Warum ist $\sqrt{2}$ eine reelle Zahl?

$$x = \sqrt{2} \iff x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0$$

Betrachte $f(x) := x^2 - 2$ ist stetig (Zwischenwertsatz anwenden)

$f(0) = -2 < 0$

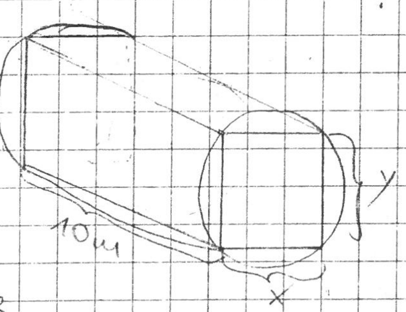
$f(2) = 2 > 0$

$\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Longrightarrow}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ $\square$

Beispiel:

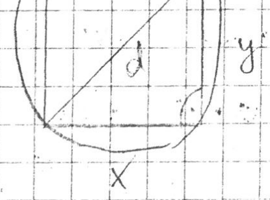
Aus einem 10 m langen Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt mit 80 cm Durchmesser soll ein quaderförmiger Balken ausgeschnitten werden, dessen Tragkraft möglichst groß ist.

Welche Abmessungen soll dieser Balken haben?



Tragkraft: $\underset{>0}{\beta} \cdot \underset{\text{Grundfläche}}{G} \cdot \underset{\text{Höhe}}{h^2}$ (Konstante) $= \underset{>0}{\alpha} \cdot x \cdot y^2$ $\qquad y^2 = d^2 - x^2$

Def: $f: [0, d] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \alpha \cdot x (d^2 - x^2) = \alpha d^2 x - \alpha x^3$



$f'(x) = \alpha d^2 - 3\alpha x^2$

$\alpha d^2 - 3\alpha x^2 = 0 \iff x = \frac{d}{\sqrt{3}}$

→ 2. Ableitung nicht wichtig, da lokales Maximum!

$f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = \alpha \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot d^2 = \alpha \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot d^3 > 0$

Randwerte einsetzen:

$f(0) = 0$

$f(d) = 0$

$\Rightarrow$ Maximum bei $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$

$x \approx 46{,}188\,cm$

$y \approx 65{,}320\,cm$

IV. Differenzierbarkeit

7.) Die Differentialgleichungen $f' = f$ und $f'' = -f$

Funktion $f(x)$, Ableitung $f'(x)$

$x(t)$ $\dot{x}(t)$ (Physik)

| $x' = 1$ (bei Ableitung nach $t \Rightarrow \dot{x}$ nicht x' !)

Satz:

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt eine differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit
$x(t) = c \cdot e^{at}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
Dabei ist $c = x(0)$.

Beweis:

$\Leftarrow$: $x(t) = c \cdot e^{at}$ $\Rightarrow$ $\dot{x}(t) = \underbrace{c \cdot e^{at}}_{= x(t)} \cdot a = a \cdot x(t)$.

$\Rightarrow$: Setze $y(t) := x(t) \cdot e^{-at}$.

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) \cdot e^{-at} + x(t) \cdot e^{-at} \cdot (-a) =$$
$$= e^{-at} \big(\underbrace{\dot{x}(t) - a\,x(t)}_{=0}\big) = 0$$

$\overset{MWS}{\Rightarrow} \exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{y(t)}_{x(t) \cdot e^{-at}} = c$ $\Rightarrow x(t) = c \cdot e^{+at}$ $\square$

• Radioaktiver Zerfall:

$x(t)$ ... Stoffmenge zur Zeit t

$\dot{x} = -kx \quad , \quad k > 0$

$\Rightarrow x(t) = c \cdot e^{-kt}$

• Luftdruck in Abhängigkeit der Höhe

$p(h)$ .... Luftdruck in der Höhe h

$p'(h) = -a\,p(h) \quad , \quad a > 0$

$\Rightarrow p(h) = c \cdot e^{-ah}$

Satz:

Eine zweimal differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $\ddot{x}(t) = -x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Dabei ist $c_1 = x(0)$ und $c_2 = \dot{x}(0)$.

Beweis:

$\Leftarrow$: $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$\Rightarrow \dot{x} = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$

$\Rightarrow \ddot{x} = -c_1 \cos t - c_2 \sin t = -\underbrace{(c_1 \cos t + c_2 \sin t)}_{x} = -x.$

$\Rightarrow$: Setze $c_1 := x(0)$, $c_2 := \dot{x}(0)$ und

$y(t) := x(t) - (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

$\ddot{y} = -(x - (c_1 \cos t + c_2 \sin t)) = -y$

$y(0) = x(0) - \underbrace{c_1}_{=x(0)} = 0$

$\dot{y}(0) = \underbrace{\dot{x}(0)}_{=c_2} - c_2 = 0$

Definiere $u(t) := y(t)^2 + \dot{y}(t)^2$

implizit ableiten

$\dot{u}(t) = 2y(t) \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot \dot{y}(t) \cdot \underbrace{\ddot{y}(t)}_{-y(t)} = 0$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = c \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$c = u(0) = \underbrace{y(0)}_{=0}{}^2 + \underbrace{\dot{y}(0)}_{=0}{}^2 = 0 \Rightarrow u(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$0 = y(t)^2 + \underbrace{\dot{y}(t)^2}_{\geq 0} \geq y(t)^2 \geq 0$ $\quad 0 \geq y(t)^2 \geq 0 \Rightarrow y(t)^2 = 0$

$\Rightarrow y(t)^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{y(t)}_{x(t) - (c_1 \cos t + c_2 \sin t)} = 0$

$x(t) - (c_1 \cos t + c_2 \sin t) = 0$

$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$\square$

$x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$

(eindimensionale, gewöhnliche) lineare (homogene) Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten n-ter Ordnung.

Dann nennen wir $p(x) := x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung.

B $\dot{x} = ax \Leftrightarrow \dot{x} - ax = 0$

Charakteristisches Polynom: $x - a = p(x)$

Nullstellen: a

Lösung: $x(t) = c \cdot e^{at}$

B Jetzt: $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$

char. Polynom: $p(x) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$

Nullstellen:

$$x = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0}$$

1. Fall: $\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0 < 0$

Lösungen: $a \pm bi$, wobei $b > 0$.

$\alpha_1 = -2a \quad , \quad \alpha_0 = a^2 + b^2$

2. Fall: $\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0 > 0$: 2 reelle Lösungen $a_1 \neq a_2$

$\alpha_1 = -(a_1 + a_2) \quad , \quad \alpha_0 = a_1 a_2$

3. Fall: $\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0 = 0$: $a \in \mathbb{R}$ ist doppelte (2-fache) Nullstelle

$\alpha_1 = -2a \quad , \quad \alpha_0 = a^2$

Satz:

Es seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Weiters sei $p(x) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ das charakteristische Polynom von $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$.

Dann gelten:

1) Falls p als Nullstellen $a \pm bi$ mit $b > 0$ hat, dann erfüllt eine 2-mal differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $x(t) = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

2) Falls p die Nullstellen $a_1 \neq a_2 \in \mathbb{R}$ hat, dann $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0 \iff \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $x(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

3) Falls p die Zahl $a \in \mathbb{R}$ als 2-fache Nullstelle hat, dann $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0 \iff \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $x(t) = c_1 t e^{at} + c_2 e^{at} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

1.) $\Leftarrow$: $x = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt$

$\dot{x} = e^{at} \cdot \cos bt \, (c_1 a + c_2 b) + e^{at} \cdot \sin bt \, (-c_1 b + c_2 a)$

$\ddot{x} = e^{at} \cdot \cos bt \, (c_1(a^2-b^2) + c_2 2ab) + e^{at} \sin bt \, (c_1(-2ab) + c_2(a^2-b^2))$

$$\ddot{x} + \underbrace{\alpha_1}_{=-2a} \dot{x} + \underbrace{\alpha_0}_{=a^2+b^2} x =$$

$$= e^{at} \cos bt \left(c_1 \underbrace{\left((a^2-b^2) - 2a^2 + a^2 + b^2\right)}_{=0} + c_2 \underbrace{(2ab - 2ab)}_{=0} \right) +$$

$$+ e^{at} \sin bt \left(c_1 \underbrace{(-2ab + 2ab)}_{=0} + c_2 \underbrace{\left((a^2-b^2) - 2a^2 + a^2 + b^2\right)}_{=0} \right) =$$

$$= \underline{\underline{0}}.$$

$\Rightarrow$: Setze $y(t) := e^{-\frac{a}{b} \cdot t} \cdot x\left(\frac{t}{b}\right)$.

Wenn wir bt für t ersetzen:

$$y(bt) = e^{-at} \cdot x(t) \iff x(t) = e^{at} y(bt)$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\frac{a}{b} t} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) + e^{-\frac{a}{b} \cdot t} \cdot \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{b} e^{-\frac{a}{b} \cdot t} \left(\dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - a \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) \right)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{a}{b} \cdot t} \left(-\frac{a}{b} \left(\dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - a x\left(\frac{t}{b}\right) \right) + \frac{1}{b} \left(\ddot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - a \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot e^{-\frac{a}{b} \cdot t} \left(\underbrace{\ddot{x}\left(\frac{t}{b}\right)}_{= -\underbrace{\alpha_1}_{=-2a} \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - \underbrace{\alpha_0}_{=a^2+b^2} x\left(\frac{t}{b}\right)} - 2a \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) + a^2 x\left(\frac{t}{b}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot e^{-\frac{a}{b} \cdot t} \left(-b^2 x\left(\frac{t}{b}\right) \right) =$$

$$= -\underbrace{e^{-\frac{a}{b} \cdot t} x\left(\frac{t}{b}\right)}_{y(t)} = -y(t)$$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \cdot \sin t$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{at} \cdot \cos bt + c_2 e^{at} \cdot \sin bt.$

2.) $\Leftarrow$: $x = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t}$.

$\dot{x} = c_1 a_1 \cdot e^{a_1 t} + c_2 a_2 \cdot e^{a_2 t}$

$\ddot{x} = c_1 \cdot a_1^2 \cdot e^{a_1 t} + c_2 a_2^2 \cdot e^{a_2 t}$

$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x =$ a_1 bzw. a_2 ins charakt. Polynom eingesetzt

$= c_1 e^{a_1 t} (\underbrace{a_1^2 + \alpha_1 a_1 + \alpha_0}_{=0}) + c_2 \cdot e^{a_2 t} (\underbrace{a_2^2 + \alpha_1 a_2 + \alpha_0}_{=0}) = \underline{\underline{0}}.$

$\Rightarrow$: Setze $y_1(t) := \dot{x}(t) - a_2 x(t)$ und

$y_2(t) := \dot{x}(t) - a_1 x(t)$

2 Hilfsfkt. subtrahieren und auf $x(t)$ umformen $\Rightarrow x(t) = \frac{1}{a_1 - a_2} (y_1(t) - y_2(t))$

$\dot{y}_1 = \underbrace{\ddot{x}}_{} - a_2 \dot{x} = a_1 \dot{x} - a_1 a_2 x = a_1 \underbrace{(\dot{x} - a_2 x)}_{y_1} = a_1 y_1$

$= -\underbrace{\alpha_1}_{= -(a_1 + a_2)} \dot{x} - \underbrace{\alpha_0}_{= a_1 a_2}$

$= a_1 \cdot a_2$

$\Rightarrow \exists\, d_1 \in \mathbb{R}: \ y_1(t) = d_1 \cdot e^{a_1 t}$

Analog: $\dot{y}_2 = a_2 \cdot y_2 \Rightarrow \exists\, d_2 \in \mathbb{R}: \ y_2(t) = d_2 \cdot e^{a_2 t}$

$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\frac{d_1}{a_1 - a_2}}_{:= c_1} \cdot e^{a_1 t} + \underbrace{\left(-\frac{d_2}{a_1 - a_2}\right)}_{:= c_2} \cdot e^{a_2 t}$

3.) $\Leftarrow$: $x = c_1 \cdot t e^{at} + c_2 \cdot e^{at}$

$\dot{x} = c_1 \cdot at \cdot e^{at} + e^{at} (a c_2 + c_1)$

$\ddot{x} = c_1 a^2 t e^{at} + e^{at} (a^2 c_2 + 2a c_1)$

$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x =$

$= c_1 t \cdot e^{at} (\underbrace{a^2 + \alpha_1 a + \alpha_0}_{=0}) + e^{at} (c_2 (\underbrace{a^2 + \alpha_1 a + \alpha_0}_{=0}) + c_1 \underbrace{(2a + \overbrace{\alpha_1}^{=-2a})}_{=0}) =$

$= 0.$

$\Rightarrow$: $y(t) := e^{-at} \cdot x(t) \quad (\Leftrightarrow x(t) = e^{at}\, y(t))$

oduk- egel

$$\dot y = e^{-at}(-a x + \dot x)$$

$$\ddot y = e^{-at}\big((a^2 x - a\dot x) + (-a\dot x + \ddot x)\big) =$$

$= (\dot y)^\cdot$

$$= e^{-at}\underbrace{(\ddot x \underbrace{-2a}_{=\alpha_1}\dot x + \underbrace{a^2}_{=\alpha_0} x)}_{=0} = 0$$

$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists\, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $\dot y(t) = c_1 \quad \forall t$

Setze $u(t) := y(t) - c_1(t) \quad (\Leftrightarrow y(t) = c_1 t + u(t))$

$$\dot u = \underbrace{\dot y}_{= c_1} - c_1 = 0.$$

$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists\, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = c_2$

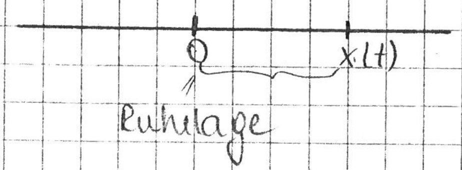
$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 t + c_2$

$\Rightarrow \quad x(t) = c_1 t \cdot e^{at} + c_2 e^{at}$

$\square$

Beispiel:

Harmonische Schwingung:



$$\ddot x(t) = -a x(t) - r\dot x \qquad a, r > 0\ ; \quad a > \frac{r^2}{4}$$

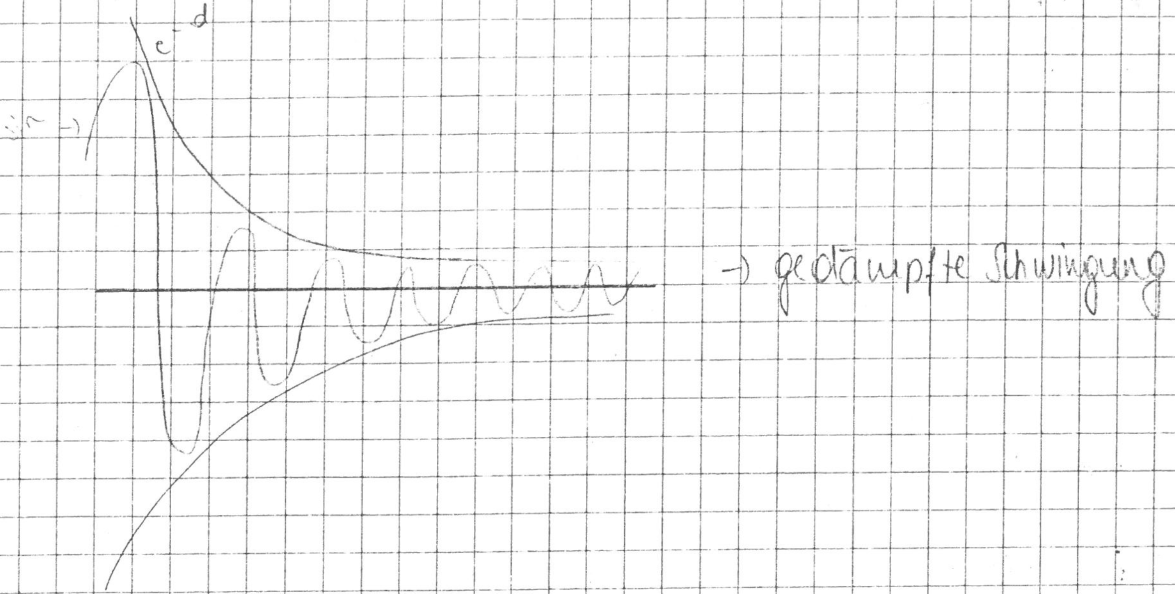
$$\ddot x + r\dot x + a x = 0$$

Negatives unter der Wurzel $\Rightarrow i$

$$p(x) = x^2 + r x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - a} =$$

$$= -\frac{r}{2} \pm i\sqrt{a - \frac{r^2}{4}}$$

Lösung: $x(t) = c_1 e^{\ldots} \cdot \cos(\sqrt{a - \frac{\ldots}{4}}\, t) + c_2 e^{\ldots} \sin(\sqrt{a - \frac{\ldots}{4}} \cdot t)$.



