dot{x}_{(1)}(t) & \dot{x}_{(2)}(t) & \ldots & \dot{x}_{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{(1)}^{(n-1)}(t) & x_{(2)}^{(n-1)}(t) & \ldots & x_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$

heißt Wroński-Determinante

Prop: Seien $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ Lsg.en von

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t)\,x = 0.$$

Dann sind äquivalent:

(1) $\{x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\}$ l.u.

(2) $W(t) \neq 0 \quad \forall t$

(3) $\exists t$ mit $W(t) \neq 0$

Bew. folgt aus obigem Bew.

bei konst. Koeff. besser alte Methoden verwenden

$r=1, n=1$

Bsp: $\dot{x} = 2tx + e^{t^2}$

homogen: $\dot{x} = 2tx \iff \frac{1}{x}\,dx = 2t\,dt, \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log x, \quad \int 2t\,dt = t^2$

$$\Rightarrow \log x = t^2 + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{t^2} \cdot e^{\tilde{c}} = c e^{t^2}$$

inhomogen: Variation d. Konstanten:

$$x = c(t)\,e^{t^2}$$

$$\dot{c} e^{t^2} + \cancel{2tce^{t^2}} = \dot{x} = 2tx + e^{t^2} = \cancel{2tce^{t^2}} + e^{t^2}$$

$$\Rightarrow \dot{c} = 1 \Rightarrow c = t$$

$$\Rightarrow x = te^{t^2}$$

Lsg.: $x(t) = te^{t^2} + ce^{t^2}$

5. Bernoulli'sche Differentialgleichung

$\dot{x}(t) + a(t)\,x(t) = b(t)\,x(t)^{\alpha}$

Durch die Substitution $u := x^{1-\alpha}$ wird das in eine lineare DGL übergeführt.

Bsp.: $\dot{x} + x = 6tx^3 \quad (\Longleftrightarrow \dot{x} = -x + 6tx^3)$

$u := \overset{x(t)}{x}{}^{-2} \qquad \dot{u} = -2x^{-3} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{-x+6tx^3} = 2\underbrace{x^{-2}}_{u} - 12t = 2u - 12t$

homogen: $\dot{u} = 2u \Longleftrightarrow \frac{1}{u}\,du = 2dt$

$\Longrightarrow \log u = 2t + \tilde{c} \Longrightarrow u(t) = ce^{2t}$

inhomogen: $u = c(t)e^{2t}$

$\dot{c}e^{2t} + \cancel{2ce^{2t}} = \dot{u} = 2u - 12t = \cancel{2ce^{2t}} - 12t$

$\Longrightarrow \dot{c} = -12te^{-2t}$

$\Longrightarrow c = -\int 12t\,\underbrace{e^{-2t}}_{\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)'}dt = 6te^{-2t} - \underbrace{\int 6e^{-2t}dt}_{-3e^{-2t}} =$

$= (6t+3)e^{-2t}$

$\Longrightarrow u = 6t + 3$

allg. Lsg. für u: $u(t) = 6t + 3 + ce^{2t} \qquad \left(x = \frac{1}{\sqrt{u}}\right)$

$\Longrightarrow$ allg. Lsg.: $x(t) = \frac{1}{\sqrt{6t+3+ce^{2t}}}$

6. Riccati'sche Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$$

Es gibt keine allg. Lösungsmethode.

Wenn man eine Lsg. $x_0(t)$ kennt, dann führt die Substitution $y = x - x_0$ auf eine Bernoulli'sche DGL.

Bsp.: $\dot{x} = (1-t)x^2 + (2t-1)x - t$

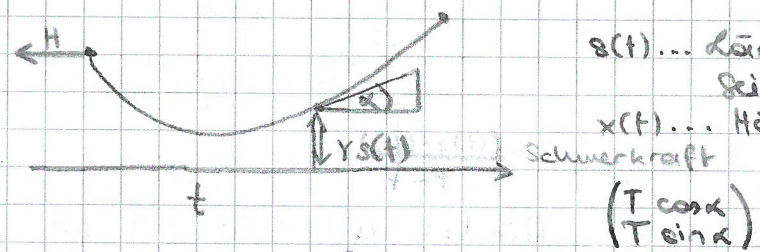
$x_0(t) = 1$ ist eine Lsg.: $y = x - 1$ $(\Rightarrow x = y+1)$

$\dot{y} = (1-t)(y+1)^2 + (2t-1)(y+1) - t = (1-t)y^2 + y$

$u = y^{-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow x(t) = 1 + \dfrac{1}{ce^{-t} + t - 2}$

7. Klassische Beispiele

•) Kettenlinie:



s(t)... Länge des Seils

x(t)... Höhe

Kräfte müssen im GG gehalten werden:

$T\cos\alpha = H$

$T\sin\alpha = \gamma\, s(t)$ $\qquad H, \gamma > 0$

$$\dot{x} = \tan\alpha = \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{\gamma\, s(t)}{H} = \underbrace{\frac{\gamma}{H}}_{=:a\,>\,0}\, s(t)$$

weil $H, \gamma > 0$

$\dot{x}(t) = a\,s(t)$

$$\ddot{x} = a\dot{s} = a \lim_{\tilde{t}\to t} \underbrace{\left(\frac{s(\tilde{t})-s(t)}{\tilde{t}-t}\right)}_{\frac{1}{\tilde{t}-t}\sqrt{(x(\tilde{t})-x(t))^2+(\tilde{t}-t)^2}} =$$

lim und √ vertauschen

$$= a\sqrt{\left(\lim_{\tilde{t}\to t}\frac{x(\tilde{t})-x(t)}{\tilde{t}-t}\right)^2+1} = a\sqrt{\dot{x}^2+1}$$

$$u = \dot{x} \implies \dot{u} = a\sqrt{u^2+1} \implies \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = a\,dt$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \operatorname{arcsinh} u \quad , \quad \int a\,dt = at$$

$$\operatorname{arcsinh} u = at + c \implies u = \sinh(at+c)$$

$$x(t) = \frac{1}{a}\cosh(at+c)$$

•) Populationswachstum:

$a>0$, $b>0$ (b ... Maximalbevölkerung)

$\dot{x} = ax\left(1-\frac{x}{b}\right)$ → für $b\to\infty$ kann Bevölkerung wegen Nahrungskampf nicht mehr so stark zunehmen

(logistisches Modell)

$$\dot{x} = \frac{a}{b}x(b-x) \iff \frac{1}{x(b-x)}\,dx = \frac{1}{b}\,dt$$

$$\int \frac{a}{b}\,dt = \frac{a}{b}t, \quad \frac{1}{x(b-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{b-x} \implies \dots \implies A = B = \frac{1}{b}$$

Partialbruchzerlegung

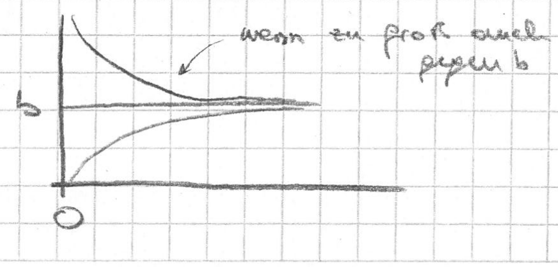
$$\int \underbrace{\frac{1}{x(b-x)}}_{\frac{1}{b}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{b-x}\right)}\,dx = \frac{1}{b}\left(\log x - \log(b-x)\right) = \frac{1}{b}\log\frac{x}{b-x}$$

$$\implies \frac{1}{b}\log\frac{x}{b-x} = \frac{a}{b}t + \check{c} \implies \frac{x}{b-x} = e^{at}\cdot\hat{c} \implies$$

$$x = b\hat{c}e^{at} - x\hat{c}e^{at} \implies x = \frac{b\hat{c}e^{at}}{1+\hat{c}e^{at}} \Big| \cdot \frac{\frac{1}{\hat{c}e^{at}}}{\frac{1}{\hat{c}e^{at}}} \quad \frac{b}{1+\frac{1}{\hat{c}}e^{-at}} = \frac{b}{1+ce^{-at}}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = b \qquad a,b>0$$

(keine Bev.explosion)



7. Qualitative Theorie autonomer Differentialgleichungen

DGL heißt autonom, falls $\dot{x} = f(x)$ (f hängt nur von x und nicht von t ab)

Def.: Man nennt x_0 einen Fixpunkt von $\dot{x} = f(x)$, falls $f(x_0) = 0$

wenn dort starte bleibt DGL immer dort

Prop.: x_0 ist Fixpunkt $\Leftrightarrow$ $x(t) = x_0$ $\forall t$ eine Lsg.