Satz:

> Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt eine differenzierbare Funktion $x: (-1,1) \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\underline{(1+t)\,\dot{x}(t) = \alpha \cdot x(t)}, \forall t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $\underline{x(t) = c\,(1+t)^{\alpha}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
> Weiters gilt: $c = x(0)$.

Beweis:

$\Leftarrow$: $(1+t)\underbrace{\dot{x}}_{c\cdot\alpha\,(1+t)^{\alpha-1}} = \alpha\,\underbrace{c\,(1+t)^{\alpha}}_{=x} = \alpha x$

$\Rightarrow$: Setze: $y(t) := x(t)\,(1+t)^{-\alpha}$

$$\dot{y} = \dot{x}\,\underbrace{(1+t)^{-\alpha}}_{(1+t)\,(1+t)^{-\alpha-1}} + x(-\alpha)\,(1+t)^{-\alpha-1} =$$

$$= (1+t)^{-\alpha-1}\,\underbrace{\left((1+t)\cdot\dot{x} - \alpha x\right)}_{0} = 0$$

MWS
$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$: mit $\underbrace{y(t)}_{= x(t)\cdot(1+t)^{-\alpha}} = c \Rightarrow x(t) = c\cdot(1+t)^{\alpha}$ $\square$

Beispiele:

a.) $\dot{x} = 7x$ $\quad \dot{x} - 7x = 0 \quad p(\lambda) = x - 7$, $x - 7 = 0$, $x = 7$

$\underline{x(t) = c \cdot e^{7t}}$ (Lösung)

b.) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$

char. Polynom: $x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$.

$\rightarrow$ einsetzen:

$\underline{x(t) = c_1 e^t \cdot \cos t + c_2 e^t \cdot \sin t}$.

c.) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$, $\quad x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 7$

char. Polynom: $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1, 3$.

1 und 3

$\underline{x(t) = c_1 e^{1t} + c_2 e^{3t}}$ (allg. Lösung)

$1 = x(0) = c_1 + c_2$

$\dot{x} = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t}$

$7 = \dot{x}(0) = c_1 + 3c_2$

I: $c_1 + c_2 = 1$
II: $c_1 + 3c_2 = 7$

$c_1 = -2$
$c_2 = 3$

$\leftarrow$ einsetzen

$\underline{x(t) = -2 \cdot e^t + 3 \cdot e^{3t}}$

d.) $\ddot{x} - 8x + 16x = 0$

char. Polynom: $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $4 \pm \sqrt{16-16} = 4$ (2-fache Nullstelle)

$\underline{x(t) = c_1 \cdot t \cdot e^{4t} + c_2 t \cdot e^{4t}}$

e.) $(1+t)\,\dot{x} = 23x$

$\underline{x(t) = c \cdot (1+t)^{23}}$

Horner Schema: → bei Prüfung unbedingt verwenden

$x^3 - 12x + 16$

(Nullstellen ausrechnen: beim Ausprobieren: Teiler von 16 verwenden)

Teiler d. absoluten Gliedes	1	0	−12	16
		$1\cdot1+0$	$1\cdot1-12$	$1\cdot(-11)+16$
1	1	1	−11	5 ← Funktionswert an der Stelle 1
−1	1	−1	−11	27
2	1	2	−8	0 → Nullstelle

Ergebnisse des Polynoms

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$-1 \pm \sqrt{1+8} = -4, 2$ ⇒ 2 ist doppelte Nullstelle

10.) Funktionenfolgen

Folge (f_n) von Funktionen $f_n : M \to \mathbb{R}$ oder etwas anderes (z.B. $\mathbb{C}$)

$$f_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} \cdot x^{2j-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sin x$$

Definition

$f_n, f : M \to \mathbb{R}$. Wir sagen f_n konvergiert punktweise gegen f ($f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ punktweise), falls $\forall x \in M : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

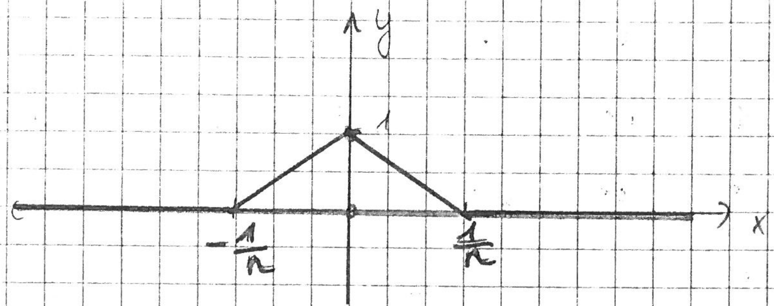
$\forall x \in M : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

N_ε

Beispiel:

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |x| \geq \frac{1}{n} \\ 1 - n|x| & \text{, falls } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$



$f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f$, wobei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$ → Grenzfunktion (blau)

f_n stetig, aber f ist nicht stetig

$f_n \to f$ punktweise $\Leftrightarrow \forall x \in M : \forall \varepsilon > 0 : \exists \underbrace{N}_{N(\varepsilon, x)} \; \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definition Grenzwert

N hängt von x & ε ab

Definition:

> $f_n, f : M \to \mathbb{R}$. Dann sagen wir f_n __konvergiert gleichmäßig gegen f__, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \underbrace{N}_{N(\varepsilon)} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in M$

$f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f_n \to f$ punktweise

(Umkehrung im Allgemeinen falsch!)

Definition

$f: M \to \mathbb{R}$, definiere $\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)|$.
(Supremumsnorm, Unendlichnorm).
($\|f\|_\infty \geq 0$, kann aber $+\infty$ sein)

Eigenschaften:

1.) $\|f\|_\infty \geq 0$
2.) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$
3.) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
4.) $\|f+g\|_\infty = \underbrace{\sup |f(x)+g(x)|}_{\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \underbrace{|g(x)|}_{\leq \|g\|_\infty}} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$f_n \to f$ gleichmäßig $\iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$

Proposition:

$I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f_n, f: I \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig. Weiters sei $x \in I$. Falls f_n stetig in x. $\forall n$, dann ist f stetig in x.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N: \forall n \geq N: \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.
Fixiere $n \geq N$. f_n ist stetig in $x \Rightarrow \exists \delta > 0$
$\forall y$ mit $|y-x| < \delta$: $|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Sei y so, dass $|y-x| < \delta$. Dann ist

$$|f(y)-f(x)| \leq \underbrace{|f(y)-f_n(y)|}_{\leq \|f-f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(y)-f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} \underline{\underline{< \varepsilon}}$$

$\square$

$\to f$ stetig in x

Bemerkung:

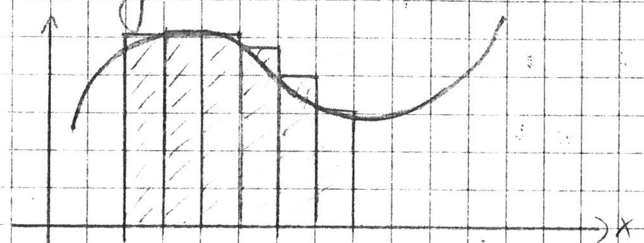
f_n differenzierbar, $f_n \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} f \not\Rightarrow f$ differenzierbar

Beispiel:

$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ auf $[-1, 1]$

$f_n \to |x|$

V. Integral



Fläche (stimmt nicht ganz)

„orientierte" Fläche (positiv!)

noch besser: Mittelwerteigenschaft

1.) Das Riemann-Integral

Definition

Wir nennen $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$, falls $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Die Familie aller Partitionen bezeichnen wir mit $\mathcal{P}$.

Falls P Partition, dann heißen $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ Zwischenwerte $\tilde{P}$ für P, falls $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$: $\tilde{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

Eine Partition Q heißt Verfeinerung von P, falls $Q \supseteq P$.

... P (Partition)

... $\tilde{P}$ (Zwischenwerte)

... Q (Verfeinerung)
$Q \supseteq P$

Definition

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, P eine Partition ($P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), $\tilde{P}$ ($\tilde{P} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$) Zwischenwerte für P.

Dann heißt:

$$S(f, P, \tilde{P}) := \sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)\,(x_j - x_{j-1})$$

die <u>Riemann-Summe</u> von f (bezüglich P und $\tilde{P}$).

Definition

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, P Partition, f beschränkt.

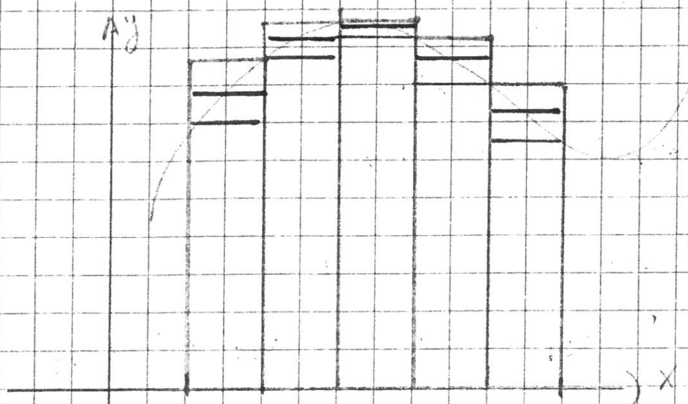
Dann heißt:

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)\right)}_{:= M_j} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

die <u>Obersumme</u> von f und

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{j=1}^{n} \left(\inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)\right) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

die <u>Untersumme</u> von f.



Obersumme

Untersumme

Riemann-Summe (zw. Ober- und Untersumme)

Proposition:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

1.) $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, $P_1 \subseteq P_2$: $\overline{S}(f, P_2) \leq \overline{S}(f, P_1)$,

↳ Verfeinerung $\qquad \underline{S}(f, P_2) \geq \underline{S}(f, P_1)$

2.) $P \in \mathcal{P}$, $\tilde{P}$ Zwischenwerte $\Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq S(f,P,\tilde{P}) \leq \overline{S}(f,P)$

3.) $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$: $\underline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_2)$

Beweis:

1.) $\overline{S}(f, P_2) = \sum \sup f(y) \cdot (y_j - y_{j-1}) =$

$$= \sum_{P_1} \sum_{[y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{k-1}, x_k]} (\overbrace{\sup f(y)}^{\leq \sup f(x)}) \, (y_j - y_{j-1})$$

$$\leq \sum_{P_1} (\sup f(x)) \cdot \underbrace{\sum (y_j - y_{j-1})}_{= (x_k - x_{k-1})} = \overline{S}(f, P_1)$$

Analog: $\underline{S}(f, P_2) \geq \underline{S}(f, P_1)$ (geht gleich, nur: Abschätzungen in die andere Richtung)

2.) $$S(f, P, \tilde{P}) = \sum_{j=1}^{\tilde{\ }} \underbrace{f(\tilde{x}_j)}_{\substack{\leq \sup f(x) = M_j \\ x \in [x_{j-1}, x_j]}} (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{\tilde{\ }} M_j (x_j - x_{j-1}) = \overline{S}(f, P)$$

Analog: $\underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \tilde{P})$

3.) $P_1 \cup P_2$ ist Verfeinerung von P_1 und von P_2

$$\underline{S}(f, P_1) \underset{1.)}{\leq} \underline{S}(f, P_1 \cup P_2) \underset{2.)}{\leq} \overline{S}(f, P_1 \cup P_2) \underset{1.)}{\leq} \overline{S}(f, P_2)$$

□

Definition

↗ komplizierte

Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt <u>Riemann-integrierbar</u>, falls $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ mit: $\forall\varepsilon>0:\exists P\in\mathcal{P}:\forall Q\in\mathcal{P}$ mit $Q\geq P$ $\forall$ Zwischenwerte $\tilde{Q}$ für Q:

$$|\alpha - S(f,Q,\tilde{Q})|<\varepsilon.$$

Weiters nennt man dann $\int_a^b f(x)\,dx := \alpha \quad \left(=\int_a^b f = \int_a^b f(x)\right)$ das <u>Riemann-Integral</u> von f (auf $[a,b]$).

$$|\alpha - S(f,Q,\tilde{Q})|<\varepsilon \Leftrightarrow \alpha-\varepsilon < S(f,Q,\tilde{Q}) < \alpha+\varepsilon$$

klassisch: $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall$ Partitionen P mit $\underbrace{\sup_{j\in\{1,\dots,n\}}|x_j-x_{j-1}|}_{\text{Spannweite, Maschenweite}}<\delta$

$\forall$ Zwischenwerte $\tilde{P}$: $|\alpha - S(f,P,\tilde{P})|<\varepsilon$.

Proposition (Integral aus Volksschule)

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c(b-a).}$$

<u>Beweis:</u>

$$S(c,Q,\tilde{Q}) = \sum_{j=1}^{n} c\,(x_j-x_{j-1}) = c(b-a)$$

Sei $\varepsilon>0$: $P=\{a,b\}$. Sei $Q\in\mathcal{P}$, $Q\geq P$ und $\tilde{Q}$ Zwischenwerte.

$$|c(b-a)-\underbrace{S(c,Q,\tilde{Q})}_{=c(b-a)}| = 0<\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

$\square$

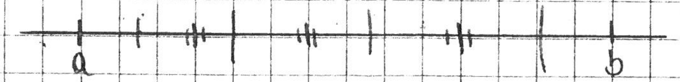
Proposition:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F\subseteq[a,b]$ endlich und $g(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]\setminus F$. Dann ist g Riemann-integrierbar und $\int_a^b g=\int_a^b f$.

g unterscheidet sich von f nur an endl. vielen Punkten

Beweisidee:

F



$\square$

Beispiel

$f:[0,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2, & \text{für } x\neq 3,\\ 783, & \text{für } x=3\end{cases}$ → Fkt unstetig!

$$\int_0^5 f=\int_0^5 2=10.$$

⇒ Riemann-integrierbare Fkt. müssen nicht stetig sein!!
(später: stetig ⇒ Riemann-integrierbar)

Proposition

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $f\leq g$ ($f(x)\leq g(x)\ \forall x$). Dann gilt $\int_a^b f\leq\int_a^b g$. (Monotonie)

Beweis:

$\alpha:=\int_a^b f$ und $\beta:=\int_a^b g$.

Sei $\varepsilon>0$, $\exists P_1\ \forall Q\supseteq P_1\ \forall$ Zw. $\tilde{Q}$:

$|\alpha-S(f,Q,\tilde{Q})|<\varepsilon/2 \Rightarrow \alpha-\varepsilon/2<S(f,Q,\tilde{Q})$

$\exists P_2\ \forall Q\supseteq P_2\ \forall$ Zw. $\tilde{Q}$: $S(g,Q,\tilde{Q})<\beta+\varepsilon/2$

$Q=P_1\cup P_2$ ist sowohl Verfeinerung von P_1 als auch von P_2.

Zw. $\tilde{Q}$: $\alpha-\varepsilon/2<S(f,Q,\tilde{Q})=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{f(\tilde{x}_j)}_{\leq g(\tilde{x}_j)}(x_j-x_{j-1})\leq$

$\leq \sum_{j=1} g(\tilde{x}_j)\,(x_j - x_{j-1}) = S(g, Q, \tilde{Q}) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \alpha < \beta + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \underset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \alpha \leq \beta$

$\square$

Wenn $f \leq g$ und $\exists x_0$ mit $f(x_0) < g(x_0) \Rightarrow \int_a^b f < \int_a^b g$?

Nein, siehe Bsp oben! ¡ Falls f, g stetig: dann ja!

Proposition

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $c \in \mathbb{R}$.
Dann ist $f + g$ und $c \cdot f$ Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f \quad . \quad (\to \text{Linearität}).$$

Beweis:

$\alpha := \int_a^b f$ und $\beta := \int_a^b g$.

Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists P_1 \; \forall Q \geq P_1 \; \forall$ zw. $\tilde{Q}$: $|\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists P_2 \; \forall Q \geq P_2 \; \forall$ zw. $\tilde{Q}$: $|\alpha - S(g, Q, \tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $Q \geq P_1 \cup P_2$, $\tilde{Q}$ zw. zu Q

$|(\alpha + \beta) - \underbrace{S(f+g, Q, \tilde{Q})}| = |(\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})) + (\beta - S(g, Q, \tilde{Q}))| \leq \circledast$

$$= \sum_{j=1}^{n} (f(\tilde{x}_j) + g(\tilde{x}_j))\,(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)\,(x_j - x_{j-1})}_{= S(f, Q, \tilde{Q})} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} g(\tilde{x}_j)\,(x_j - x_{j-1})}_{= S(g, Q, \tilde{Q})}$$

$\overset{\text{}}{\underset{\text{Δ-Ungl}}{\leq}} \underbrace{|\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\beta - S(g, Q, \tilde{Q})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

Daher $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Für $c=0$: $\int_a^b \underbrace{c \cdot f}_{0} = 0 = c \cdot \int_a^b f$.