Bew.: $(\Rightarrow)$: $\dot{x} = 0 = f(x_0) = f(x)$

$(\Leftarrow)$: $f(x_0) = f(x) = \dot{x} = 0$ $\square$

9.1.2012

Ljapunov-Funktion

Ляпунов

Def.: Eine Funktion $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Ljapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$, falls $dg(x)\, f(x) \leq 0$ $\forall x$ gilt

strikte Ljapunov-Funktion, falls $dg(x)\, f(x) < 0$ $\forall x$, die keine Fixpunkte sind

„Die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ gehen in die Richtung, in die g fällt."

Bew.: Setze $u(t) = g(x(t))$, wobei x Lsg. von $\dot{x} = f(x)$ ist.

$$\dot{u}(t) \overset{\text{Kettenregel}}{=} dg_{(x(t))} \underbrace{\dot{x}(t)}_{f(x(t))} = dg_{(x(t))} f(x(t)) \leq 0$$

$\Rightarrow$ u ist monoton fallend $\square$

<u>Bsp.:</u> $\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_1 x_2^2 \\ -x_2^7 - x_1^6 x_2^3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Fixpunkt $\rightarrow$ wenn ich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einsetze, kommt 0 heraus

$g(x) := x_1^2 + x_2^2$ ist eine Ljapunovfunktion, weil

$$dg_{(x)} \cdot f(x) = (2x_1 \quad 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_1 x_2^2 \\ -x_2^7 - x_1^6 x_2^3 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\underbrace{x_1^2}_{\geq 0} - 2\underbrace{x_1^2}_{\geq 0}\underbrace{x_2^2}_{\geq 0} - 2\underbrace{x_2^8}_{\geq 0} - 2\underbrace{x_1^6}_{\geq 0}\underbrace{x_2^4}_{\geq 0} \leq 0$$

(sogar < 0, falls $x \neq 0$, also strikte Ljapunovfkt.)

Daher $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0 \quad \forall$ Lösungen $\dot{x} = f(x)$.

SATZ von Hartman - Grobman

<u>„SATZ“</u>: $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ stetig differenzierbar, x_0 ein Fixpunkt von $\dot{x} = f(x)$. Falls alle Eigenwerte von $df_{(x_0)}$ Realteil $\neq 0$ haben, dann verhalten sich die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ in der Nähe von x_0 wie die Lösungen von $\dot{y} = df_{(x_0)} \cdot y$ in der Nähe von 0.

<u>Bsp.:</u> $\dot{x}_1 = -7x_1 + 14, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_2 + 6$

<u>ges.:</u> Fixpunkte, Verhalten in Nähe der Fixpunkte

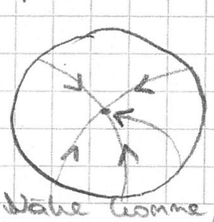
Fixpunkte: $f(x) = 0$: $\underset{-7x_1 + 14 = 0}{x_1 = 2} \Rightarrow \underset{2^2 - 2x_2 + 6 = 0}{x_2 = 5}$ Fixpunkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$df = \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}}{-7} & \overset{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}}{0} \\ \underset{\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}}{2x_1} & \underset{\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}}{-2} \end{pmatrix}, \quad df_{\binom{2}{5}} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 einsetzen

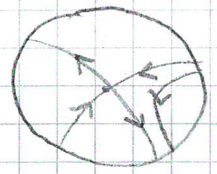
Eigenwerte: $-2, -7$ weil Diagonalmatrix

$\overset{HG}{\Longrightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stabiler Raum}}}{\dim E_s} = 2, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{instabiler Raum}}}{\dim E_u} = 0$ (Attraktor)



wenn ich in Nähe komme, konvergieren alle Lsg.en gegen Fixpkt.

Sattelpunkt $\dim E_s = 1$, $\dim E_u = 1$



kontinuierlich: DGlen $\dot{x} = f(x)$, $\dot{x} = f(x,t)$

diskret: Differenzengleichungen $x(n) - x(n-1) = f(x(n-1))$

bzw. $\ldots = f(x(n-1), n)$

$$x(n) = x(n-1) + f(x(n-1))$$

Setze $g(x) := x + f(x)$ $\qquad x(n) = g(x(n-1))$.

Startwert x_0: $x(0) = x_0 \Rightarrow x(n) = \underbrace{g^n}_{= g \circ g \circ \ldots \circ g}(x_0)$, wobei

Bew:
Induktion: $n = 0$: $x(0) = x_0 = g^0(x_0)$

sei $n > 0$: $x(n) = g(\underbrace{x(n-1)}) \overset{IV}{=} g^{n-1}(x_0)$ $= (\underbrace{g \circ g^{n-1}}_{= g^n})(x_0) = g^n(x_0)$

II. CHAOTISCHE DYNAMISCHE SYSTEME

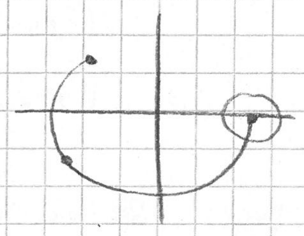
z.B.: Würfelwurf, (langfristige) Wettervorhersage

1.) Beispiele und Definitionen

Newtonverfahren: $Tx \ (= T(x))$ in der Nähe von Nullstelle: $T^n x \to x_0$

Globales Verhalten: auf $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

Newtonverfahren für $z^3 - 1$:



$$Tz = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{2}{3} z + \frac{1}{3z^2}$$

Nullstellen von $z^3 - 1$: $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{-\frac{2\pi i}{3}}$

$\exists\, U_0$ von 1, so dass $T^n z \to 1 \quad \forall z \in U_0$
↳ offene Umgebung

$$U_1 := \{z : T^n z \to 1\} = \underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty}}_{\text{offen}} T^{-n} \underbrace{U_0}_{\text{offen}}$$
↳ Vereinigung

offen — Vereinigungen von offenen ~ offen

stetige Urmengen von offenen Mengen sind offen

analog $U_{e^{\frac{2\pi i}{3}}}$, $U_{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}$ offen

$$\Rightarrow J = \mathbb{C} \setminus \left(U_1 \cup U_{e^{\frac{2\pi i}{3}}} \cup U_{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}\right).$$

⟶ Bilder auf Zettel

Juliamenge (fr.) J (ist ein Fraktal)

Def.: Sei X ein kompakter metrischer Raum, $T: X \to X$ stetig. Dann nennt man (X, T) ein (topologisches, diskretes) dynamisches System.

Def.: Für $x \in X$ nennt man die Folge $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den Orbit von x.

$(x, Tx, T^2 x, \dots)$

Zeitpkt. 0, Zeitpkt. 1, Zeitpkt. 2

Orbit der Länge n: $(x, Tx, \dots, T^{n-1}x)$

Def.: ·) x_0 Fixpunkt, falls $Tx_0 = x_0$
(Orbit: $(x_0, x_0, x_0, \dots)$) keine Veränderung, daher Fixpunkt

·) x_0 heißt periodischer Punkt, falls $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $T^n x_0 = x_0$. Das kleinste n mit dieser Eigenschaft heißt Periode von x_0.

(Orbit (Periode 3): $(x_0, Tx_0, T^2x_0, x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots)$)

(Fixpunkt = periodischer Punkt mit Periode 1)

Def.: Sei $x \in X$. Dann heißt die Menge aller Punkte y, für die es (n_k) (str. mon. wachsend) mit $T^{n_k}x \to y$ die ω-Limes Menge (Omega) von x, wird als $\omega(x)$ geschrieben.

↳ dort, wo man nach langer Zeit ist (ω)

Bsp.: x_0 Fixpunkt: $\omega(x_0) = \{x_0\}$ (ω-Limes)

x_0 Punkt der Periode n: $\omega(x_0) = \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots, T^{n-1}x_0\}$

T Newtonverfahren für $z^3 - 1$, $z \in U_1$: $\omega(z) = \{1\}$ ($\to 1$, Grenzwert)

Man kann zeigen: $\exists\, z \in J$ mit $\omega(z) = J$.

Eigenschaften der Juliamenge:

überabzählbar, Fraktal

Wie verhält sich T auf J?

·) $\exists\, z \in J$ mit $\omega(z) = J$ (topologisch transitiv)

- $\forall \varepsilon > 0,\ \forall z \in J\ \exists$ periodischer Punkt $\tilde{z} \in J$ mit $|z-\tilde{z}| < \varepsilon$.
  (periodische Punkte liegen dicht)
- starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen:
  $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall x, \forall \delta > 0\ \exists y$ mit $\overbrace{d(y,x)}^{\text{Abstand von } y \text{ zu } x} < \delta$,
  $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ Diese drei Punkte zusammen: Chaos nach Devaney (fr.)
(gibt versch. Def.en von Chaos, in versch. Sinn)

andere Def. von Chaos:
Topologische Entropie: misst „wie chaotisch" ein System ist
(wenn $0 \rightarrow$ nicht chaotisch, je größer umso chaotischer)

2.) Topologische Entropie

<u>Idee:</u> zählen, wie viele Orbits der Länge n gibt es $\rightarrow$ überabzählbar viele
Lupe, mit der ich Punkte, die sich um mindestens ε unterscheiden, unterscheiden kann

<u>16.1.2012</u>

<u>Def.</u>: (X,T) dynamisches System, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Dann heißt $E \subseteq X$ (n,ε)-trennend, falls $\forall x \neq y \in E\ \exists j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ mit $d(T^j x, T^j y) \geq \varepsilon$

$k_n(\varepsilon) := \sup\limits_{E \text{ (die) } (n,\varepsilon)\text{-trennend}} \operatorname{card} E$ (~~Kontinuität~~ Kardinalität)

erhalten $\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon), k_3(\varepsilon), \dots\}$

etwa: $(k, k, k, \dots)$ ... nicht chaotisch
$(k, 2k, 4k, \dots)$ ... chaotisch
$(k, 3k, 9k, \dots)$ ... ~~nicht~~ (auch chaotisch) noch chaotischer

In vielen einfachen Fällen: $k_n(\varepsilon) \approx c(\varepsilon)\, e^{nh}$ → misst Chaos → Entropie

" $\log k_n(\varepsilon) \approx \log c(\varepsilon) + nh$

$\frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon) \approx \frac{1}{n} \log c(\varepsilon) + h$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon) \approx h$ "

2 Probleme: 1.) Grenzwert muss nicht existieren

Lösung: $\limsup_{n\to\infty}$ statt $\lim_{n\to\infty}$

2.) h hängt von ε ab

wenn Orbits mit ε_2-Lupe unterscheidbar, dann auch mit ε_1-Lupe (Abstand $\geq \varepsilon_2$ → auch $\geq \varepsilon_1$)

mind. so viele Orbits oder mehr

$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \qquad k_n(\varepsilon_1) \geq k_n(\varepsilon_2)$

$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon_1) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon_2)$ mon. fallend

wir können daher $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon_1) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{n}\log k_n(\varepsilon_2)$ betrachten

Def.: Sei (X,T) ein dynamisches System. Dann heißt

$h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \operatorname{card} E$, wobei

das Supremum über alle (n,ε)-trennenden Mengen E genommen wird, die topologische Entropie von (X,T).

Manchmal schreibt man $h_{top}(X,T)$ (ist eig. exakter)

$h_{top}(T) \geq 0$ $\quad$ sup ≥ 1, $\log \geq 0$, $\frac{1}{n} \geq 0$, $\limsup \geq 0$, $\lim \geq 0$

SATZ: (X,T) dyn. System, es seien $(X_1, X_2, \dots)$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene, T-invariante ($d.h.$ $TX_j \subseteq X_j$), paarw. disjunkte Teilmengen

je 2 versch. Mengen haben deren Durchschnitt

wenn in X_j starte bleibe in X_j

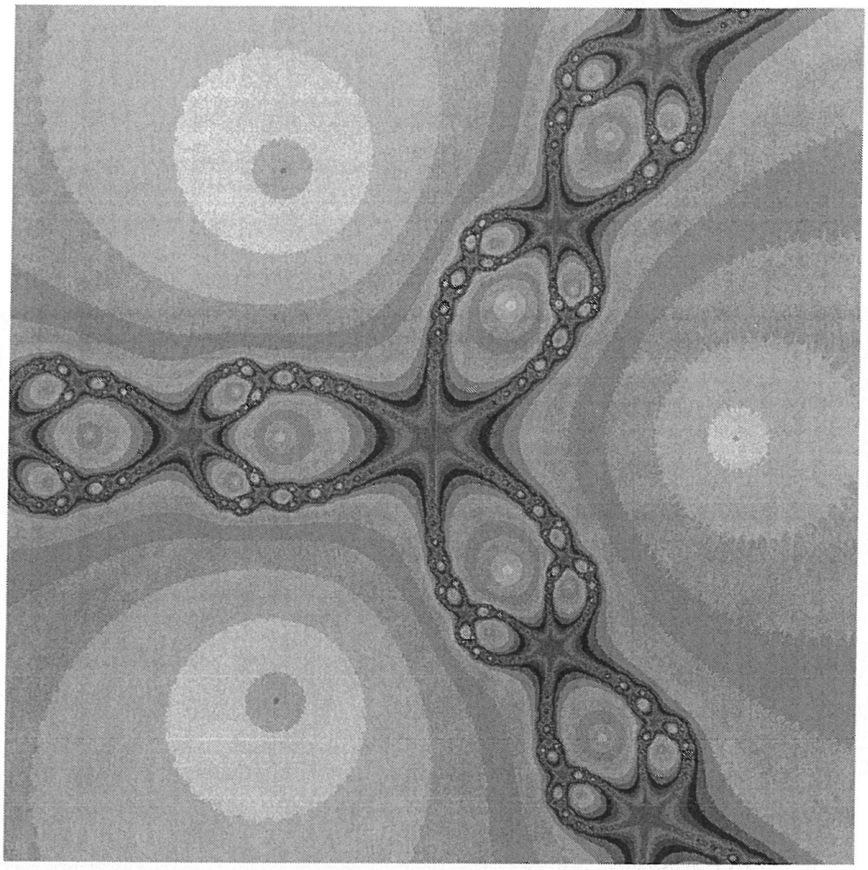
$\forall x \in X \quad \omega(x) \subseteq \bigcup_j X_j$.