Falls $c \neq 0$:

Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists P \ \forall Q \overset{\text{Verfeinerung}}{\geq} P \ \forall$ zw. $\tilde{Q}$: $|\alpha - \overset{\text{Riemann-Summe}}{S(f, Q, \tilde{Q})}| < \varepsilon \cdot \frac{1}{|c|}$

Sei $Q \geq P$ und $\tilde{Q}$ zw. zu Q.

$|c \cdot \alpha - S(cf, Q, \tilde{Q})| = |c \cdot (\alpha - S(f, Q, \tilde{Q}))| = |c| \underbrace{|\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})|}_{< \frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon$

$S(cf, Q, \tilde{Q}) = \sum_{j=1}^{n} c f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1}) =$

$= c \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})}_{S(f, Q, \tilde{Q})}$

$\Rightarrow$ Daher $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.

Proposition

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R.i. Dann ist f beschränkt.

Beweis:

Angenommen f wäre unbeschränkt.

$\alpha = \int_a^b f$

$\exists P \ \forall Q \geq P \ \forall$ zw. $\tilde{Q}$: $\overset{\text{vgl } \varepsilon}{1} > \underbrace{|\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})|}_{= |S(f, Q, \tilde{Q}) - \alpha|} \geq |S(f, Q, \tilde{Q})| - |\alpha|$

$\Rightarrow |\alpha| + 1 > |S(f, Q, \tilde{Q})|$.

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, zw. $\underbrace{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)}_{=\tilde{P}}$ für P

$|\alpha| + 1 > |S(f, P, \tilde{P})|$.

Setze $\delta_0 := \min\limits_{j \in \{1,2,\dots n\}} |x_j - x_{j-1}|$.

Weil f unbeschränkt, $\exists x \in [a,b]$ mit $|f(x)| > \max\limits_{j \in \{1,\dots,n\}} |f(\tilde{x}_j)| + \frac{2}{\delta_0}(|\alpha|+1)$

$\exists\, j \in \{1, 2, \dots n\}$ mit $x \in [x_{j-1}, x_j]$.

$\hat{P} := (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{j-1}, x, \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_n)$.

$$|\alpha| + 1 > |\underbrace{S(f, P, \hat{P})}_{-S(f,P,\tilde{P}) + S(f,P,\hat{P})}| = |(S(f,P,\hat{P}) - S(f,P,\tilde{P})) - (-S(f,P,\tilde{P}))| \geq$$

$$\geq |S(f,P,\hat{P}) - S(f,P,\tilde{P})| - \underbrace{|-S(f,P,\tilde{P})|}_{= \underbrace{|S(f,P,\tilde{P})|}_{< |\alpha|+1}} >$$

$$> \underbrace{|S(f,P,\hat{P}) - S(f,P,\tilde{P})|}_{= \underbrace{|(f(x) - f(\tilde{x}_j))(x_j - x_{j-1})|}_{= \underbrace{|f(x) - f(\tilde{x}_j)|}_{\geq \underbrace{|f(x)| - |f(\tilde{x}_j)|}_{\geq \frac{2}{\delta_0}(|\alpha|+1)}} \underbrace{|x_j - x_{j-1}|}_{\geq \delta_0}}} - (|\alpha| + 1) \geq$$

$$\geq \frac{2}{\cancel{\delta_0}}(|\alpha|+1) \cdot \cancel{\delta_0} - (|\alpha|+1) = |\alpha| + 1 \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$|\alpha| + 1 > |\alpha| + 1$
$\Rightarrow$ kann nicht größer als sie selbst sein

Somit ist f beschränkt.

$\square$

Beispiel:

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

f ist nicht R.i, weil f unbeschränkt
↳ $\frac{1}{x}$ geht gegen 0

Satz:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1.) f ist Riemann-integrierbar

2.) f ist beschränkt und $\sup_{P \in \mathcal{P}} \underbrace{\underline{S}}_{\text{Untersumme}}(f,P) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}} \overbrace{\overline{S}}^{\text{Obersumme}}(f,P)$

3.) f ist beschränkt und $\forall \varepsilon > 0 \ \underline{\exists} P \in \mathcal{P}$ mit
$\underbrace{\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)}$ $< \varepsilon$

$$\left(= |\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)| = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \right)$$

Beweis:

1.) ⇒ 3.): f ist beschränkt

Sei $\varepsilon > 0$. $\alpha = \int_a^b f$.

$\exists P \ \forall Q \supseteq P \ \forall$ Zw. $\tilde{Q}$: $\underbrace{|\alpha - S(f,Q,\tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{4}}$

$\Rightarrow \alpha - \frac{\varepsilon}{4} < S(f,Q,\tilde{Q}) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$

Wähle dieses $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Sei $j \in \{1,2,\dots,n\}$. $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1},x_j]} f(x) \Rightarrow \exists \tilde{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ mit

$f(\tilde{x}_j) > M_j - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$.

$m_j = \inf_{x \in [x_{j-1},x_j]} f(x) \Rightarrow \exists \hat{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ mit

$f(\hat{x}_j) < m_j + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$P = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$, $P = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{4} > S(f,P,\tilde{P}) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\tilde{x}_j)}_{> M_j - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}} (x_j - x_{j-1}) >$$

$$> \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1})}_{\overline{S}(f,P)} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})}_{= b-a}}_{= \frac{\varepsilon}{4}} = \overline{S}(f,P) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

! ad Satz: ZUSATZ

$$\boxed{\text{Weiters gilt, falls eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dass } \int_a^b f = \sup_{P \in \mathcal{P}} \underline{S}(f,P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} \overline{S}(f,P).}$$

weis:

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < S(f,P,\hat{P}) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\hat{x}_j)}_{< m_j + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}} (x_j - x_{j-1}) <$$

$$< \underline{S}(f,P) + \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \underline{S}(f,P) > \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\underline{S}(f,P) < -\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} - \alpha + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3.) $\Rightarrow$ 2.) $\beta := \sup_{P \in} \underline{S}(f,P)$, $\gamma := \inf_{P \in \mathcal{P}} \overline{S}(f,P)$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists P \in \mathcal{P}$ mit $\varepsilon > \underbrace{\overline{S}(f,P)}_{\geq \gamma} - \underbrace{\underline{S}(f,P)}_{\leq \beta} \geq \gamma - \beta$

$\Rightarrow \gamma < \beta + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \gamma \leq \beta$.

2.) ⇒ 1.) $\beta := \sup_{P\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,P)$, $\gamma := \inf_{P\in\mathcal{P}} \overline{S}(f,P)$

Seien $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$: $\underline{S}(f,P_1) \le \overline{S}(f,P_2) \quad \forall P_2 \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow \underline{S}(f,P_1) \le \gamma \quad \forall P_1 \in \mathcal{P} \Rightarrow \beta \le \gamma$

Andererseits ist $\gamma \le \beta \Rightarrow \gamma = \beta$.

Sei $\varepsilon > 0$:

$\exists P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit: $\underline{S}(f,P_1) > \beta - \varepsilon$ und
$\overline{S}(f,P_2) < \beta + \varepsilon$.

Verfeinerung

Sei $Q \in \mathcal{P}$, $Q \supseteq P_1 \cup P_2$, $\tilde{Q}$ Zwischenwerte zu Q.
Dann gilt

$\beta - \varepsilon < \underline{S}(f,P_1) \le \underline{S}(f,Q) \le S(f,Q,\tilde{Q}) \le \overline{S}(f,Q) \le \overline{S}(f,P_2) < \beta + \varepsilon$,

also $|S(f,Q,\tilde{Q}) - \beta| < \varepsilon$.

Daher ist f Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \beta = \sup_{P\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,P) = \inf_{P\in\mathcal{P}} \overline{S}(f,P).$$

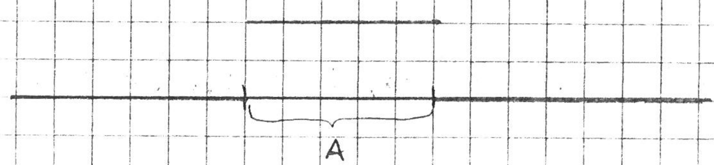
□

charakteristische Funktion einer Menge:

$A \subseteq M$. Dann heißt

- $1_A : M \to \mathbb{R}$, $\quad 1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ heißt

charakteristische Funktion von A.



Beispiel:

$f = 1_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$P \in \mathcal{P}: \ \underline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_j}_{=0} (x_j - x_{j-1}) = 0$ (mind. eine irrationale Zahl liegt im Intervall $\Rightarrow 0$)

$\Rightarrow \sup_{P\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,P) = 0$.

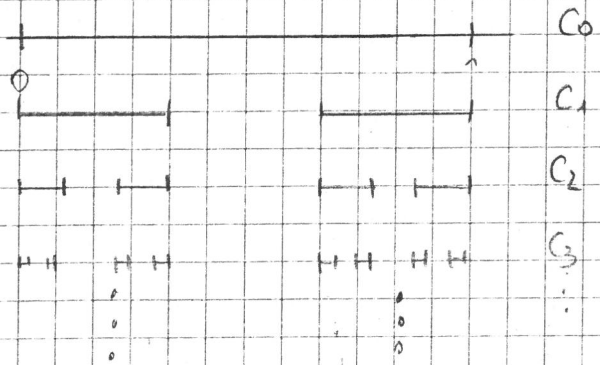
$\overline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}) = 1$ (eine rationale Zahl liegt im Intervall $\Rightarrow 1$)

$\Rightarrow \inf_{P\in\mathcal{P}} \overline{S}(f,P) = 1$

$\Rightarrow$ Also f ist nicht Riemann-integrierbar (obwohl f beschränkt)

Beispiel:

Cantormenge C:



(immer mittleres Drittel weglassen)

$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ ... Cantormenge (überabzählbar)

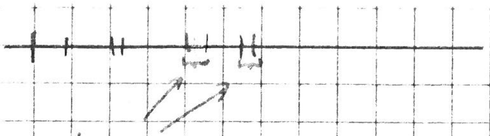
$f = 1_C$.

$\underline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_j}_{\geq 0} (x_j - x_{j-1}) \geq 0$

$\Rightarrow \sup_{P\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,P) \geq 0$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n: \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n} < \varepsilon$.

C_n:



$\leq \frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$

$$\overline{S}(f,P) \underset{(\leq)}{=} 1\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{n\cdot 2^n}\right)\cdot 2^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf_{P\in\mathcal{P}} \overline{S}(f,P) \leq 0 \leq \sup_{P\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,P)$$

$\Rightarrow$ f Riemann-integrierbar
und $\int_0^1 1_C = 0$.

Satz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Weiters sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig (konvergent). Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

(d.h. $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$)

Beweis:

$\alpha_n := \int_a^b f_n$. $M_j := \sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$

$M_j^{(n)} := \sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$; $m_j := \inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$, $m_j^{(n)} := \inf f_n(x)$.

1. Schritt:

Behauptung: f ist Riemann integrierbar.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N$ $\forall n \geq N$: $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Fixiere $n \geq N$. f_n ist R.i. $\Rightarrow \exists P$ mit $\overline{S}(f_n,P) - \underline{S}(f_n,P) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$x\in[x_{j-1},x_j]$: $f(x) \leq \underbrace{f_n(x)}_{\leq M_j^{(n)}} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq M_j^{(n)} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ $\forall x \in [x_{j-1},x_j]$.

Gleichmäßige Konvergenz und Riemann-Integral

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Weiters sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f. Dann ist f Riemann-integrierbar und
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Leicht umgeschrieben steht hier
$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Man kann also Grenzwert und Integral vertauschen.

Beweis

1. Schritt:

Behauptung:

f ist Riemann-integrierbar.

Beweis der Behauptung:

Sei $\epsilon > 0$. Gleichmäßige Konvergenz ist äquivalent zur Konvergenz bezüglich Supremumsnorm, es gibt also ein n mit $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$.
Weil f_n Riemann-integrierbar ist, gibt es eine Partition $P \in \mathcal{P}$ mit $\overline{S}(f_n, P) - \underline{S}(f_n, P) < \frac{\epsilon}{3}$.
Das ist äquivalent zur Riemann-integrierbarkeit und wurde früher schon bewiesen.
$\overline{S}(f, P) =$ (nach Definition von $\overline{S}(f, P)$) $\sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) =$
(Definition von M_j) $= \sum_{j=1}^n \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1})$.
Nach der Ungleichung oben ist $f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$. Im Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ ist natürlich $f_n(x) \leqslant \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x)$.
Insgesamt steht hier also:

$$\overline{S}(f, P) < \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x) \right) (x_j - x_{j-1})}_{=\overline{S}(f_n,P)} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})}_{=b-a} = \overline{S}(f_n, P) + \frac{\epsilon}{3}.$$

vgl. Teleskopsumme

Analog betrachten wir die Untersumme:
$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1})$.
Es ist $m_j > \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x) - \frac{\epsilon}{3(b-a)}$, also insgesamt
$\underline{S}(f, P) > \underline{S}(f_n, P) - \frac{\epsilon}{3}$.
Daher:

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \overline{S}(f_n, P) + \frac{\epsilon}{3} - \left(\underline{S}(f_n, P) - \frac{\epsilon}{3}\right) = \underbrace{\overline{S}(f_n, P) - \underline{S}(f_n, P)}_{<(\text{Anfang d. Beweises})\,\frac{\epsilon}{3}} + 2\frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Somit ist f Riemann-integrierbar.

2. Schritt:

Zu zeigen ist noch, dass man Integral und Grenzwert vertauschen kann, also dass die Differenz von $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^b f_n(x)dx$ gegen 0 konvergiert.
Sei $\epsilon > 0$. Weil f Riemann-integrierbar ist gibt es eine Partition P_1, sodass für alle Verfeinerungen Q von P_1 und für alle Zwischenwerte $\tilde{Q}$ von $Q: \left|\int_a^b f - S(f, Q, \tilde{Q})\right| < \frac{\epsilon}{3}$.
Weil f_n gleichmäßig gegen f konvergiert $\exists\, N: \forall\, n \geqslant N: \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$.
Sei $n \geqslant N$. Weil die f_n alle Riemann-integrierbar sind $\exists\, P_2: \forall\, Q \supseteq P_2\, \forall\, \tilde{Q}$:
$\left|\int_a^b f_n - S(f_n, Q, \tilde{Q})\right| < \frac{\epsilon}{3}$.
Setze $Q := P_1 \cup P_2$, also Q ist die gemeinsame Verfeinerung. Seien $\tilde{Q}$ Zwischenwerte zu Q.
$|S(f, Q, \tilde{Q}) - S(f_n, Q, \tilde{Q})| = \left|\sum_{j=1}^n f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n f_n(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})\right| =$
$= \left|\sum_{j=1}^n (f(\tilde{x}_j) - f_n(\tilde{x}_j))(x_j - x_{j-1})\right| \leqslant$ (Dreiecksungleichung) $\leqslant$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \underbrace{|f(\tilde{x}_j) - f_n(\tilde{x}_j)|}_{< \frac{\epsilon}{3(b-a)} \text{ wegen} \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3(b-a)}} (x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})}_{=b-a} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Jetzt die entscheidende Ungleichung:
$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| =$
$= \left|\int_a^b f(x)dx - S(f, Q, \tilde{Q}) + S(f, Q, \tilde{Q}) - S(f_n, Q, \tilde{Q}) + S(f_n, Q, \tilde{Q}) - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leqslant$

$$\leqslant \underbrace{\left|\int_a^b f(x)dx - S(f, Q, \tilde{Q})\right|}_{< \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|S(f, Q, \tilde{Q}) - S(f_n, Q, \tilde{Q})|}_{< \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\left|(f_n, Q, \tilde{Q}) - \int_a^b f_n(x)dx\right|}_{< \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon.$$

Also $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

$\Rightarrow M_j \leq M_j^{(n)} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Analog: $m_j \geq m_j^{(n)} - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{M_j}_{\leq M_j^{n} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}} (x_j - x_{j-1}) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_j^{n} (x_j - x_{j-1})}_{= \overline{S}(f_n,P)} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})}_{= b-a}$$

$$= \overline{S}(f_n P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Analog: $\underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f_n,P) - \frac{\varepsilon}{3}$

Daher ist $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f_n,P) + \frac{\varepsilon}{3} - \underline{S}(f_n,P) + \frac{\varepsilon}{3} =$

$$= \underbrace{\overline{S}(f_n,P) - \underline{S}(f_n,P)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f ist Riemann-integrierbar $\diamond$

2. Schritt:

$\alpha := \int_a^b f$.

Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists N \; \forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

$\exists P \in \mathcal{P} : \forall Q \supseteq P : \forall \tilde{Q}$ zw. $|\alpha - S(f,Q,\tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $n \geq N$. $\exists P_n \; \forall Q \supseteq P_n \; \forall \tilde{Q}$ zw.: $|\alpha_n - S(f_n,Q,\tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $Q \in \mathcal{P}$ mit $Q \supseteq P \cup P_n$, seien $\tilde{Q}$ zw. von Q

$$|\underbrace{S(f,Q,\tilde{Q})}_{= \sum_{j=1}^{k} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})} - \underbrace{S(f_n,Q,\tilde{Q})}_{= \sum_{j=1}^{k} f_n(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})}| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{k} (f(\tilde{x}_j) - f_n(\tilde{x}_j))(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|f(\tilde{x}_j) - f_n(\tilde{x}_j)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}} (x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

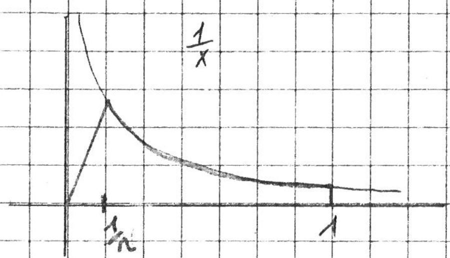
$$|\alpha_n - \alpha| \leq \underbrace{|\alpha_n - S(f_n, Q, \tilde{Q})|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S(f_n, Q, \tilde{Q}) - S(f, Q, \tilde{Q})|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S(f, Q, \tilde{Q}) - \alpha|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

2 x Δ-Ungl anwenden

□

Punktweiser Grenzwert

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$



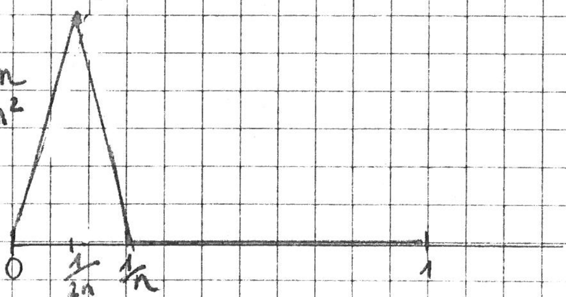
f_n Riemann integrierbar.

$$f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f ist nicht Riemann-integrierbar. (weil unbeschränkt)

Beispiel:

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$



$f_n \xrightarrow{\text{punktw.}} 0$

$\int 0 = 0.$

$$\lim \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

(⇒ bei punktweise konvergent darf ich Integral nicht mit limes vertauschen)

$$\lim \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot n^2 = \frac{n}{2} \to +\infty.$$

Proposition

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Dann ist $|f|$ Riemann integrierbar und $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Beweisidee:

$|f(x)|-|f(y)| \le |f(x)-f(y)| \Rightarrow \sup|f| - \inf|f| \le \sup f - \cancel{\sup f}\ \inf f$

$\overline{S}(|f|,P) - \underline{S}(|f|,P) \le \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)$

$\underbrace{|S(f,Q,\tilde{Q})|}_{\to \int_a^b f} = \left|\sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})\right| \le \sum_{j=1}^{n} |f(\tilde{x}_j)|(x_j-x_{j-1}) = \underbrace{S(|f|,Q,\tilde{Q})}_{\to \int_a^b |f|}$

$\square$

Proposition

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R.i. und seien $a_1 < b_1 \in [a,b]$. Dann ist f R.i. auf $[a_1,b_1]$.

Wenn Fkt auf Intervall integr., dann auch auf Teilintervall

Beweis:

Sei $\varepsilon>0$. $\exists P$ um $[a,b]$ mit $\overline{S}_a(f,P) - \underline{S}_a(f,P) < \varepsilon$.

← Partition von $[a,b]$

← Partition $\hat{P}$

Setze $\hat{P} := (P \cap [a_1,b_1]) \cup \{a_1,b_1\}$

$\overline{S}_{a_1}(f,\hat{P}) - \underline{S}_{a_1}(f,\hat{P}) = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \le$

$\le \overline{S}_a(f,P) - \underline{S}_a(f,P) < \varepsilon \Rightarrow f$ ist R.i. auf $[a_1,b_1]$.

$\square$

Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

$f: M \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, falls $\forall a<b \in M$ mit $[a,b] \subseteq M$, f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ ist.

Achtung:

f Riemann integrierbar auf M $\not\Rightarrow$ $\int_M f \; \exists$.

Proposition

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Fkt., $c \in (a,b)$. Falls f Riemann integrierbar auf $[a,c]$ und f R.i auf $[c,b]$, dann ist f R.i. auf $[a,b]$ und es gilt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Beweis:

Setze $\alpha := \int_a^c f$ und $\beta := \int_c^b f$.

Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists P_1 = \{p_{1,0} = a, p_{1,1}, \dots, p_{1,n_1} = c\}$ $\forall Q_1 \geq P_1$ $\forall \tilde{Q}_1: |S_{[a,c]}(f, Q_1, \tilde{Q}_1) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists P_2 = \{p_{2,0} = c, p_{2,1}, \dots, p_{2,n_2} = b\}$ $\forall Q_2 \geq P_2$ $\forall \tilde{Q}_2: |S_{[c,b]}(f, Q_2, \tilde{Q}_2) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Setze $P := \{p_{1,0} = a, p_{1,1}, \dots, p_{1,n_1} = p_{2,0}, p_{2,1}, \dots, p_{2,n_2} = b\}$ Partition von $[a,b]$.

Sei $Q \geq P$. $Q = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_k = c, x_{k+1}, \dots, x_n = b\}$

sei $\tilde{Q}$ zu. zu Q.

$Q_1 := \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, $\tilde{Q}_1 := (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$, $Q_1 \geq P_1$,

$Q_2 := \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$, $\tilde{Q}_2 := (\tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n)$, $Q_2 \geq P_2$.

$$S_{[a,b]}(f,Q,\tilde{Q}) = \sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{k} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})}_{= S_{[a,c]}(f,Q_1,\tilde{Q}_1)} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})}_{= S_{[c,b]}(f,Q_2,\tilde{Q}_2)}$$

$$|(\alpha+\beta) - S_{[a,b]}(f,Q,\tilde{Q})| \le$$

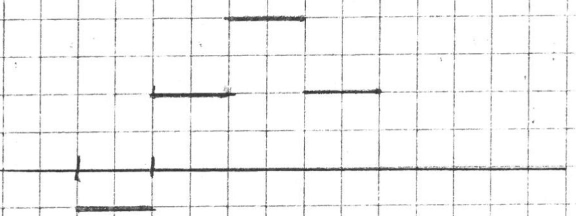
$$\le \underbrace{|\alpha - S_{[a,c]}(f,Q_1,\tilde{Q}_1)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\beta - S_{[c,b]}(f,Q_2,\tilde{Q}_2)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon. \qquad \square$$

Klassische Treppenfunktionen:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ Teilintervalle von $[a,b]$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha_j & \text{, falls } x_j \in A_j \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$



A Intervall: $|A|$ ... Länge von A

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$

Intervalllänge

$$A_j = \begin{cases} [a_j, b_j] \\ (a_j, b_j) \\ [a_j, b_j) \\ (a_j, b_j] \end{cases} \qquad \int_{a_j}^{b_j} \underbrace{\alpha_j \mathbb{1}_{A_j}}_{= \alpha_j} = \alpha_j \overbrace{(b_j - a_j)}^{= |A_j|}$$

außer bei (a_j, b_j) → Randpunkte mit f!

$$\Rightarrow \int_a^b f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |A_j|.$$

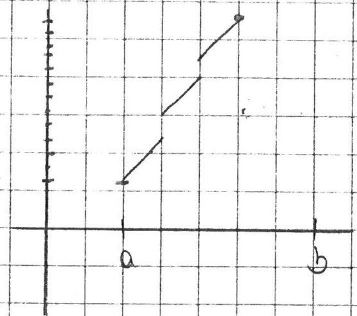
Satz

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton. Dann ist f Riemann integrierbar.

Beweis:

f ist monoton wachsend. (für monoton fallende analog)

Sei $n\in\mathbb{N}$. Wähle $y_0 < f(a)$, $y_0<y_1<y_2<\dots<y_k$, $y_k > f(b)$, $|y_j - y_{j-1}| < \frac{1}{2n}$



$$f_n := \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbb{1}_{f^{-1}(\underbrace{[y_{j-1},y_j)}_{\text{Intervall}})}$$

f_n ist klassische Treppenfunktion ($\Rightarrow$ R.i.)

$\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$

$\underbrace{f_n}_{R.i.} \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ f ist Riemann integrierbar $\square$

$f:[a_0,b_0]\to\mathbb{R}$ R.i., $a,b\in[a_0,b_0]$.

Definition

$$\int_a^b f \left(= \int_a^b f(x)\,dx\right) := \begin{cases} \text{wie zuvor}, & \text{falls } a<b \\ 0, & \text{falls } a=b \\ -\int_b^a f, & \text{falls } a>b. \end{cases}$$

Bemerkungen

$\int_b^a f = -\int_a^b f$

$$\int_a f = \int_a f + \int_c f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

$$\int_a^b f = \int_c^b f - \int_c^a f$$

Beweis von Blume 4: $$\int_c^b f - \underbrace{\int_c^a f}_{= -\int_a^c f} = \int_c^b f + \int_a^c f = \int_a^b f. \quad \diamond$$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

Proposition

> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, und sei $x_0 \in [a,b]$. Dann ist $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ stetig.
> (sogar Lipschitz-stetig, d.h. $\exists C: |g(x) - g(y)| \leq C \cdot |x-y| \ \forall x,y$).

Beweis:

f Riemann integrierbar $\Rightarrow$ f beschränkt $\Rightarrow \exists C: |f(x)| \leq C \ \forall x$

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

$$|\underbrace{F(x)}_{=\int_{x_0}^x f} - \underbrace{F(y)}_{=\int_{y_0}^y f}| = \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq C}\,dt \right| \leq C\,|x-y|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. ($C > 0$ o.B.d.A.)

Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$. Seien x, y so, dass $|x-y| < \delta$.

Dann ist $|F(x) - F(y)| \leq C \cdot \underbrace{|x-y|}_{< \delta = \frac{\varepsilon}{C}} < \varepsilon$. $\square$

2.) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

- f ist Riemann integrierbar
- f hat $\boxed{\text{eine}}$ Stammfunktion
- F Stammfunktion von f $\Rightarrow$ $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1.) f ist Riemann integrierbar

2.) Für $x \in [a,b]$ setze $F_0(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Dann ist F_0 stetig auf $[a,b]$ und für $x \in (a,b)$ gilt $F_0'(x) = f(x)$.

3.) Falls $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a,b) und $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:

1.) Nach dem Satz von Minimum und Maximum ist f beschränkt.

chmäßig
chig

Sei $\varepsilon > 0$. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, ist f gleichmäßig stetig.

$\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Wähle $x_0 := a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n := b$ so, dass

$|x_j - x_{j-1}| < \delta$ $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$P := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gelten:

(1) f ist Riemann-integrierbar.

(2) Für $x \in [a,b]$ definiere $F_0(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Dann ist $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F_0|_{(a,b)}$ differenzierbar und es gilt $F_0' = f(x)\ \forall\, x \in (a,b)$.

(3) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a,b) und es gelte $F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in (a,b)$. Dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Beweis

(1) f ist als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall definiert und ist daher nach dem Satz vom Minimum und Maximum beschränkt. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist f gleichmäßig stetig.

Def. von gl. Stetigk.: Sei $\epsilon > 0$. Weil f gleichmäßig stetig ist $\exists\, \delta > 0$, sodass $\forall\, x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$. Das ist direkt in die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit eingesetzt.

Wähle Partition: Wähle $x_0 := a < x_1 < \ldots < x_n := b$ so, dass $|x_j - x_{j-1}| < \delta\ \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$. Das Intervall wird also entsprechend fein unterteilt.

Setze $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Dann ist $P \in \mathcal{P}$.

wähle x, y aus P: Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Seien $x, y \in [x_{j-1}, x_j]$ beliebig. x und y liegen also in einem Teilintervall der Länge δ, das heißt $|x - y| < \delta$. Daraus folgt aber wegen oben $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$. Außerdem gilt natürlich $f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)|$. Insgesamt haben wir $f(x) - f(y) < |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$. Bringen wir $f(y)$ auf die andere Seite $\Rightarrow f(x) \leq f(y) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}\ \forall\, x \in [x_{j-1}, x_j]$. Die Ungleichung gilt für alle x im Intervall, also auch für das Supremum: $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \leq f(y) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$

$\Rightarrow M_j - \frac{\epsilon}{3(b-a)} \leq f(y)\ \forall\, y \in [x_{j-1}, x_j]$. Diese Ungleichung gilt für alle y im Intervall, also auch für das Infimum: $M_j - \frac{\epsilon}{3(b-a)} \leq \inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y) = m_j$, also insgesamt:

$M_j - m_j \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)}$.

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j-1}^{n} \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq \frac{\epsilon}{3(b-a)}}(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})}_{=b-a} = \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Daher ist f Riemann-integrierbar.

(2) $F_0(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig (das wurde in einer eigenen Proposition bewiesen).

Sei $x \in (a,b)$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0 : \ \forall\ y \in [a,b]$ mit $|y-x| < \delta : |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $y \in [a,b]$, $0 < |y-x| < \delta$.

Es ist $f(x) = \frac{f(x)(y-x)}{y-x}$. Jetzt betrachtet man $f(x)$ als Konstante und integriert nach der Variable t: $f(x) = \frac{f(x)(y-x)}{y-x} = \frac{\int_x^y f(x)dt}{y-x}$.

Diese Gleichheit verwenden wir jetzt:

$$\left|\frac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} - \frac{\int_x^y f(x)dt}{y-x}\right| = \frac{\left|\int_x^y f(t)dt - \int_x^y f(x)dt\right|}{|y-x|} =$$

$$= \frac{\left|\int_x^y (f(t)-f(x))dt\right|}{|y-x|} \le \frac{\frac{\epsilon}{2}|y-x|}{|y-x|} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Kommen wir noch einmal auf die Voraussetzungen für diese Ungleichung zurück: Sei $x \in (a,b)$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0 : \ \forall\ y \in [a,b]$ mit $|y-x| < \delta : |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $y \in [a,b]$, $0 < |y-x| < \delta$. Für ein kleineres ϵ muss man im Allgemeinen ein kleineres δ wählen. Macht man ϵ immer kleiner, nähern sich x und y also auch immer weiter an.

Für die gerade gezeigte Ungleichung bedeutet das $\lim_{y\to x}\left|\frac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} - f(x)\right| = 0$, also $\lim_{y\to x}\frac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} = f(x)$.

Damit können wir jetzt sehr schnell die Differenzierbarkeit beweisen und zeigen, dass F_0 Stammfunktion von f ist:

$F_0'(x) = \lim_{y\to x}\frac{F_0(y)-F_0(x)}{y-x} = \lim_{y\to x}\frac{\int_{x_0}^y f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt}{y-x} = \lim_{y\to x}\frac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} = f(x)$. Da wir direkt $f(x)$ als Ableitung von $F_0(x)$ ausgerechnet haben, ist natürlich insbesondere F_0 differenzierbar.

(3) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, differenzierbar auf (a,b) und $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in (a,b)$.

Nach (2) ist $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a,b) und $F_0'(x) = f(x)$.

Setze $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G(x) := F(x) - F_0(x)$.

G ist stetig, G differenzierbar auf (a,b) und $\forall\ x \in (a,b)$: $G'(x) = \underbrace{F'(x)}_{=f(x)} - \underbrace{F_0'(x)}_{=f(x)} = 0$.

Nach dem Mittelwertsatz $\exists\ c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = c\ \forall\ x \in [a,b]$.

Also $c = G(x) = F(x) - F_0(x) \Rightarrow F(x) = F_0(x) + c$.

$$\underbrace{F(b)}_{=F_0(b)+c} - \underbrace{F(a)}_{=F_0(a)+c} = F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F_0(b) - F_0(a) =$$

$$= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \qquad \blacksquare$$

Sei $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Seien $x, y \in [x_{j-1}, x_j] : |x-y| < \delta$.

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$f(x) \leq \underbrace{f(y) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}}_{\text{obere Schranke}} \qquad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \leq f(y) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{M_j - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}}_{\text{untere Schranke}} \leq f(y) \qquad \forall y \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$\Rightarrow M_j - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq \inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y) = m_j$$

$$\Rightarrow M_j - m_j \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}} (x_j - x_{j-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ f ist Riemann integrierbar.

2.) Wegen 1.) ist F_0 stetig.

Sei $x \in (a,b)$.