wenn ausrechne, bin in einer dieser Mengen drin ↳ Vereinigung

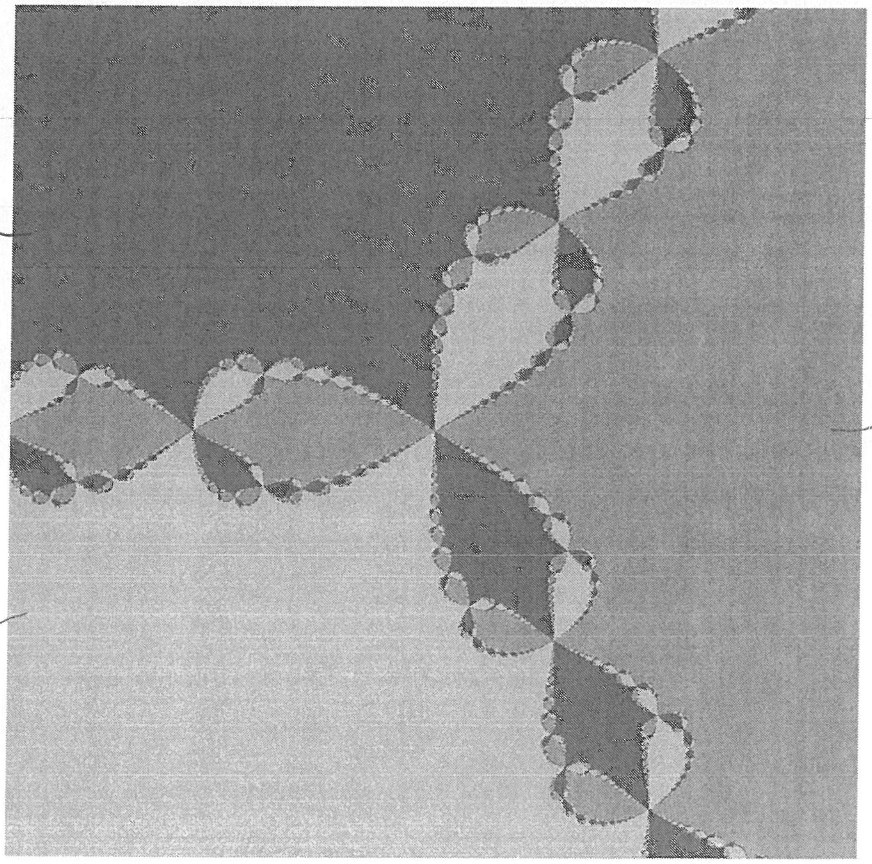
Dann gilt: $h_{top}(T) = \sup h_{top}(X_j, T)$

kann mich auf kleinere Entropien einschränken → h = sup dieser Entropien auf Homepage: Bilder in Farbe

Newtonverfahren für $z^3 - 1$, also $Tz := \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{3z^2}$.



gibt an, wie schnell es konverpiert

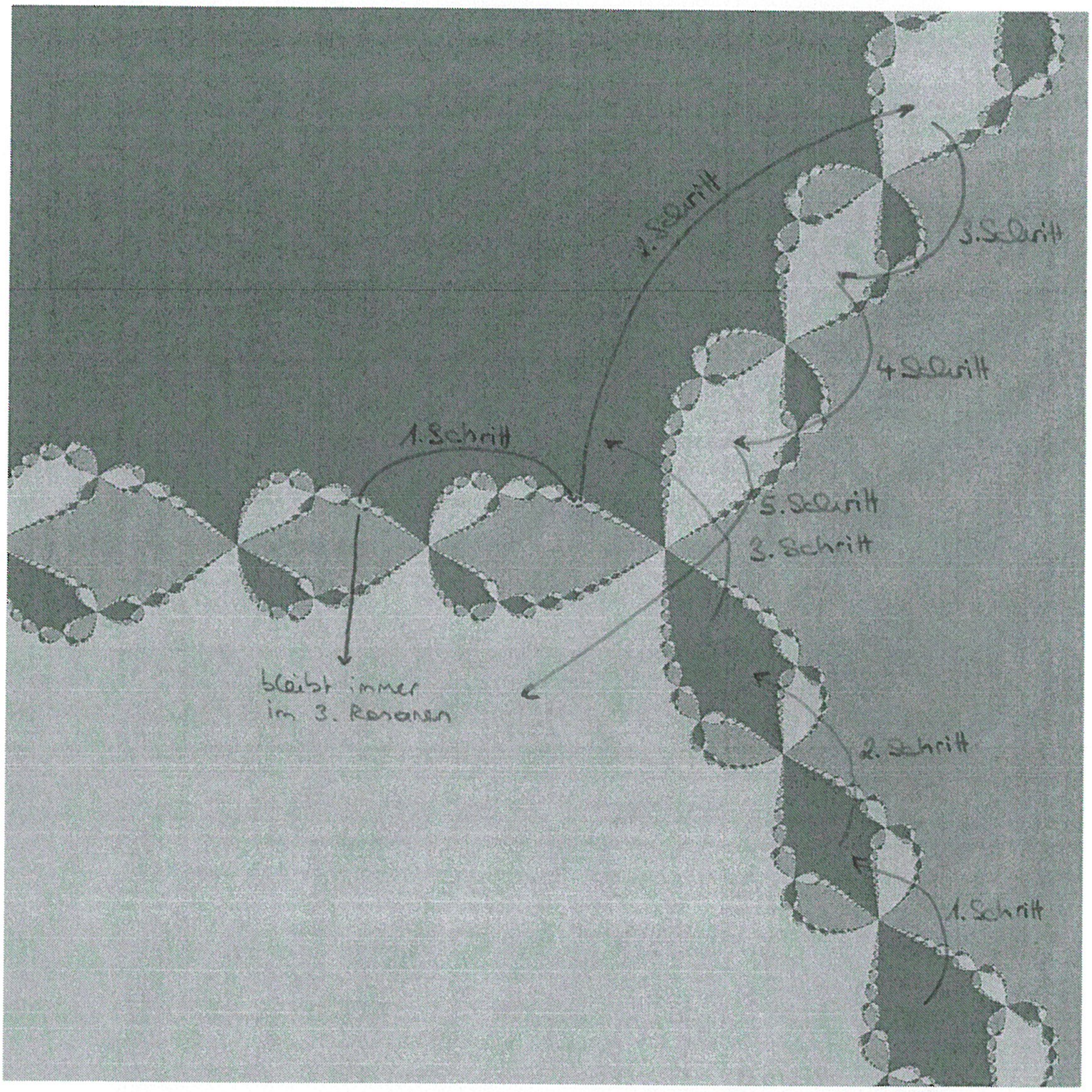


gibt an, gepen was es konverpiert → für uns interessanter

$\to e^{\frac{2\pi i}{3}}$

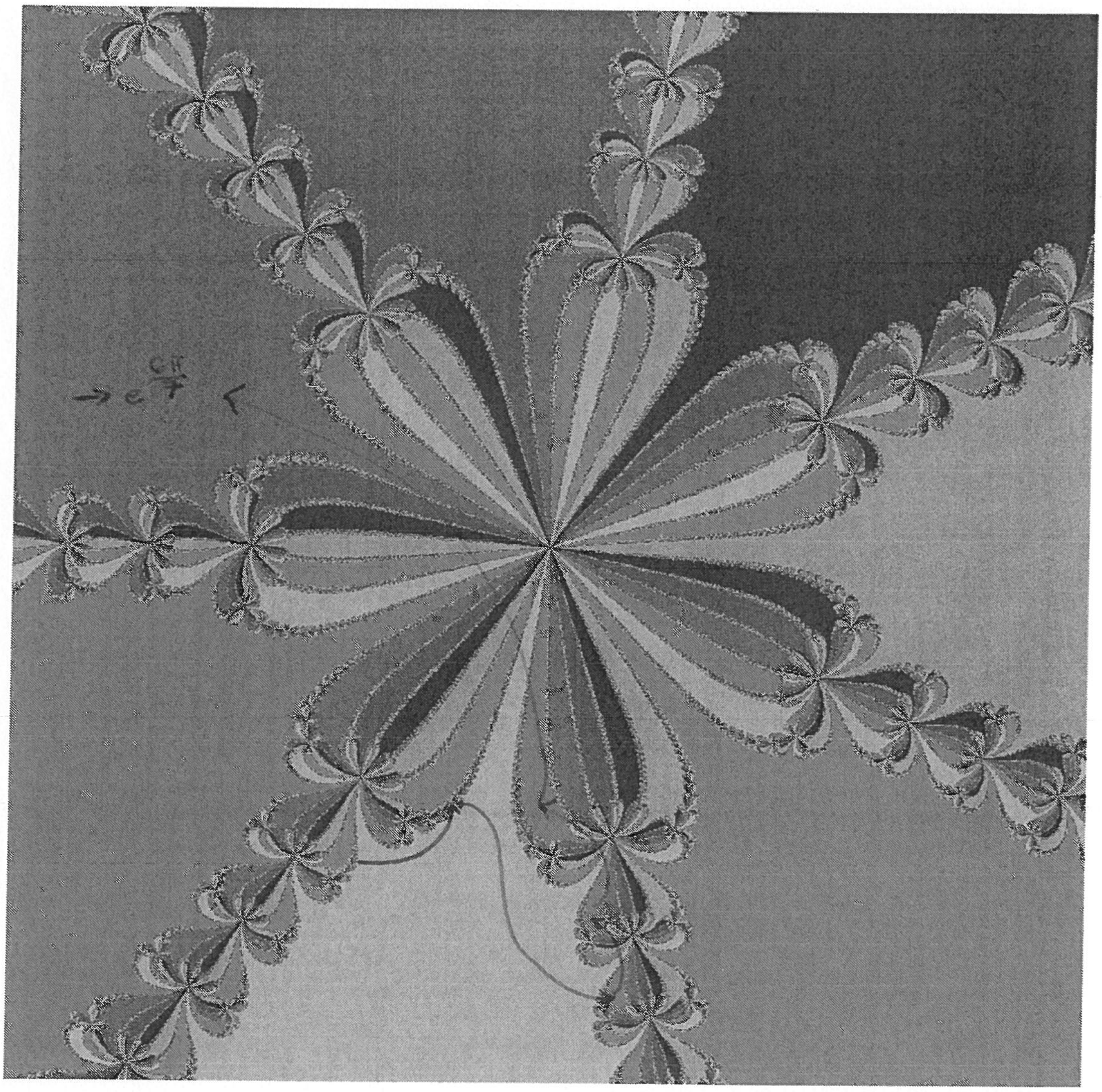
$\to 1$

$\to e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ $\cancel{e^{\frac{4\pi i}{3}}}$

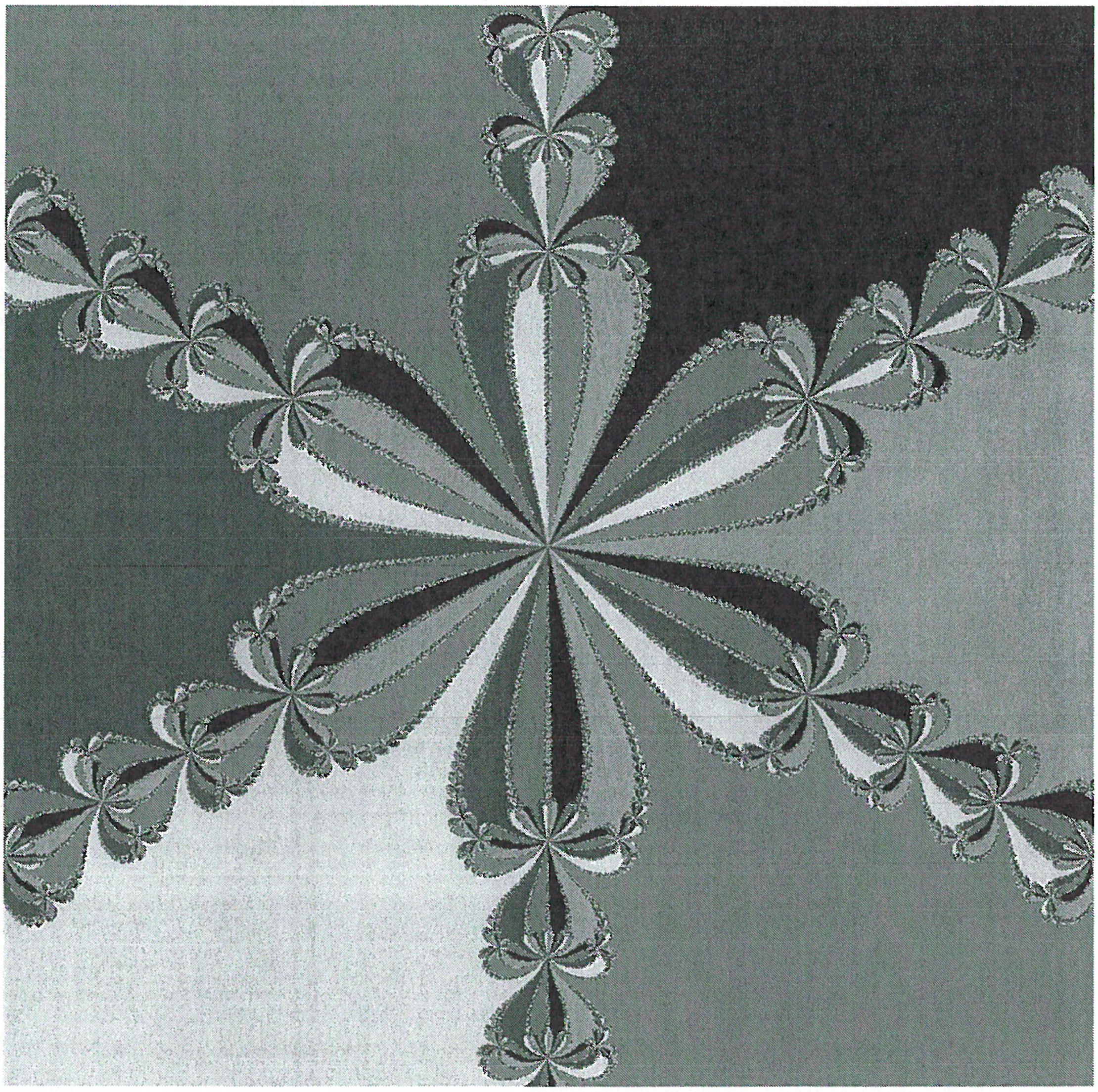


Fraktale (selbstähnlich)

Newtonverfahren für $z^7 - 1$, also $Tz := \frac{6}{7}z + \frac{1}{7z^6}$.



Newtonverfahren für $z^6 - 1$, also $Tz := \frac{5}{6}z + \frac{1}{6z^5}$.



Falls X endlich ist, dann ist $h_{top}(X,T)=0$

endl. Menge

Anzahl d. Elemente von X

<u>Bew.:</u> $N = \text{card}\, X$

$\frac{1}{n}\log \sup\limits_{E\ (n,\varepsilon)\text{-trennend}} \text{card}\, E \leq \underbrace{\frac{1}{n}\log N}$

$\to 0$ für $n \to \infty$

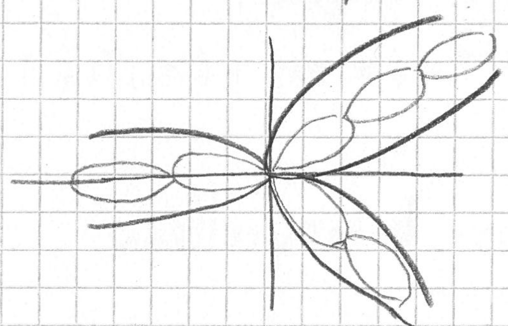
$\Rightarrow h_{top}(X,T) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sup\limits_{E} \text{card}\, E = 0$ $\square$

dazu → „Lupen" immer genauer

$X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j$ X_j abgeschl., $X_{j_1} \cap X_{j_2}$ ist höchstens endlich $\forall j_1 \neq j_2$

$T X_j = X \implies h_{top}(T) \geq \log N$, in vielen einfachen Bsp.en sogar $=$

Für J Juliamenge von Newtonverfahren für z^3-1



alle 3 Teile abgeschl.,
Durchschn. ...,
alle Teile auf ges. J.m. abgeb.,

$\Rightarrow h_{top}(J,T) = \log 3$

Was ist $h_{top}(T)$?