Wähle $y \in (a,b)$ mit $y \neq x$.

$$\left| \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{y-x} - f(x) \right| = \left| \frac{\int_x^y f(t)\,dt - \overbrace{f(x)(y-x)}^{= \int_x^y f(x)\,dt}}{y-x} \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_x^y (f(t) - f(x))\,dt}{y-x} \right| \leq \frac{\left| \int_x^y |f(t) - f(x)|\,dt \right|}{|y-x|}$$

Sei $\varepsilon > 0$. f stetig in $x \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall y$ mit $0<|y-x| < \delta$: $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei y so, dass $|y-x| < \delta$:

$$\left| \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{y-x} - f(x) \right| \leq \frac{\left| \int_x^y \overbrace{|f(t) - f(x)|}^{< \frac{\varepsilon}{2}}\,dt \right|}{|y-x|} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}|y-x|}{|y-x|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to x} \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{y-x} = f(x).$$

$$F_0'(x) = \lim_{y \to x} \frac{F_0(y) - F_0(x)}{y-x} = \lim_{y \to x} \frac{\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{y-x} =$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{y-x} = f(x)$$

3.) $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

2.) $\Rightarrow F_0: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $F_0'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$G(x) := F(x) - F_0(x)$.

$G: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall x \in (a,b)$

$G'(x) = \underbrace{F'(x)}_{f(x)} - \underbrace{F_0'(x)}_{f(x)} = 0$ Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$:

$\underbrace{d(x)}_{=F(x)-F_0(x)} = c \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow F(x) = F_0(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$

$$\underbrace{F(b)}_{=F_0(b)+c} - \underbrace{F(a)}_{=F_0(a)+c} = \underbrace{F_0(b)}_{=\int_a^b f(t)\,dt} - \underbrace{F_0(a)}_{=\int_a^a f(t)\,dt = 0} = \int_a^b f(t)\,dt$$

$\square$

! Dieser Satz gilt nicht in $\mathbb{Q}$.

Es bleibt richtig:

$f: [a,b] \cap \mathbb{Q} \to \begin{cases}\mathbb{Q}\\ \mathbb{R}\end{cases}$ stetig und <u>Riemann-integrierbar</u>.

$\Rightarrow f$ hat <u>eine</u> Stammfunktion

<u>zu 1.)</u>

$f: \mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{Q}, \quad f(x) := \frac{4x}{(2x^2-1)^2}$ stetig

$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ ist nicht beschränkt

$\Rightarrow f$ ist nicht Riemann-integrierbar

<u>zu 3.)</u>

$[0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$f(x) := 1$ stetig, $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \cdot (1-0) = 1$.

$$F(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x+4, & \text{falls } x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

F ist stetig, $\forall x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}: F'(x) = 1 = f(x)$

F ist also Stammfunktion von f.

$\Rightarrow \underbrace{F(1)}_{=5} - \underbrace{F(0)}_{=0} = 5 \neq 1 = \int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow$ Hauptsatz ist in $\mathbb{Q}$ falsch.

Beispiele:

B $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

B $\int_0^2 (5x^4 + 6x^2 + 2x)\,dx = (x^5 + 2x^3 + x^2)\Big|_0^2 = \underline{52}$.

B $\int_0^1 \frac{4x}{(2x^2-1)^2}\,dx \cancel{=} \left(-\frac{1}{2x^2-1}\right)\Big|_0^1 = -1-(1) = \underline{\underline{-2}}$.

↯ über die Polstelle $\frac{1}{\sqrt{2}}$ integriert ↯

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4x}{(2x^2-1)^2} = \lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}^-} \underbrace{\int_0^r \frac{4x}{(2x^2-1)^2}\,dx}_{=\left(-\frac{1}{2x^2-1}\right)\Big|_0^r} =$$

$$= \lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}^-} \left(-\frac{1}{2r^2-1} - 1\right) = \underline{+\infty}.$$

$$\int \frac{4x}{(2x^2-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2-1} + \cancel{C}$$

$$F(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2x^2-1}, & \text{falls } x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2x^2-1} + 2?, & \text{falls } x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Proposition

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \leq g$ und $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) < g(x_0)$.
Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

Beweis:

$h \geq 0$, h stetig, $\exists x_0$ mit $h(x_0) > 0$.

$\exists \delta > 0 \ \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$: $h(x) \geq \frac{h(x_0)}{2}$.

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Proposition 1) ist, dass es für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein $\xi \in (a, b)$ gibt, sodass $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$. Letztere Eigenschaft ist offensichtlich zu $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$ äquivalent.

Proposition 1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit* $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

1. *Beweis.* Nach dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es $m, M \in [a, b]$ mit $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ für alle $x \in [a, b]$.

1. *Fall*: $f(m) = f(M)$. In diesem Fall gilt $f(x) = f(m)$ für alle $x \in [a, b]$. Wähle irgendein $\xi \in (a, b)$. Dann ist

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{=f(m)}\,dx = \underbrace{f(m)}_{=f(\xi)}(b-a) = f(\xi)(b-a)\,.$$

2. *Fall*: $f(m) < f(M)$. Es ist $f(x) \geq f(m)$ für alle $x \in [a, b]$ und es gibt ein $x \in [a, b]$ (nämlich $x = M$) mit $f(x) > f(m)$. Deshalb ist $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$, also $f(m) < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$. Außerdem ist $f(x) \leq f(M)$ für alle $x \in [a, b]$ und es gibt ein $x \in [a, b]$ (nämlich $x = m$) mit $f(x) < f(M)$. Daher ist $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$, und somit $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < f(M)$.

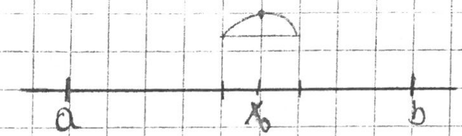
Die Zahl $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ liegt also zwischen $f(m)$ und $f(M)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a, b]$, das zwischen m und M liegt, mit $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$. Da $f(m) < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < f(M)$ muss $\xi \neq m$ und $\xi \neq M$ gelten. Nachdem ξ zwischen m und M liegt, ist daher $\xi \neq a$ und $\xi \neq b$. Somit ist $\xi \in (a, b)$ und wegen $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$. $\square$

2. *Beweis.* Wegen des 2. Punktes des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung besitzt f eine Stammfunktion, also es gibt eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf (a, b) differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt. Nach dem Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$F(b) - F(a) = \underbrace{F'(\xi)}_{=f(\xi)}(b-a) = f(\xi)(b-a)\,.$$

Der 3. Punkt des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung besagt, dass $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ gilt. Daher ist $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a)$. $\square$

Im 1. Beweis wurde nur der 1. Punkt des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung verwendet, während im 2. Beweis alle 3 Punkte des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung verwendet wurden. Im Zuge des hier gegebenen Beweises des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung sind beide Beweise des Mittelwertsatzes der Integralrechnung korrekt. Ein anderer Beweis des 2. Punktes des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung könnte unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gegeben werden. In diesem Fall müsste der 1. Beweis des Mittelwertsatzes verwendet werden – der 2. Beweis wäre dann ein Zirkelschluss.



O.B.d.A. δ ist so, dass $x_0+\delta<b$ oder $x_0-\delta>a$.

O.B.d.A. $x_0+\delta<b$

$$h(x) \ge \frac{h(x_0)}{2} \quad \forall\, x\in[x_0,x_0+\delta)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+\delta} h \ge \int_{x_0}^{x_0+\delta}\frac{h(x_0)}{2}\,dt = \frac{h(x_0)}{2}\cdot\delta$$

$x_0+\delta-x_0$

$$\int_a^b h \ge \int_{x_0}^{x_0+\delta} h \ge \frac{h(x_0)}{2}\cdot\delta>0.$$

$h:=g-f\ge 0$, $h(x_0):=g(x_0)-f(x_0)>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0<\int_a^b(g-f)=\int_a^b g-\int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f<\int_a^b g. \quad \square$$

3.) Integrationsmethoden

Proposition

1.) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \text{falls } \alpha \neq -1 \\ \log|x|, & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases}$

2.) $\int e^x \, dx = e^x$

3.) $\int \sin x \, dx = -\cos x$

4.) $\int \cos x \, dx = \sin x$

5.) $\int \sinh x \, dx = \cosh x$

6.) $\int \cosh x \, dx = \sinh x$.

Beweis:

1.) $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$

$x > 0$: $(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0$: $(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

2.) $(e^x)' = e^x$

3.) $(-\cos x)' = \sin x$

4.) $(\sin x)' = \cos x$

5.) $(\cosh x)' = \sinh x$

6.) $(\sinh x)' = \cosh x$. $\square$

Proposition:

1.) $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x$

2.) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x$

3.) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arccosh} x$

4.) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \operatorname{arcsinh} x$.

Beweis:

1.) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

2.) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.) $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

4.) $(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\square$

LINEARE SUBSTITUTION

Proposition

Sei $f: [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\alpha a + \beta$, $\alpha b + \beta \in [a_0, b_0]$. Dann gilt:

$$\int_a^b \alpha\, f(\alpha x + \beta)\, dx = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x)\, dx.$$

$$\left(\int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} \int f(x) \right).$$

Beweis:

HS $\Rightarrow$ f hat Stammfunktion F.

$G(x) := F(\alpha x + \beta)$; $G'(x) = \alpha \cdot \underbrace{F'}_{=f}(\alpha x + \beta) = \alpha \cdot f(\alpha x + \beta)$

$$\int_a^b \alpha\, f(\alpha x+\beta) \overset{HS}{=} G(b)-G(a) = F(\alpha b+\beta) - F(\alpha \cdot a+\beta) \overset{HS}{=} \int_{a\alpha+\beta}^{b\alpha+\beta} f. \qquad \square$$

Beispiele:

- $\int 72\,(3x-7)^5 = \dfrac{\overset{72/6}{12}\cdot(3x-7)^6}{3} = 4(3x-7)^6.$

  ↑ innere Ableitung

- $\int e^{2x}\,dx = \dfrac{e^{2x}}{2}.$

- $\int \dfrac{1}{(x-5)^{-3}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x-5)^2}\cdot\dfrac{1}{1} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x-5)^2}.$

!! Dieses Prinzip geht nur bei linearer Substitution.

Falsch: $\int x^4 = \int (x^2)^2 = \dfrac{(x^2)^3}{3}\cdot\dfrac{1}{2x} = \dfrac{x^5}{6}$ ⚡.

$\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = (\log(x^2))\cdot\dfrac{1}{2x} = \dfrac{\log x}{x}$ ⚡.

So ein Unsinn ist zu vermeiden !!!!!!

SUBSTITUTION (KETTENREGEL)

Proposition

Sei $f:[a_0,b_0]\to\mathbb{R}$ stetig, $g:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar (g stetig, g differenzierbar auf (a_1,b_1), g' stetig fortsetzbar auf $[a_1,b_1]$), $g([a_1,b_1])\subseteq[a_0,b_0]$.
Weiters seien $a,b\in[a_1,b_1]$. Dann gilt:

$$\int_a^b (f\circ g)(x)\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Beweis:

$F' = f$. $G(x) = F(g(x)) = (F \circ g)(x)$

Kettenregel

$G'(x) = \underbrace{F'}_{=f}(g(x)) \cdot g'(x) = (f \circ g)(x) \cdot g'(x)$.

$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' \underset{HS}{=} G(b) - G(a) = F(g(b)) - F(g(a)) \underset{HS}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f$. $\square$

Praktische Vorgangsweise

$$\int f(x)\,dx = \left(\begin{array}{l} x = g(u) \\ \text{od. } u = g^{-1}(x) \\ dx = g'(u) \cdot du \end{array} \right) = \int f(g(u)) \cdot g'(u) \cdot du.$$

Beispiele:

$$\int (3x^2+5) \cdot e^{x^3+5x+2}\,dx = \left(\begin{array}{l} u = x^3+5x+2 \\ du = (3x^2+5)\,dx \end{array} \right) =$$

du

$$= \int e^u \cdot du = e^u = \underline{\underline{e^{x^3+5x+2}}}$$

$$\int_0^2 x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \left(\begin{array}{l} u = x^3 \\ du = 3x^2 \cdot dx \\ \frac{du}{3} = x^2 \cdot dx \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \int e^u\,du = \frac{1}{3} \cdot e^u = \frac{1}{3} \cdot e^{x^3} \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^8 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{e^8 - 1}{3}}}$$

oder $\int_0^2 x^2 \cdot e^{x^3}\,dx = \left(\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{3} = x^2 \cdot dx \\ x=0 \to u=0 \\ x=2 \to u=8 \end{array} \right) = \frac{1}{3} \int_0^8 e^u \cdot du =$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^u \Big|_0^8 = \frac{1}{3} \cdot e^8 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{e^8-1}{3}}}$$

B) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{pmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\cdot dt \end{pmatrix} = \int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t}}\cdot \cos t\, dt =$$

$$= t = \underline{\underline{\arcsin x}}$$

B) $$\int \frac{12x-23}{\sqrt{23+42x-3x^2}}\,dx =$$

$$u = 23+42x-3x^2$$

$$du = \underbrace{(42-6x)}_{u'}dx$$

$$-2\cdot du = (12x-84)dx$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{12x-84}{\sqrt{23+42x-3x^2}}}_{=:f_1(x)} + \underbrace{\frac{61}{\sqrt{\ldots}}}_{=:f_2(x)}$$

$$\int f_1(x)\,dx = \int \frac{12x-84}{\sqrt{23+42x-3x^2}}\,dx = \int \frac{-2\,du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -2\cdot\int u^{-\frac{1}{2}}\cdot du = -2\cdot 2\cdot u^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -4\cdot\sqrt{u} = \underline{\underline{-4\cdot\sqrt{23+42x-3x^2}}}$$

$$23+42x-3x^2 = \underbrace{-3(x-7)^2}_{-3x^2+42x-147} + 170 =$$

$$= 170\left(1-\left(\sqrt{\frac{3}{170}}\cdot(x-7)\right)^2\right)$$

$$\int f_2(x)\,dx = 61\cdot\int \frac{1}{\sqrt{170}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{170}}(x-7)\right)^2}}\,dx =$$

$$= \begin{pmatrix} t=\sqrt{\frac{3}{170}}(x-7) \\ dt=\sqrt{\frac{3}{170}}\,dx \\ \sqrt{\frac{170}{3}}\,dt = dx \end{pmatrix} = 61\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{61}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin t = \underline{\frac{61}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{170}}(x-7)}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = -4\sqrt{23+42x-3x^2} + \frac{61}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin\sqrt{\frac{3}{110}}\,(x-7)$$

Partielle Integration (Produktregel)

Proposition

Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

$$\left(\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' g\right)$$

Beweis:

$$(fg)' = f' \cdot g + f g' \overset{HS}{\Rightarrow} (fg)(b) - (fg)(a) = \underbrace{\int_a^b f' g + \int_a^b f \cdot g'}_{\text{vgl. Produktregel}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \cdot g' = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f' g. \qquad \square$$

$$\int f g\,dx = F \cdot g - \int F \cdot g'\,dx$$

Beispiele:

$$\int \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{e^x}_{f}\,dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1\,dx = e^x \cdot x - e^x = \underline{\underline{e^x (x-1)}}$$

$$\int \underbrace{80 \cdot x^{19}}_{10x^4 \cdot \underbrace{8x^{15}}_{u^3}} \cdot \sin(2x^5) \cdot dx = \begin{pmatrix} u = 2x^5 \\ du = 10x^4\,dx \end{pmatrix} =$$

$= du$

$$= \int u^3 \cdot \sin u\,du = -u^3 \cdot \cos u + \int 3u^2 \cdot \cos u\,du =$$

$$= -u^3 \cdot \cos u + \sin u \cdot 3u^2 - \int 6u \cdot \sin u\,du =$$

$$= -u^3 \cdot \cos u + \sin u \cdot 3u^2 + \cos u \cdot 6u - \int 6 \cdot \cos u\,du =$$

$$= -u^3 \cdot \cos u + \sin u \cdot 3u^2 + \cos u \cdot 6u - \sin u \cdot 6 =$$

$= (-u^3 + 6u) \cdot \cos u + (3u^2 - 6) \cdot \sin u =$

$= \underline{\underline{(-8x^{15} + 12x^5) \cdot \cos(2x^5) + (12x^{10} - 6) \cdot \sin(2x^5)}}$.

b) $\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{=x'} \cdot \log x \, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$

$= x \cdot \log x - x =$

$= \underline{\underline{x(\log x - 1)}}$

b) $\int \sin^2 x \, dx =$

1. Methode: $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$] $-$

$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = \sin^2 x$

$\Rightarrow \int \sin^2 x = \int \frac{1}{2} - \int \frac{\cos 2x}{2} = \underline{\underline{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}}}$

2. Methode:

$\int \sin^2 x = \int \sin x \cdot \underbrace{\sin x}_{(-\cos x)'} = -\sin x \cdot \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{= 1 - \sin^2 x} =$

$= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x \quad \Big| + \int \sin^2 x$

$\Rightarrow 2 \cdot \int \sin^2 x = -\sin x \cdot \cos x + x$

$\Rightarrow \int \sin^2 x = \underline{\underline{-\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2}}}$

Interpretation von rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \qquad p_1, p_2 \text{ Polynom}$$

$f(x) = p_3(x) + \frac{p_4(x)}{p_2(x)}$, wobei grad $p_4 <$ grad p_2. Kürzen.