$x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\underbrace{\omega(x) \in J}_{\text{war in } J} \cup \underbrace{\{1\} \cup \{e^{\frac{2\pi i}{3}}\} \cup \{e^{-\frac{2\pi i}{3}}\}}_{\text{war in einem d. Attraktionsbereiche → lande in jeweiliger Nullstelle}}$

$h_{top}(T) = \sup\{\underbrace{h_{top}(J,T)}_{\log 3}, \underbrace{h_{top}(\{1\},T)}_{0 \text{ weil endl. Menge}}, \underbrace{h_{top}(\{e^{\frac{2\pi i}{3}}\},T)}_{0}, \underbrace{h_{top}(\{e^{-\frac{2\pi i}{3}}\},T)}_{0}\} =$

$= \log 3$

Verallgemeinerung: topologischer Druck (eig. freie Energie)
nicht normaler Druck

hat Gewichtsfunktion f weil beschreibt wie wichtig ~~Pkt.~~ Pkt. ist

$f: X \to \mathbb{R}$ stetig gibt jedem Punkt best. „Gewicht"

Def.: $$p(T,f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \overset{\text{Supremum}}{\sup_{E\ (n,\varepsilon)\text{-trennend}}} \sum_{x\in E} \exp\Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)}_{\text{summieren entlang Orbit d. Länge } n \text{ Gew.Pkt. auf}}\Big)$$

nehme konst. Fkt. 0 → $e^0 = 1$
↳ Σ zählt, wieviel Elemente E hat $= \operatorname{card} E$

$$p(T,0) = h_{top}(T)$$

$$p(T, f+c) = p(T,f) + c$$

$\Sigma(f+c) \to \Sigma c = nc$

log ← $e^{nc} \cdot \ldots$

$nc + \ldots$

$c + \ldots$

SATZ: $(X_1, \ldots)$ höchstens abzählb. viele, abgeschlossene, T-invariante, paarw. disjunkte Mengen,

$\forall x \in X: \omega(x) \subseteq \bigcup_j X_j \implies p(T,f) = \sup_j p(X_j, T, f)$

3.) Abbildungen auf den Intervallen

Abb. v. Intervall in sich selbst

$S: [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$, setze für $x \in [0,1]$

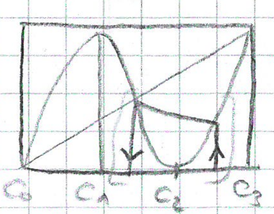
$$T_x = \frac{1}{\beta - \alpha}\big(S(\alpha + x(\beta-\alpha)) - \alpha\big)$$

dann $T: [0,1] \to [0,1]$

Def.: Eine Abbildung $T: [0,1] \to [0,1]$ heißt stückweise monoton, falls es $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_N = 1$ gibt, so dass $T|_{(c_{j-1}, c_j)}$ stetig und streng monoton

egal ob steigend od. fallend

ist $\forall j \in \{1, \ldots, N\}$



→ bilde eig. v. x- auf x-Achse ab → gehe zur Diagonale und wieder runter setze $E := \{c_1, c_2, \dots, c_{N-1}\}$

(Endpunkte der Monotonieintervalle mit Ausnahme von 0 und 1)

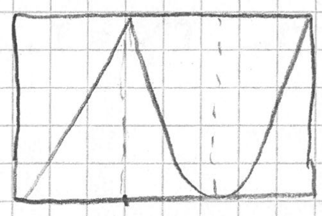
(Bem.:) T stückw. monoton $\Rightarrow$ T^n stückw. monoton
(also auch Potenzen)

$c_n(T)$ ... Anzahl d. Monotonieintervalle von T^n

wichtige Entropieformel

(!) SATZ (Misiurewicz, Szlenk, 1980): T stetig und stückw. monoton. Dann ist $h_{top}(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(T)$

Korr.: T habe N Monotonieintervalle und jedes Monotonieintervall wird auf $[0,1]$ abgebildet



Dann ist
$h_{top}(T) = \log N$

jedes M. zerfällt in n Teilintervalle, die wieder auf T^n abgeb.

Bew.: mit Induktion: $c_n(T) = N^n$ $n=1$ ✓

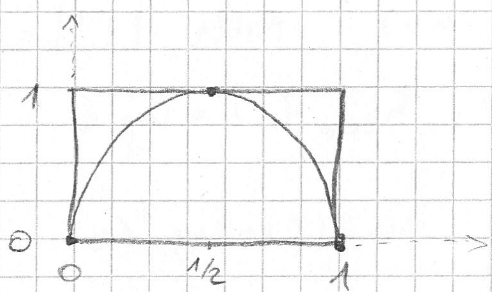
$n>1$: ✓

$$h_{top}(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\log \underbrace{c_n(T)}_{N^n}}_{n \log N} = \log N$$

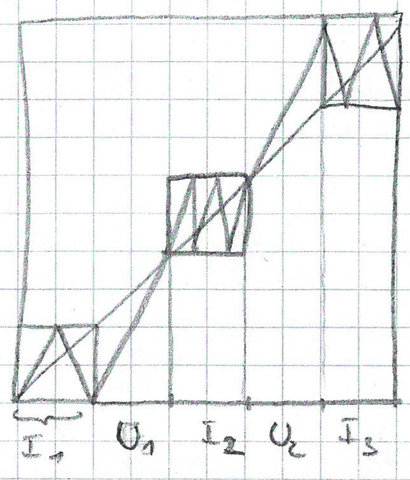
□

Bsp.: $Tx = 4x(1-x)$

$\Rightarrow h_{top}(T) = \log 2$



Bsp.:



I_1, I_2, I_3 sind abg., T-inv., paarw. disj.

wollen zeigen:
$\forall x \in [0,1]$ ist
$\omega(x) \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3$

$x \in U_1$: Graph ist unterhalb der Diagonale $\quad T_x < x$ (setze ich ein) $\downarrow$ bekomme ich heraus

$\Longrightarrow$ solange ich in U_1 bleibe, ist der Orbit (streng) monoton fallend

da man nicht immer in U_1 bleiben kann (keine Fixpunkte in U_1) $\exists n: T^n x \in I_1$

$\Longrightarrow \omega(x) \subseteq I_1$

ähnlich: $x \in U_2 \Longrightarrow \omega(x) \subseteq I_3$

(Graph oberhalb Diagonale, $Tx > x$, Orbit $\nearrow$)

$$\Longrightarrow h_{top}(T) = \max\{\underbrace{h_{top}(I_1,T)}_{=\log 2}, \underbrace{h_{top}(I_2,T)}_{=\log 5}, \underbrace{h_{top}(I_3,T)}_{=\log 3}\} = \log 5$$

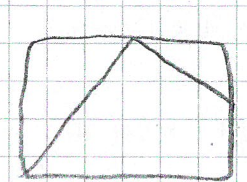
sup ist bei h immer max

$=\log 5$ $\downarrow$ 5 mal rauf bzw. runter

SATZ (-"-): Falls $|T'| = c > 1$

$\Longrightarrow h_{top}(T) = \log c$

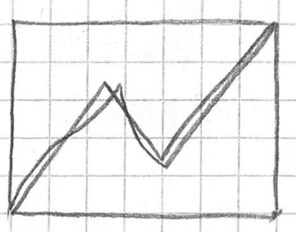
$h_{top}(T) = \log 3/2$



$|T'| = 3/2$

Was passiert unter kleinen Störungen von T?

Def: T_1, T_2 stückw. monoton, $\varepsilon > 0$.
Dann heißen T_1 und T_2 ε-nahe, falls T_1 und T_2 gleich viele Monotonieintervalle haben, und der Graph von T_2 in einer ε-Umgebung (als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$) vom Graph von T_1 liegt.



(kann sich auch öfter schneiden)

Entropie nach unten halbstetig:

$\downarrow \,\hat{=}$

SATZ (---): $\liminf_{\tilde{T} \to T} h_{top}(\tilde{T}) \geq h_{top}(T)$

Druck:

SATZ (Urbański, 1987): Falls $p(T,f) > \sup_x f(x)$,
dann $\liminf_{\tilde{T} \to T} p(\tilde{T}, f) \geq p(T,f)$.

x periodisch: $n(x)$ ... Periode von x

$k(x) = \text{card}(\{x, Tx, T^2x, \dots, T^{n(x)-1}x\} \cap E)$

↳ zähle wie oft dieser Orbit ein Endpkt. d. Monoint. ist

SATZ (Misiurewicz, 1988):

$$\limsup_{\tilde{T} \to T} h_{top}(\tilde{T}) = \max\left\{h_{top}(T), \max\left\{\frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ periodisch}\right\}\right\}$$

↳ gibt an, wie weit Entr. springen kann

Korr.: $h_{top}(T) \geq \max\left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E,\ c \text{ periodisch} \right\}$

$\Rightarrow$ Entropie stetig $\left(\lim_{\tilde{T} \to T} h_{top}(\tilde{T}) = h_{top}(T) \right)$

Korr.: $h_{top}(T) \geq \log 2 \Rightarrow \lim_{\tilde{T} \to T} h_{top}(\tilde{T}) = h_{top}(T)$

(Druck!)

SATZ: $\limsup_{\substack{\tilde{T} \to T \\ (\|\tilde{f} - f\|_\infty \to 0)}} p(\tilde{T}, \tilde{f})$ (oder $p(\tilde{T}, f)$) $= \max\left\{ p(T, f), \max\left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 + \frac{1}{n(c)} \sum_{j=0}^{n(c)-1} f(T^j c) : c \in E,\ c \text{ period.} \right\} \right\}$

Wann ist der Druck für alle Gew.fkt.en nach oben halbstetig?

SATZ: Es sind äquivalent:

(1) $\forall f: X \to \mathbb{R}$ stetig ist

$\limsup_{\substack{\tilde{T} \to T \\ \|\tilde{f} - f\|_\infty \to 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) \leq p(T, f)$

(2) $\forall f: X \to \mathbb{R}$ stetig mit $\liminf_{\tilde{T} \to T} p(\tilde{T}, f) \geq p(T, f)$ gilt

$\lim_{\tilde{T} \to T} p(\tilde{T}, f) = p(T, f)$

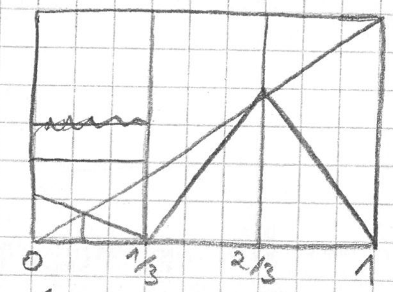
(3) in E gibt es keine period. Punkte

23.1.2012

Prüfung: Mo, 30.1. 17:00 Uhr

Bsp.:

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 2x - \frac{2}{3}, & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 2 - 2x, & \text{für } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



Fixpunkte: Graph ~~schneidet~~ Diagonale

Fixpunkte: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$

$x \in [0, \frac{1}{3}]$: $T^n x \to \frac{1}{9} \Rightarrow \omega(x) = \{\frac{1}{9}\}$

$x \in (\frac{1}{3}, 1) \setminus \{\frac{2}{3}\} \Rightarrow \omega(x) = \{\frac{1}{9}\}$

$\omega(\frac{2}{3}) = \{\frac{2}{3}\}$ weil Fixpunkt

$$h_{top}(T) = \max\{\underbrace{h_{top}(\{\tfrac{1}{9}\}, T)}_{=0}, \underbrace{h_{top}(\{\tfrac{2}{3}\}, T)}_{=0}\} = 0$$

weil endl. Mengen

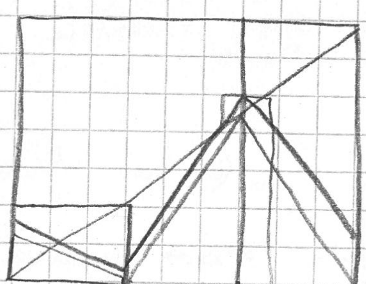
$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig

→ konst. Fkt., die Wert $f(\frac{1}{9})$ hat → $p(f+c) = p(f) + c$

$$p(T, f) = \max\{\underbrace{p(\{\tfrac{1}{9}\}, T, f)}_{= f(\frac{1}{9}) + \underbrace{p(\ )}_{0}}, \underbrace{p(\{\tfrac{2}{3}\}, T, f)}_{= f(\frac{2}{3})}\} =$$

$$= \cancel{f(\tfrac{1}{9})} \max\{f(\tfrac{1}{9}), f(\tfrac{2}{3})\}$$

$\tilde{T}$



$$h_{top}(\tilde{T}) = \max\{\overbrace{h_{top}(\{x_0\}, \tilde{T})}^{=0 \text{ endl. Menge}}, \underbrace{h_{top}(I, \tilde{T})}_{= \log 2}\} = \log 2$$

weil habe 2 Teilintervalle, die jeweils auf ganzes Intervall abgebildet werden

→ bei kleinen Störungen kann Entropie auf $\log 2$ springen mit Formel:

$E = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ $\qquad T\frac{1}{3} = 0 \Rightarrow T^n \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} \quad \forall n$

also $\frac{1}{3}$ nicht periodisch

$\Rightarrow$ spielt hier keine Rolle

$T\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow n\left(\frac{2}{3}\right) = 1, \quad k\left(\frac{2}{3}\right) = 1$

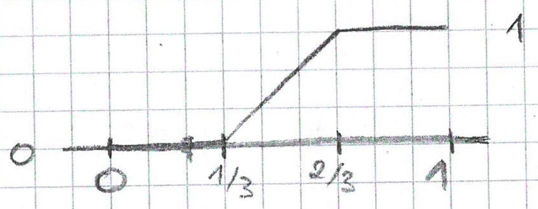
weil ein Punkt davon liegt in Menge drinnen

$$\Rightarrow \liminf_{\tilde{T} \to T} h_{top}(\tilde{T}) = \max\left\{\underbrace{h_{top}(T)}_{=0}, \underbrace{\max\left\{\frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ per.}\right\}}_{= \log 2}\right\} =$$

$= \log 2$ gleiches Ergebnis!