Partialbruchzerlegung

Fundamentalsatz der Algebra

Sei p ein nichtkonstantes Polynom über $\mathbb{C}$ $(p(z) = \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{C}} z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0)$. Dann gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$. Falls $z_1, \ldots, z_k$ die Nullstellen von p mit Vielfachheit α_j sind, dann gilt $p(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{\alpha_j}$.

Für reelle Polynome: $z_0 \in \mathbb{C}$ Nullstelle

$$p(\overline{z_0}) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{=\overline{a_k}} \cdot \overline{z_0}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z_0^k} = \overline{p(z_0)} = 0.$$

→ komplexe Nullstelle + auch konj. kompl.

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x - x_j) \cdot \prod_{j=1}^{s} \underbrace{(x - z_j)^{\beta_j} \cdot (x - \overline{z_j})^{\beta_j}}_{((x - z_j)\cdot(x - \overline{z_j}))^{\beta_j}} \cdot (a_n)$$

→ kommt hin

$$((x - z_j)\cdot(x - \overline{z_j})) = x^2 - (z_j + \overline{z_j})x + z_j \cdot \overline{z_j} =: \underbrace{x^2 + b_j x + c_j}_{\mathbb{R}\text{-Darstellung}}$$

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}$$

komplexe Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p_1}{p_2}, \quad p_2(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{\alpha_j}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{u=1}^{j} \frac{A_{j,u}}{(z-z_j)^u}$$

reelle Partialbruchzerlegung

$$p_2(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x-x_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2+b_j x + c_j)^{\beta_j}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \sum_{j=1}^{r} \cdot \sum_{u=1}^{\alpha_j} \frac{A_{j,u}}{(x-x_j)^u} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{j=1}^{\beta_j} \frac{B_{j,u}\, x + C_{j,u}}{(x^2+b_j x+c_j)^u}$$

mit Mathematica: Apart [...]

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^\alpha} = \begin{cases} \frac{A}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{\alpha-1}} & \text{, falls } \alpha \neq 1 \\ A \cdot \log(x-x_0) & \text{, falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\alpha} = \frac{B}{2} \cdot \underbrace{\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^\alpha}}_{u = x^2+bx+c} + \left(C - \frac{B \cdot b}{2}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(x^2+bx+c)^\alpha}}_{\text{quadratisch Ergänzen}}$$

$$\Rightarrow \dots \frac{1}{(t^2+1)^\alpha}$$

Proposition

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann gilt:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx.$$

Beweis:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\, dx = \begin{pmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2x\, dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$$

$$\text{Berechne} \int \frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25}\,dx\ .$$

Wir versuchen zuerst mit dem Horner-Schema die Nullstellen des Polynoms $x^4+4x^3+14x^2+20x+25$ zu berechnen. Leider hat dieses Polynom keine ganzzahligen Nullstellen. Falls man auch Nullstellen der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und a^2+b^2 teilt 25 sucht, erhält man, dass $-1+2i$ und $-1-2i$ jeweils zweifache Nullstellen sind. Das kann man auch mit Mathematica durch den Befehl

```
Solve[x^4+4 x^3+14 x^2+20 x+25==0,x]
```

erhalten. Daher ist

$$\begin{aligned} x^4+4x^3+14x^2+20x+25 &= \big(x-(-1+2i)\big)^2\big(x-(-1-2i)\big)^2 = \\ &= \big((x-(-1+2i))(x-(-1-2i))\big)^2 = (x^2+2x+5)^2\ . \end{aligned}$$

Auch mit dem Befehl

```
Factor[x^4+4 x^3+14 x^2+20 x+25]
```

mit Mathematica erhält man dieses Ergebnis. Daher ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)^2}\ .$$

Wenn man mit Mathematica den Befehl

```
Apart[(16 x^3+60 x^2+88 x+108)/(x^4+4 x^3+14 x^2+20 x+25)]
```

verwendet, so erhält man

$$\frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25} = \frac{16x+28}{x^2+2x+5} + \frac{-48x-32}{(x^2+2x+5)^2}\ .$$

Um diese Integrale zu berechnen, kann man zunächst die Substitution $u = x^2+2x+5$ probieren. Dann wäre $du = (2x+2)dx$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{16x+28}{x^2+2x+5} &= 8\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + 12\frac{1}{x^2+2x+5} \quad \text{und} \\ \frac{-48x-32}{(x^2+2x+5)^2} &= (-24)\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} + 16\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\ . \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du = \log|u| = \log(x^2+2x+5) \quad \text{und} \\ \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx &= \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x^2+2x+5}\ . \end{aligned}$$

Weiters ist $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right)$. Daher ist

$$12\frac{1}{x^2+2x+5} = 3\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} \quad \text{und} \quad 16\frac{1}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2} .$$

Wenn man hier $t = \frac{x+1}{2}$ substituiert, dann ist $dx = 2\,dt$,

$$\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\arctan t = 2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

und unter Verwendung der Formel

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{1}{2n-2}\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\,dt$$

für $n = 2$

$$\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = 2\left(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) =$$

$$= \frac{t}{t^2+1} + \arctan t = \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) .$$

Setzen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir, dass

$$\int \frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25}\,dx =$$

$$= 8\log(x^2+2x+5) + \frac{2x+26}{x^2+2x+5} + 7\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) .$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{(x^2+1)^n}}_{= \frac{1}{(x^2+1)^n}(1+x^2-x\cdot x)} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx - \int x \cdot \underbrace{\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}}_{= \left(-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\right)'} dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx$$

$\square$.

Beispiele:

(8) $$\int \frac{2x^3+9x^2+82x-194}{x^2+6x+58} dx =$$

NR: $(2x^3+9x^2+82x-194) : (x^2+6x+58) = \underline{\underline{2x-3}}$

$-2x^3 \pm 12x^2 \pm 116x$

$-3x^2 - 34x - 194$

$+3x^2 + 18x + 174$

$\underline{\underline{-16x - 20}}$

$$f(x) = \underbrace{2x - 3}_{(x^2-3x)'} + \frac{-16x-20}{x^2+6x+58}$$

→ Nenner ausrechnen (0 setzen)
→ Nullstellen sind dann komplex

→ bereits Partialbruchzerlegung

$u = x^2+6x+58$

$du = 2x+6$

$-16x - 20 = -8(2x+6) + 28$

$$-8 \int \frac{2x+6}{x^2+6x+58} dx = -8 \cdot \int \frac{du}{u} = -8 \cdot \log|u| =$$

$$= \underline{-8 \cdot \log(x^2+6x+58)}$$

$$x^2+6x+58 = (x+3)^2 + 49 = 49\left(\left(\frac{x+3}{7}\right)^2 + 1\right)$$

$$28 \cdot \int \frac{dx}{x^2+6x+58} = \overset{4}{\cancel{28}} \int \frac{dx}{\underset{7}{\cancel{49}}\left(\left(\frac{x+3}{7}\right)^2+1\right)} = \left(\begin{array}{l} t = \frac{[illegible]}{7} \\ dt = \frac{dx}{7} \end{array} \right) =$$

$$= 4 \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = 4 \cdot \arctan t = \underline{4 \cdot \arctan \frac{x+3}{7}}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\, dx = \underline{\underline{4 \arctan \frac{x+3}{7} - 8 \log(x^2+6x+58) + x^2 - 3x}}$$

B $\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$

Nullstellen $1, -1$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \Big| \cdot (x^2-1)$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$$

Koeffizientenvergleich: $\begin{array}{l} A + B = 0 \\ \underline{A - B = 1} \end{array}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \log|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \log|x+1| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-1}\, dx \;\cancel{=}\; \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\log \frac{1}{3}}_{= -\log 3} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\log|-1|}_{=0} = -\frac{1}{2} \cdot \log 3$$

$\Downarrow$

Polstelle

$$\int \frac{x^2+5x-8}{x^2-2x-3}\,dx = \underbrace{1}_{(x)'} + \frac{7x-5}{x^2-2x-3}$$

Nullstellen: -1, $+3$

$$\frac{7x-5}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$7x-5 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x + (-3A+B)$$

I: $A+B = 7$

II: $-3A+B = -5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\Rightarrow B = 4$, $A = 3$

$$\frac{7x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-3}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-3}\right)dx = \underline{3\cdot\log|x+1| + 4\cdot\log|x-3|}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+5x-8}{x^2-2x-3} = \underline{\underline{x + 3\cdot\log|x+1| + 4\cdot\log|x-3|}}$$

$$\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 2}\,dx$$

Substitution: $t = \tan\frac{x}{2}$

$$1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2}$$

$$\sin \underbrace{x}_{2\cdot\frac{x}{2}} = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \underbrace{\cos^2\frac{x}{2}}_{=\frac{1}{1+t^2}}\cdot 2\cdot\underbrace{\tan\frac{x}{2}}_{=t} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\underbrace{\cos x}_{=2\frac{x}{2}} = \cos^2 2 - \sin 2 = \underbrace{\cos^2 2}_{=\frac{1}{1+t^2}} \cdot (1 - \underbrace{\tan^2 2}_{=t^2}) = 1+t^4$$

$$dt = (1 + \underbrace{\tan^2 \frac{x}{2}}_{=t^2}) \cdot \frac{1}{2}\, dx \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

ubstitution:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t = \tan\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 2}\, dx = \int \underbrace{\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2} + 2} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{1-t^2-4t+2+2t^2} = \int \frac{2}{t^2-4t+3}\, dt \;=$$

Nullstelle: $1, 3$: $\frac{2}{t^2-4t+3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-3}$

$\Rightarrow \quad 2 = (A+B)t + (-3A-B)$:

$$\left[\begin{array}{l} A+B = 0 \\ -3A-B = 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \right.$$

$$\Rightarrow A = -1, \quad B = 1 \quad \Big]$$

$$= \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t-3}\right) dt = -\log|t-1| + \log|t-3| =$$

$$= \log\left|\frac{t-3}{t-1}\right| = \underline{\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-3}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|}$$

4. Uneigentliche Riemann-Integrale

Definition

1.) Sei $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Dann ist $\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{r \to +\infty} \int_a^r f(x)\,dx$.

Wir sagen $\int_a^{\infty} f$ existiert (konvergiert), falls dieser Grenzwert existiert, ansonsten $\int_a^{\infty} f$ divergiert (existiert nicht).

2.) $f:(-\infty, b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar.

$$\int_{-\infty}^{b} f := \lim_{r \to -\infty} \int_r^b f.$$

3.) $f:[a,b) \to \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar, $b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f := \lim_{r \to b^-} \int_a^r f.$$

4.) $f:(a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar, $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f := \lim_{r \to a^+} \int_r^b f.$$

5.) $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \text{wobei } a < c < b.$$

Uneigentl. R.I.

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 = \int_{-\infty}^{0} x^3 + \underbrace{\int_{0}^{\infty} x^3}_{\lim\limits_{r\to\infty} \underbrace{\int_0^r x^3}_{\frac{r^4}{4}} = +\infty}.$$

$\Rightarrow$ dieses Integral divergiert

nicht das gleiche !!!

$$\lim_{r\to+\infty} \underbrace{\int_{-r}^{r} x^3}_{=0} = 0$$

(Cauchy'sche Hauptwert).

Definition

I Intervall, $F \subseteq I$ endlich,

$f: I \setminus F \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Dann gibt es maximale Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots, I_k$,

sodass $I \setminus F = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$.

Wir definieren $\int_I f := \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} f$.

Beispiele:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \underbrace{\int_1^r \frac{1}{x^2}} = 1. \quad \Rightarrow \text{konvergiert}$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^r = 1 - \frac{1}{r}$$

salopper: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_1^{+\infty} = \infty$$, also divergiert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \left(= \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{1}{x^2}\,dx\right) = -\frac{1}{x}\Big|_0^1 = \infty \Rightarrow \text{divergent}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow \text{konvergiert}.$$

Proposition

1.) $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha < -1$.

2.) $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > -1$.

Beweis:

$$\int x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \text{falls } \alpha \neq -1 \\ \log x, & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases}$$

1.)
$$\int_1^\infty x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \alpha > -1: = \infty & \text{(div.)} \\ \alpha < -1: 0 - \frac{1}{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha+1} & \text{(konv.)} \end{cases} \\ \log x\Big|_1^{+\infty}, \quad \alpha = -1 \quad \text{(div.)} \end{cases}$$

2.)
$$\int_0^1 x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \begin{cases} \alpha > -1: = \frac{1}{\alpha+1} - 0 = \frac{1}{\alpha+1} & \text{(konv.)} \\ \alpha < -1: = \infty & \text{(div.)} \end{cases} \\ \alpha = -1: \log x\Big|_0^1 = \infty \end{cases}$$

$\square$

Korollar:

$\int_0^\infty x^\alpha\,dx$ divergiert

ätz

Sei $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Weiters sei $g: [a,b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergiert und es gilt $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$.
ann konvergiert $\int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis:

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $[a,b)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

$$\left(\begin{array}{ll} b_n = b - \frac{1}{n} & \text{, falls } b \in \mathbb{R} \\ b_n = n & \text{, falls } b = +\infty \end{array} \right).$$

etze $\alpha_n := \int_a^{b_n} f(x)\,dx$.

$$\alpha_n| \leq \int_a^{b_n} \underbrace{|f(x)|}_{\leq g(x)}\,dx \leq \int_a^{b_n} g(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx =: \beta$$

$\Rightarrow \alpha_n \in [-\beta, \beta]$ $\forall n$.

tz von
LZANO WEIERSTRASS jede Folge im obg. Intervall hat konv. Teilfolge

$\Longrightarrow$ $\exists$ Teilfolge $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (α_n) und $\exists\, \alpha \in [-\beta, \beta]$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha$.

iel

ei $\varepsilon > 0$. $\exists R < b$ mit $\forall r \geq R$: $\left| \int_a^r g - \beta \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

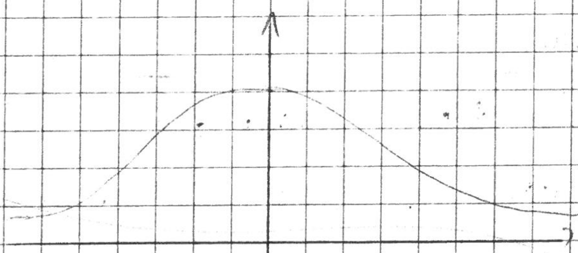
ähle k so, dass $b_{n_k} > R$ und $|\alpha - \alpha_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{3}$

ei $r \geq R$:
$$\Big| \underbrace{\alpha - \int_a^r f(x)\,dx}_{\alpha - \alpha_{n_k} + \alpha_{n_k} - \int_a^r f} \Big| \leq \underbrace{|\alpha - \alpha_{n_k}|}_{< \varepsilon/3} + \Big| \underbrace{\underbrace{\alpha_{n_k}}_{= \int_a^{b_{n_k}} f} - \int_a^r f}_{= \int_r^{b_{n_k}} f} \Big| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_r \underbrace{|f|}_{=g}\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\left|\int_r g\right|}_{= \int_a^{b_{n_k}} g - p + p - \int_a^r g} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\left|\int_a^{b_{n_k}} g - p\right|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{\left|p - \int_a^r g\right|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \alpha = \lim_{r \to b} \int_a^r f = \int_a^b f$, also $\int_a^b f$ konvergiert. $\square$



Beispiele:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad \frac{1}{e^{x^2}} \le \frac{1}{e^x}$$

Es ist $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ falls $x \ge 1$.

$\int_1^{\infty} e^{-x} = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e^{-1} = \frac{1}{e}$, also $\exists \Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \ \exists$.

auf $[0,1]$ ist e^{-x^2} stetig $\overset{HS}{\Rightarrow} \int_0^1 e^{-x^2} dx \ \exists$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ existiert $(= \sqrt{\pi} = 1{,}772454$

3) $\int_0^\infty \frac{1}{x^8+1}\, dx$

$\left|\frac{1}{x^8+1}\right| = \frac{1}{x^8+1} \leq \frac{1}{x^8}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^8}$ konvergiert, weil $-8 < -1$. $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^8+1} \Rightarrow \exists$

auf $[0,1]$ ist $\frac{1}{x^8+1}$ stetig $\overset{HS}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{1}{x^8+1}\ \exists$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x^8+1}\, dx$ konvergiert $\left(= \frac{\pi}{8 \cdot \sin \frac{\pi}{8}} \approx 1{,}026172 \right)$.