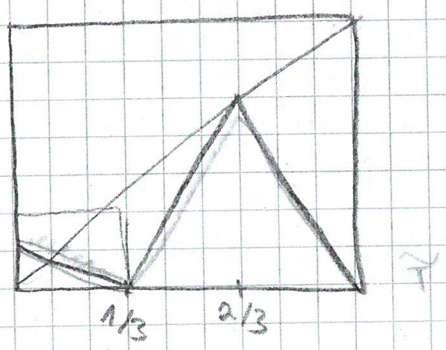
---

f:



Gewichtsfkt. (angegeben)

$p(T, f) = \max\{0, 10\} = 10$



$\tilde{T}$

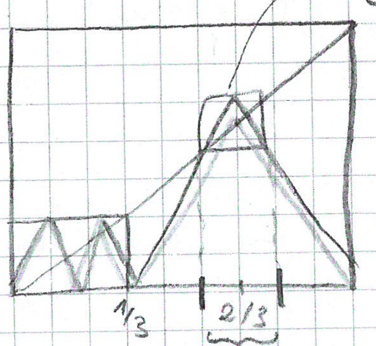
$\tilde{T}$ schneidet nicht mehr Diagonale

$\forall x \in [0,1]: \ \omega_f(x) = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

$p(\tilde{T}, f) = p\left(\left\{\frac{1}{9}\right\}, \tilde{T}, f\right) = f\left(\frac{1}{9}\right) = 0$

Bsp.: T:

neue invariante Menge die chaotisches Verhalten (wie vorher)



$\tilde{T}$

(vorher schon)

d.h. dass neue Menge entsteht, auf der auch Chaos, welches Entropie nicht

$$h_{top} = \max\left\{\underbrace{h_{top}\left(\left[0, \tfrac{1}{3}\right], T\right)}_{= \log 4}, \underbrace{h_{top}\left(\left\{\tfrac{2}{3}\right\}, T\right)}_{=0}\right\} = \log 4$$

$\Rightarrow$ Entropie stetig

Sei f wie vorher. ↗ f auf diesem Intervall null

$p(T,f) = \max\{\underbrace{p([0,\tfrac{1}{3}],T,f)}_{=h_{top}([0,\frac{1}{3}],T)=\log 4}, \underbrace{p(\{\tfrac{2}{3}\},T,f)}_{=f(\frac{2}{3})=10}\} = 10.$

$p(\tilde{T},f) = \max\{\underbrace{p([0,\tfrac{1}{3}],\tilde{T},f)}_{=\log 4}, \underbrace{p(I,\tilde{T},f)}_{=10+\underbrace{h_{top}(I,\tilde{T})}_{=\log 2}}\} = 10+\log 2$

auf ganz I const. 10 (weil die geänderte Fkt. genommen)

Druck hat es gemerkt → nach oben gesprungen

Logistisches Modell

$Tx = ax(1-x) \qquad a\in[0,4]$

[Sch] (?)

SATZ von Šarkovskij: (1964) ШАРКОВСЬКИЙ (russisch: ШАРКОВСКИЙ)

Šarkovskij-Ordnung: hier kleinste, $\neq <$

$3 \ll 5 \ll 7 \ll 9 \ll \dots$ alle ungeraden

gerade Zahlen (doppelte von oben)

$\ll \dots \ll 2\cdot 3 \ll 2\cdot 5 \ll 2\cdot 7 \ll \dots$

$\ll 2^2\cdot 3 \ll 2^2\cdot 5 \ll 2^2\cdot 7 \ll \dots$

$2^3, 2^4, \dots$

$\ll \dots$

$\vdots$

reine 2er-Potenzen fehlen

$\ll \dots \ll 2^3 \ll 2^2 \ll 2 \ll 1$

$T: [0,1]\to[0,1]$ stetig, $n\in\mathbb{N}$ so, dass $\exists x$ mit x hat Periode n, $n\ll m \Rightarrow \exists$ Punkt der Periode m

z.B. wenn $\exists$ ~~Perio~~ Pkt. d. P. 6 $\Rightarrow$ gibt alle Perioden außer ungerade Zahlen

5 $\Rightarrow$ alle außer v. 3

→ gibt alle Perioden, die in Ordnung drüber liegen!

SATZ: $h_{top}(T) > 0 \iff \exists$ Punkt einer Periode n, die $\notin \{2^k : k\in\mathbb{N}_0\}$

wenn etw. vor letzter Zeile auftritt $\Rightarrow$ Entropie d. Periode >0; + umgekehrt

Bowen, Franks, Misiurewicz, Jonker, Rand 1975 - 1980

↱ Bevölkerung stirbt aus

ein logistisches Modell: $a \in [0,1]$ $\quad T^n x \to 0 \quad \forall x$

$a \geq 1$: $1-\frac{1}{a}$ Fixpunkt

↳ zumindest hier stirbt Bev. nicht aus

$a \leq 3$: $x \in (0,1) \Rightarrow T^n x \to 1-\frac{1}{a}$ hier diesen stabilen Fixpunkt

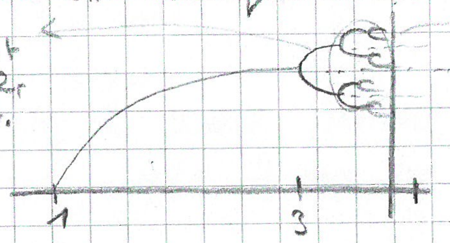
$a > 3$: Fixpunkt wird instabil, stabiler Punkt der Periode 2 entsteht

bis zu gewissen Wert stabil, dann instabil

dann entsteht Orbit d. P. 4, der irgendwann instabil

⇒ * st. Pkt. d. P. 8

Orbit d. P. 2, der inst.



ab best. Pkt. Chaos, dann totales Chaos

wird instabil, periodischer Punkt (stabil) der Periode 4 entsteht

bei $a=4$ totales Chaos

·) lineare DGLen mit konst. Koeff.

(bissi Analysis, viel Lin Alg)

·) nicht lin. DGLen

(viel , bissi)

immer sofort gewusst dass Lsg. weil Methode gezeigt, wenn aber Lsg.

hier nicht klar ⇒ Existenz- & Eind.satz

(Banach'sche Fixpunktsatz)

⇒ Methoden, aber trotzdem nicht alle Lsgn.

⇒ qualitative Theorie

Ljapunov ⇒ NICHT, aber Satz v. Hartm. R.T.

(anwenden)

$$x(1) \approx \underbrace{\frac{h}{6}}_{\frac{1}{6}} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \frac{65}{24} = 2{,}708\overline{3}$$

Schritte	Fehler
10	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$
100	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$
1000	$2{,}3 \cdot 10^{-14}$

$$\dot{x} = f(t) \quad , x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$$

EULER: $h \underbrace{f(x(t), t)}_{= f(t)} = h f(t)$ Riemann-Summe mit linkem Randwert

HEUN: $k_1 = f(x(t), t) = f(t)$

$k_2 = f(x(t) + hk_1, t+h) = f(t+h)$

$\frac{h}{2}(k_1 + k_2) = \frac{h}{2}\left(f(t) + f(t+h)\right)$ Trapezformel

RUNGE-KUTTA: $k_1 = f(x(t), t) = f(t)$

$k_2 = f(x(t) + \frac{h}{2} k_1, t + \frac{h}{2}) = f(t + \frac{h}{2})$

$k_3 = f(x(t) + hk_3, t+h) = f(t+h)$

$\frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \frac{h}{6}\left(f(t) + 4f(t+\frac{h}{2}) + f(t+h)\right)$

Simpsonregel.

Beispiel:

$\dot{x} = x$, $x(0) = 1$, wollen $x(1)$

$x(t) = e^{t}$ $\qquad x(1) = e \approx 2{,}718281828 5$

Euler: $n=1$: $x(1) = \underbrace{x(0)}_{=1} + 1 \cdot \underbrace{f(x(0), 0)}_{=\underbrace{x(0)}_{=1}} = 2$

Schritte	Fehler
100	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$
1000	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$

Heun: $n=1$: $k_1 = f(x(0), 0) = 1$

$k_2 = f(x(0) + \underbrace{h}_{=1}, h) = x(0) + 1 = 2$

$$x(1) = \underbrace{x(0)}_{=1} + \underbrace{\frac{h}{2}}_{=\frac{1}{2}}(k_1 + k_2) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

Schritte	Fehler
10	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$
100	$4{,}5 \cdot 10^{-5}$
1000	$4{,}6 \cdot 10^{-7}$

Runge-Kutta: $n=1$: $k_1 = 1$

$k_2 = f(\underbrace{x(0) + \frac{h}{2} k_1}_{\frac{3}{2}}, 0 + \frac{h}{2}) = \frac{3}{2}$

$k_3 = f(x(0) + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot k_2}_{=3/4}, \frac{h}{2}) = \frac{7}{4}$

$k_4 = f(x(0) + \underbrace{h k_3}_{=7/4}, h) = \frac{11}{4}$