Proposition

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R.i., $f \geq 0$. Falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $\int_a^r f \leq C \quad \forall r \leq b$, dann konvergiert $\int_a^b f$.

(mit Konstante abschätzen)

Beweis:

$\alpha := \sup_{r<b} \int_a^r f$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists R: \alpha - \varepsilon < \int_a^R f$.

Sei $r \geq R$ $(r<b)$. $\alpha - \varepsilon < \int_a^R f \leq \int_a^r f \leq \alpha - \alpha + \varepsilon$,

also $\int_a^b f = \lim_{r \to b} \int_a^r f = \alpha$. $\square$

f ist absolut uneigentlich integrierbar, falls $|f|$ uneigentlich integrierbar ist.

f ist quadratisch uneigentlich integrierbar, falls f^2 uneigentlich integrierbar ist.

Proposition

$f: [a,b) \to \mathbb{R}$ absolut uneigentlich integrierbar
$\Rightarrow f$ uneigentlich integrierbar.

Beweis:

$\int_a^b |f| \ \exists \overset{\text{Majorantentest}}{\Longrightarrow} \int_a^b f \ \exists.$ $\square$

→ uneigentlich integrierbar $\not\Rightarrow$ absolut uneigentlich integrierbar

$\left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx \right)$

→ quadratisch uneigentlich integrierbar $\not\Rightarrow$ uneigentlich integrierbar

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\int_1^\infty f^2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \ \exists$, aber $\int_1^\infty \frac{1}{x} \ \nexists$.

z.B.:

Proposition

$f: [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, quadratisch uneigentlich integrierbar $\Rightarrow f$ uneigentlich integrierbar.

→ uneigentlich integrierbar $\not\Rightarrow$ quadratisch uneigentlich integrierbar

$f = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int_0^1 f \ \exists$, aber $\int_0^1 \underbrace{f^2}_{\frac{1}{x}} \ \nexists$

Proposition

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar $\Rightarrow$ quadratisch uneigentlich integrierbar.

Beispiel

$$\int_5^\infty \frac{7x - 18}{x^3 - 7x^2 + 8x + 16}\, dx$$

	1	-7	8	16
-1	1	-8	16	0

$\to x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Rightarrow N: -1, 4\ (2x)$

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

$\Rightarrow A = -1, B = 1, C = 2$

$$\Rightarrow \int f = -\log|x+1| + \log|x-4| - \frac{2}{x-4} =$$

$$= \log \underbrace{\left|\frac{x-4}{x+1}\right|}_{\frac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}} - \frac{2}{x-4}$$

$$\Rightarrow \int_5^\infty f = (\underbrace{\log 1}_{=0} - 0) - (\underbrace{\log \frac{1}{6}}_{= -\log 6} - 2) = \underline{2 + \log 6} \approx 3{,}79179\ldots$$

Die Gamma-Funktion, das Produkt von Wallis und die Stirling'sche Formel

Zuerst wollen wir die *Gamma-Funktion* definieren, die eine Verallgemeinerung von $n!$ ist. Dazu benötigen wir einige Resultate.

Lemma 1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert das Integral $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$ und es gilt $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-t} = 0$.*

Beweis. Wir beweisen dieses Resultat durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ und $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}(1-e^{-r}) = 1$.

von (n-1) auf (n)!

Sei $n > 1$. Dann ist

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{n-1}}{e^t} = \left(\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}\right) \overset{\text{l'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{(n-1)t^{n-2}}{e^t} = (n-1)\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{n-2}}{e^t}}_{=0} = 0\,.$$

Weiters erhalten wir durch partielle Integration, dass

$$\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r t^{n-1}\underbrace{e^{-t}}_{=(-e^{-t})'}\,dt =$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left(-r^{n-1}e^{-r} + \underbrace{0^{n-1}e^0}_{=0} + (n-1)\int_0^r t^{n-2}e^{-t}\,dt\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{r\to+\infty}\left(-r^{n-1}e^{-r}\right)}_{=0} + (n-1)\lim_{r\to+\infty}\int_0^r t^{n-2}e^{-t}\,dt = (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\,dt$$

gilt. Weil nach Induktionsvoraussetzung $\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\,dt$ konvergiert, konvergiert daher auch $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$. □

Proposition 1. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ konvergiert $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ und es gilt $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t} = 0$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \le n$. Für $t \ge 1$ gilt dann $0 \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{n-1}e^{-t}$. Weil $\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-t} = 0$ nach Lemma 1 gilt, erhalten wir $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t} = 0$. Wegen Lemma 1 konvergiert $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$ und daher konvergiert auch $\int_1^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$. Deshalb konvergiert auch $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ nach dem Majorantentest.

Falls $x \geq 1$ ist, dann ist $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ stetig auf $[0,1]$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung existiert daher $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Im Fall $0 < x < 1$ ist $0 \leq t^{x-1}\underbrace{e^{-t}}_{\leq 1} \leq t^{x-1}$. Weil dann $x-1 > -1$, konvergiert
'Hochzahlenvergleich'
$\int_0^1 t^{x-1}\,dt$. Nach dem Majorantentest konvergiert daher $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Somit existieren sowohl $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ als auch $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Daher konvergiert auch $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. □

Definition 1. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Dann setze

$$\boxed{\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt}$$

Man nennt $\Gamma : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ die Gamma-Funktion.

Wegen Proposition 1 ist $\Gamma(x)$ in Definition 1 wohldefiniert. Man könnte $x! := \Gamma(x+1)$ definieren.

Lemma 2. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ konvergiert* $\int_0^\infty \left|t^{x-1}e^{-t}\log t\right|\,dt$.

Beweis. Es ist $t^{x-1}e^{-t}\log t = (t^{x-1}\log t)e^{-t}$. Nachdem

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$$

gibt es ein $R > 0$ mit $R \geq 1$, sodass $\frac{\log t}{t} \leq 1$ für alle $t \geq R$ gilt. Somit gilt $\log t \leq t$ für alle $t \geq R$. Daher ist für $t \geq R$

$$0 \leq t^{x-1}e^{-t}\underbrace{\log t}_{\leq t} \leq t^x e^{-t}\,.$$

Nach Proposition 1 konvergiert $\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$, und deshalb konvergiert auch $\int_R^\infty t^x e^{-t}\,dt$. Daher konvergiert $\int_R^\infty t^{x-1}e^{-t}\log t\,dt = \int_R^\infty |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ wegen des Majorantentests.

Jetzt betrachten wir den Fall $x > 1$. Weil

$$\lim_{t\to 0+} t^{x-1}\log t = \lim_{t\to 0+}\frac{\log t}{t^{1-x}} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{t}}{(1-x)t^{-x}} = -\frac{1}{x-1}\underbrace{\lim_{t\to 0+} t^{x-1}}_{=0} = 0$$

kann die Funktion $t \mapsto |t^{x-1}e^{-t}\log t|$ zu einer stetigen Funktion auf $[0,R]$ fortgesetzt werden. Deshalb existiert $\int_0^R |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Somit konvergiert $\int_0^\infty |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ im Fall $x > 1$.

Schließlich nehmen wir an, dass $0 < x \leq 1$. Wegen

$$\lim_{t\to 0+}(-t^{\frac{x}{2}}\log t) = \lim_{t\to 0+}\frac{\log t}{-\frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}} = \left(\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}\right) = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{x}{2}\frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}}} = \frac{2}{x}\underbrace{\lim_{t\to 0+} t^{\frac{x}{2}}}_{=0} = 0$$

gibt es ein $r \in (0,1)$ mit $r < R$, sodass $-t^{\frac{x}{2}}\log t \leq 1$ für alle $t \in (0,r)$. Daher ist $-\log t \leq \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}$ für alle $t \in (0,r)$, und deshalb gilt

$$0 \leq -t^{x-1}e^{-t}\log t = t^{x-1}\underbrace{e^{-t}}_{\leq 1}\underbrace{(-\log t)}_{\leq \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}} \leq t^{\frac{x}{2}-1}$$

für alle $t \in (0,r)$. Weil $\frac{x}{2}-1 > -1$, konvergiert $\int_0^r t^{\frac{x}{2}-1}\,dt$. Nach dem Majorantentest konvergiert daher $\int_0^r(-t^{x-1}e^{-t}\log t)\,dt = \int_0^r |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto |t^{x-1}e^{-t}\log t|$ auf $[r,R]$ existiert $\int_r^R |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Somit konvergiert $\int_0^\infty |t^{x-1}e^{-t}\log t|\,dt$ auch im Fall $0 < x \leq 1$. □

Proposition 2. *Die Gamma-Funktion ist stetig.*

Beweis. Sei $t > 0$. Betrachte die Funktion $x \mapsto t^{x-1}$ auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann gilt

nach x ableiten

$$(\underbrace{t^{x-1}}_{=e^{(x-1)\log t}})' = e^{(x-1)\log t}\log t = t^{x-1}\log t\,.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Weiters sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ und $|x-y| < \min\left\{1, \frac{x}{2}\right\}$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz, dass es ein ξ zwischen x und y gibt, sodass $t^{x-1} - t^{y-1} = t^{\xi-1}(\log t)(x-y)$. Es ist $\frac{x}{2} - 1 = x - 1 - \frac{x}{2} \leq \xi - 1 \leq x$, weil ξ zwischen x und y liegt, und $|x-y| < \min\left\{1, \frac{x}{2}\right\}$.

Für $t \geq 1$ ist dann $t^{\xi-1} \leq t^x$, und wegen $\log t \geq 0$ ist deshalb $0 < t^{\xi-1}\log t \leq t^x\log t$. Somit ist

$$|\underbrace{t^{x-1} - t^{y-1}}_{=t^{\xi-1}(\log t)(x-y)}| = \underbrace{t^{\xi-1}(\log t)}_{\leq t^x\log t}|x-y| \leq t^x(\log t)|x-y|\,.$$

Daher ist $|(t^{x-1} - t^{y-1})e^{-t}| \leq t^x e^{-t}(\log t)|x-y|$. Nach Lemma 2 konvergiert

$\int_0^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt$, und daher konvergiert auch $\int_1^\infty |t^x e^{-t} \log t|\, dt$. Somit ist

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\left|\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt - \int_1^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt\right| \le \\ &\le \int_1^\infty \underbrace{|(t^{x-1}-t^{y-1})e^{-t}|}_{\le t^x e^{-t}(\log t)|x-y|} \le |x-y| \int_1^\infty |t^x e^{-t}\log t|\,dt\,.\end{aligned}$$

Falls hingegen $t \le 1$, dann ist $t^{\xi-1} \le t^{\frac{x}{2}-1}$, und wegen $\log t \le 0$ ist somit $0 < -t^{\xi-1}\log t \le -t^{\frac{x}{2}-1}\log t$. In diesem Fall ist deshalb

$$|\underbrace{t^{x-1}-t^{y-1}}_{=t^{\xi-1}(\log t)(x-y)}| = \underbrace{-t^{\xi-1}(\log t)}_{\le -t^{\frac{x}{2}-1}\log t}|x-y| \le |t^{\frac{x}{2}-1}\log t||x-y|\,.$$

Also ist $|(t^{x-1}-t^{y-1})e^{-t}| \le |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t||x-y|$. Wegen Lemma 2 konvergiert $\int_0^\infty |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t|\,dt$, und deshalb konvergiert auch $\int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t|\,dt$. Daher ist

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\left|\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt - \int_0^1 t^{y-1}e^{-t}\,dt\right| \le \\ &\le \int_0^1 \underbrace{|(t^{x-1}-t^{y-1})e^{-t}|}_{\le |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t||x-y|} \le |x-y| \int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t|\,dt\,.\end{aligned}$$

Setze $C := \int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t|\,dt + \int_1^\infty |t^x e^{-t}\log t|\,dt$. Dann ist $C > 0$. Es ist

$$\begin{aligned}|\underbrace{\Gamma(x)}_{=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt} - \underbrace{\Gamma(y)}_{=\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt}| &= \left|\int_0^\infty \left(t^{x-1}-t^{y-1}\right)e^{-t}\,dt\right| \le \\ &\le \left|\int_0^1 \left(t^{x-1}-t^{y-1}\right)e^{-t}\,dt\right| + \left|\int_1^\infty \left(t^{x-1}-t^{y-1}\right)e^{-t}\,dt\right|\,.\end{aligned}$$

Wegen (1) und (2) ist daher

$$\begin{aligned}|\Gamma(x)-\Gamma(y)| &\le \underbrace{\left|\int_0^1 \left(t^{x-1}-t^{y-1}\right)e^{-t}\,dt\right|}_{\le |x-y|\int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t|\,dt} + \underbrace{\left|\int_1^\infty \left(t^{x-1}-t^{y-1}\right)e^{-t}\,dt\right|}_{\le |x-y|\int_1^\infty |t^x e^{-t}\log t|\,dt} \le \\ &\le \underbrace{\left(\int_0^1 |t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}\log t|\,dt + \int_1^\infty |t^x e^{-t}\log t|\,dt\right)}_{=C \quad \text{nach Definition von } C}|x-y| = C|x-y|\,.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$|\Gamma(x) - \Gamma(y)| \le C|x-y| \tag{3}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ und $|x - y| < \min\left\{1, \frac{x}{2}\right\}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{C}, 1, \frac{x}{2}\right\}$. Sei jetzt $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ und $|y - x| < \delta$. Dann gilt wegen (3), dass

$$|\Gamma(x) - \Gamma(y)| \le C\underbrace{|x-y|}_{<\delta\le\frac{\varepsilon}{C}} < \varepsilon\,.$$

Deshalb ist die Gamma-Funktion stetig. □

Jetzt beweisen wir die *Funktionalgleichung* der Gamma-Funktion.

Proposition 3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Beweis. Partielles Integrieren ergibt

$$\int t^x \underbrace{e^{-t}}_{=(-e^{-t})'}\, dt = -t^x e^{-t} + \int x t^{x-1} e^{-t}\, dt = -t^x e^{-t} + x\int t^{x-1} e^{-t}\, dt\,.$$

x+1

Wegen Proposition 1 ist $\lim_{r\to+\infty} r^x e^{-r} = 0$. Da $x > 0$ ist $0^x e^{-0} = 0$ und daher ist

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \underbrace{-\lim_{r\to+\infty}(r^x e^{-r})}_{=0} + \underbrace{0^x e^{-0}}_{=0} + x\underbrace{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt}_{=\Gamma(x)} = x\Gamma(x)\,,$$

also $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. □

Korollar. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.*

Beweis. Wir beweisen das Korollar durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^0}_{=1} e^{-t}\, dt = \underbrace{-\lim_{r\to\infty} e^{-r}}_{=0} + 1 = 1 = 0!\,.$$

Sei $n > 0$. Dann ist nach Proposition 3

$$\Gamma(n+1) = n\,\underbrace{\Gamma(n)}_{=(n-1)!} = n(n-1)! = n!\,,$$

also $\Gamma(n+1) = n!$. □

Annäherung an $\frac{\pi}{2}$

Als nächstes wollen wir das Produkt von Wallis, also $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$, berechnen.

Proposition 4. *Es gilt* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 2$. *Weiters gelten* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ *und* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x\,dx = 1$.

Beweis. Es ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^0 x}_{=1}\,dx = \frac{\pi}{2}$ und nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^1 x}_{=(-\cos x)'}\,dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$. Sei $n \geq 2$. Unter Verwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x)\,\underbrace{(\sin x)}_{=(-\cos x)'}\,dx =$$

$$= -\sin^{n-1}\underbrace{\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\sin^{n-1} 0}_{=0}\cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin^{n-2} x)\underbrace{(\cos x)(\cos x)}_{=\cos^2 x = 1-\sin^2 x}\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\,.$$

Deshalb ist $n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$, woraus sofort das gewünschte Resultat folgt. □

Proposition 5. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gelten*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \quad \textit{und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\,.$$

Beweis. Wir beweisen das Resultat durch Induktion nach n. Im Fall $n = 1$ ist nach Proposition 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x\,dx}_{=1} = \frac{2}{3}\,.$$

Sei $n > 1$. Dann gilt nach Proposition 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,dx}_{=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \quad \text{und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx}_{=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

womit unser Resultat bewiesen ist. □

Damit können wir jetzt das Produkt von Wallis berechnen. Beachte, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots \quad \text{und}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Proposition 6. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Setze $a_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)}$. Sei $n \geq 2$. Auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $x \mapsto \sin x$ stetig, es gilt $0 \leq \sin x \leq 1$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Daher ist $0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ und $\sin^{2n+1} \frac{\pi}{2} = 1$. Somit gilt nach Proposition 5, dass

$$(4) \qquad 0 < \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx}_{=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}} \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx}_{=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}} \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx}_{=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}}$$

Umformen der zweiten Ungleichung in (4) ergibt

$$\underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}_{=a_n} \leq \frac{\pi}{2},$$

also $a_n \leq \frac{\pi}{2}$. Aus der dritten Ungleichung in (4) erhalten wir durch Umformen, dass $\frac{\pi}{2} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}$. Durch Multiplizieren mit $\frac{2n}{2n+1}$

ergibt sich

$$\underbrace{\frac{2n}{2n+1}}_{=\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}}\frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}_{=a_n},$$

also $\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\frac{\pi}{2} \leq a_n$. Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = 1$ gilt deshalb

$$\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\frac{\pi}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}},$$

woraus sich $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ ergibt, und unser Resultat bewiesen ist. □

Schließlich wollen wir die *Stirling'sche Formel* beweisen, die eine Näherungsformel für $n!$ liefert. Salopp gesagt gilt $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Zuvor müssen wir dazu einige Hilfsresultate beweisen.

Lemma 3. *Es seien $a, u \in \mathbb{R}$ mit $u > 0$. Weiters sei $f : [a-u, a+u] \to \mathbb{R}$ eine konkave Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_{a-u}^{a+u} f(x)\,dx \leq 2uf(a)\,.$$

Beweis. Sei $t \in [0, u]$. Dann ist $a = \frac{1}{2}(a-t) + \frac{1}{2}(a+t)$. Weil f konkav ist, gilt $f(a) \geq \frac{1}{2}f(a-t) + \frac{1}{2}f(a+t)$. Daher ist

$$\underbrace{\int_0^u f(a)\,dt}_{=uf(a)} \geq \frac{1}{2}\int_0^u f(a-t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^u f(a+t)\,dt\,.$$

Durch die Substitution $s = a - t$ erhalten wir

$$\int_0^u f(a-t)\,dt = \int_a^{a-u}(-f(s))\,ds = -\int_a^{a-u} f(s)\,ds = \int_{a-u}^a f(s)\,ds\,,$$

und die Substitution $s = a + t$ liefert

$$\int_0^u f(a+t)\,dt = \int_a^{a+u} f(s)\,ds\,.$$

Deshalb ist $uf(a) \geq \frac{1}{2}\int_{a-u}^a f(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_a^{a+u} f(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{a-u}^{a+u} f(s)\,ds$, woraus sich $2uf(a) \geq \int_{a-u}^{a+u} f(s)\,ds$ ergibt. □

Lemma 4. *Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt* $\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > 1$.

Beweis. Betrachte die Funktion $f(x) := \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ als eine Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f'(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{=-\frac{1}{x^2+x}} =$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2+x}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$f''(x) = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{=-\frac{1}{x^2+x}} - \frac{1}{x^2+x} - \left(x+\frac{1}{2}\right)(-1)\frac{1}{(x^2+x)^2}(2x+1) =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{x^2+x}}_{\frac{1}{(x^2+x)^2}(-2x^2-2x)} + \frac{1}{(x^2+x)^2}\left(2x^2+2x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{(x^2+x)^2} > 0\,.$$

Weil $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$, ist f' streng monoton wachsend, und daher ist $f'(x) < \lim_{y\to+\infty} f'(y)$ für alle $x > 0$. Wegen $f'(y) = \log\left(1+\frac{1}{y}\right) - \frac{y+\frac{1}{2}}{y^2+y}$ und $\frac{y+\frac{1}{2}}{y^2+y} = \frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2}}{1+\frac{1}{y}}$ ist

$$f'(x) < \lim_{y\to+\infty} f'(y) = \lim_{y\to+\infty}\left(\log\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2}}{1+\frac{1}{y}}}_{\to 0}\right) = \log 1 + 0 = 0\,.$$

Es ist daher $f'(x) < 0$ für alle $x > 0$, und deshalb ist f streng monoton fallend. Somit ist $f(x) > \lim_{y\to+\infty} f(y)$ für alle $x > 0$. Wir erhalten

$$\lim_{y\to+\infty} f(y) = \lim_{y\to+\infty}\left(\left(y+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{y}\right)\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(\text{„}\frac{0}{0}\text{“}\right) \overset{\text{de l'Hôp.}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{y}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{-\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{y^2+y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2y}\right)^2}{1+\frac{1}{y}} = 1\,.$$

Somit ist $\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = f(x) > 1$. □

Satz 1. *Es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1\,.$

Beweis. Betrachte die Funktion $f(x) := \log x$ auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Deshalb ist $x \mapsto \log x$ konkav. Für $k \in \mathbb{N}$ ist daher nach Lemma 3 (konkave Fkt)

$$\int_{a-u}^{a+u} f(x) \le 2u f(a)$$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x \, dx \le 2\frac{1}{2} \log k = \log k\,.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x \, dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x \, dx}_{\le \log k} \le \sum_{k=1}^{n} \log k = \log \prod_{k=1}^{n} k = \log n!\,.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{=x'} \log x \, dx = x \log x - \int \underbrace{x \frac{1}{x}}_{=1} dx = x \log x - x\,.$$

Wegen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung ist daher

$$\log n! \ge \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x \, dx =$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) - \underbrace{\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}}_{=-\frac{\log 2}{2}} + \frac{1}{2} =$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}\,.$$

Es gilt daher

$$\log n! \ge \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}\,. \tag{5}$$

Setze $b_n := \log n! - (n+\frac{1}{2})\log n + n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$b_n - b_{n+1} = \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n - \underbrace{\log(n+1)!}_{=\log n! + \log(n+1)} +$$

$$+ \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}+1\right)\log(n+1)}_{=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1)+\log(n+1)} - (n+1) =$$

$$= \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n - \log n! - \log(n+1) +$$

$$+ \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) + \log(n+1) - (n+1) =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{(\log(n+1) - \log n)}_{=\log\frac{n+1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>1 \text{ wegen Lemma 4}} - 1 > 0\,.$$

Somit ist $b_{n+1} < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend. Weiters ist wegen (5)

$$b_n = \underbrace{\log n!}_{\geq\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-n+\frac{\log 2}{2}} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n \geq$$

$$\geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - \log n\right)}_{=\log\frac{n+\frac{1}{2}}{n}} + \frac{\log 2}{2} =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\underbrace{\frac{n+\frac{1}{2}}{n}}_{=1+\frac{1}{2n}} + \frac{\log 2}{2} = \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{>0}\log\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{>1} + \frac{\log 2}{2} > \frac{\log 2}{2}\,.$$

Also $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt. Daher konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Setze $\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$ und $\alpha := e^{\beta}$. Dann ist $\alpha > 0$. Weiters definiere

$a_n := \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. Wir erhalten nach der Definition von b_n, dass

$$e^{b_n} = e^{\log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n} = \underbrace{e^{\log n!}}_{=n!} \cdot \underbrace{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n}}_{=n^{-n-\frac{1}{2}}=n^{-n}\cdot n^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^n =$$

$$= n! \cdot \underbrace{n^{-n}}_{=\frac{1}{n^n}} \cdot \underbrace{n^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \underbrace{e^n}_{=\frac{1}{\frac{1}{e^n}}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = a_n$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto e^x$ ergibt sich daraus

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{a_n}_{=e^{b_n}} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = \underbrace{e^{\beta}}_{=\alpha} = \alpha\,.$$

Da $\alpha \neq 0$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^2}{a_{2n}} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$. Es ist

$$\frac{{a_n}^2}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}} = \frac{(n!)^2 e^{2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)! n^{2n} n e^{2n}} =$$

$$= \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}} = \underbrace{\frac{(2^n \cdot n!)}{(2n)!}}_{=\frac{2\cdot\ 4\cdot\ 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot\ (2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot(2n)}} \underbrace{(2^n \cdot n!)}_{=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)} \sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}\sqrt{\frac{2}{n}}\,.$$

Wir setzen jetzt $c_n := \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}\sqrt{\dfrac{2}{n}}$. Nach den obigen Überlegungen ist daher $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^2}{a_{2n}} = \alpha$. Deshalb ergibt sich, dass $\lim_{n\to\infty} {c_n}^2 = \alpha^2$. Es ist

$$
\begin{aligned}
{c_n}^2 &= \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot (2n-1)}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 = \\
&= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot (2n-2)\cdot (2n)\cdot (2n)}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot (2n-3)\cdot (2n-1)\cdot (2n-1)}\frac{2}{n} = \\
&= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot (2n-2)\cdot (2n)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot (2n-1)\cdot (2n-1)}\frac{2}{n} = \\
&= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}\underbrace{(2n+1)\frac{2}{n}}_{=4+\frac{2}{n}} = \\
&= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot (2n-2)\cdot (2n)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot (2n-1)\cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}\left(4+\frac{2}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Nach Proposition 6 ist $\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$ (Proposition 6 ist das Produkt von Wallis). Daher ist

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 = \lim_{n\to\infty} {c_n}^2 = \lim_{n\to\infty} &\underbrace{\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}}_{\to\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(4+\frac{2}{n}\right)}_{\to 4} = \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot 4 = 2\pi .
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Somit gilt

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}}_{=a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=\alpha=\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1 ,
$$

womit unser gewünschtes Resultat bewiesen ist. $\square$

Stirling'sche Formel

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{n}{e}^n\sqrt{2\pi n}} = 1$

Beweis

$f(x) := \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, also ist log konkav und wir können log in unser erstes Lemma einsetzen.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}$.
Aus dem ersten Lemma folgt jetzt $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x dx \leq 2\frac{1}{2}\log k = \log k$.
$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} =$ (Integral wird aufgeteilt in n Integrale mit Schrittlänge 1)
$= \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x dx \leq \sum_{k=1}^{n} \log k = \log \underbrace{\prod_{k=1}^{n}}_{=n!} = \log n!$.

Es ist $\int \log x dx = \int \underbrace{1}_{=x'} \log x dx =$ (partielle Integration) $= x\log x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{1} dx = x \log x - x$.

Das setzen wir jetzt oben ein:
$\log n! \geq \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x dx = x\log x - x\Big|_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}}_{=\frac{-\log 2}{2}} + \frac{1}{2} =$
$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}$.

Wir definieren die Folge b_n als $b_n := \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n$.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist
$b_n - b_{n+1} = \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n - \underbrace{\log(n+1)!}_{=\log n! + \log(n+1)} + \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}+1\right)\log(n+1)}_{=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1)+\log(n+1)} - (n+1) =$
$= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)(\log(n+1) - \log n) - 1 =$
$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{=1+\frac{1}{n}} - 1$.
Nach dem zweiten Lemma ist $\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$, also $\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 > 0$.

Wir haben insgesamt $b_n - b_{n+1} > 0 \Rightarrow b_{n+1} < b_n$ und somit ist b_n streng monoton fallend.

Oben haben wir ausgerechnet, dass $\log n! \geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}$.
Das setzen wir jetzt in die Definition von b_n ein:

$b_n = \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n \geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n =$
$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + \frac{log 2}{2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+\frac{1}{2}}{n} + \frac{\log 2}{2}$.
Es ist $\frac{n+\frac{1}{2}}{n} = 1 + \frac{1}{2n} > 1$, damit $\log\frac{n+\frac{1}{2}}{n} > 0$. Da auch $\left(n+\frac{1}{2}\right) > 0$ ist insgesamt $\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right) > 0$ und es folgt:
$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+\frac{1}{2}}{n} + \frac{log 2}{2} > 0 + \frac{\log 2}{2} = \frac{1}{2}\log 2 = \log 2^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{2}$.

b_n ist also nicht nur streng monoton fallend, sondern auch nach unten beschränkt $\Rightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Setze $\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$ und setze $\alpha := e^\beta > 0$ (sogar $\alpha \geq \sqrt{2}$, weil $\beta \geq \log\sqrt{2}$).

Setze $a_n := \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$.
$e^{b_n} = e^{\log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n} = n! \cdot n^{-n} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot e^n = n! \cdot \frac{1}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{e^n}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} = a_n$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} =$ (weil $x \mapsto e^x$ stetig darf man lim hinein ziehen) $= e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = e^\beta = \alpha$.

Betrachte $\frac{a_n^2}{a_{2n}} \to \underbrace{\frac{\alpha^2}{\alpha}}_{\neq 0} = \alpha$.

Also $\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}\cdot\sqrt{2n}} =$ (Doppelbruch auflösen)
$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!^2 . e^{2n} . 2^{2n} . n^{2n} . \sqrt{2n}}{(2n)! \cdot n^{2n} \cdot n \cdot e^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!^2 2^{2n}}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}}$.
Ausmultipliziert ist $\frac{n!^2 . 2^{2n}}{(2n)!} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2)(2n-1)(2n)}$.
Kürzt man jetzt aus dem Nenner die geraden Zahlen mit einer Hälfte der geraden Zahlen im Zähler, bleibt $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$ übrig.

Wir haben also $\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\sqrt{\frac{2}{n}}$ und diese Folge definieren wir als c_n.

Quadriert und der Bruch mit $(2n+1)$ erweitert:
$c_n^2 = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n-1)(2n+1)} \cdot \underbrace{\frac{2\cdot(2n+1)}{n}}_{=4+\frac{2}{n}}$.
Lassen wir in dieser Folge n gegen ∞ gehen, sehen wir, dass ein Teil davon dem Produkt von Wallis entspricht und somit gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}}_{\to\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(4+\frac{2}{n}\right)}_{\to 4} = 2\pi.$$

Daraus folgt $\alpha = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{n}}}_{=:a_n} = \alpha = \sqrt{2\pi}$.

Somit ist
$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{n}}}_{=\sqrt{2\pi}} = 1.$

Was haben wir gemacht?

Wir haben die Folge b_n definiert, bewiesen dass sie konvergiert (streng monoton und beschränkt) und den Grenzwert β genannt.
Dann haben wir $\alpha := \mathrm{e}^{\beta}$ definiert und bewiesen, dass für die Folge a_n (ebenfalls passend definiert) $\frac{a_n^2}{a_{2n}} \to \alpha$.
Wir bekommen $\alpha = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\ldots}_{=:c_n}$.
c_n^2 geht aber gegen 2π, damit $\alpha = \sqrt{2\pi}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{n}{\mathrm{e}}^n \sqrt{2\pi n}} = 1$.

5. GAMMA-FUNKTION, PRODUKT VON WALLIS, STIRLING'SCHE FORMEL

Gamma-Funktion: → Verallgemeinerung von $n!$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

Proposition

$$\boxed{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \quad \text{konvergiert für alle } x>0 .}$$

__Beweisidee:__

auf $[1, +\infty)$: $t^{x-1} e^{-t} < t^{n-1} e^{-t}$

$\Rightarrow \int_1^\infty \dots \exists$: $x \geq 1$: $t^{x-1} e^{-t}$ stetig auf $[0,1] \Rightarrow \int_0^1 \dots \exists$

für $x \in (0,1)$: $t^{x-1} \underbrace{e^{-t}}_{\leq 1} \leq t^{x-1}$, $-1 < x-1 \Rightarrow \int_0^1 t^{x-1} \exists$

Maj.test $\Rightarrow \int_1^1 \dots \exists$.

__Definition__

$$\boxed{\text{Für } x \in \mathbb{R},\ x>0 \text{ setze } \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt .}$$

Proposition

$$\boxed{\Gamma \text{ ist stetig} .}$$

Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

Proposition

Für $x \in \mathbb{R}$, $x>0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Beweis:

partielle Integration

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \underbrace{e^{-t}}_{=(-e^{-t})'} dt = \underbrace{-t^x \cdot e^{-t} \Big|_0^{+\infty}}_{0-0} + \int_0^\infty x\, t^{x-1} e^{-t} dt =$$

$$= x \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt}_{=\Gamma(x)} = x \cdot \Gamma(x).$$

$\square$.

Proposition

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\Gamma(n+1) = n!$

Beweis:

Induktion:

$n=0$: $\Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^0}_{=1} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1 = 0!$

Sei $n>0$. $\Gamma(n+1) = n \cdot \underbrace{\Gamma(n)}_{=(n-1)!} = n \cdot (n-1)! = n!$

$\square$

Wir können $x!$ als $x! = \Gamma(x+1)$ definieren.

PRODUKT VON WALLIS unendl. Produkt

$$\frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \ldots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \ldots} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n-1)\cdot(2n-1)} :=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2.4.4.\ldots.(2n)(2n)}{1.3.3.5.\ldots.(2n-1)(2n-1)} \left(= \frac{\pi}{2}\right)$$

noch zu beweisen

Proposition

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n},$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Beweis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+2} x = \int \sin^{k+1} x \cdot \underbrace{\sin x}_{(-\cos x)'} \, dx =$$

$$= -\sin^{k+1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k+1) \cdot \sin^{k} x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{= 1-\sin^2 x} \, dx =$$

$$= (k+1) \int \sin^{k} - (k+1) \int \sin^{k+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+2} x \, dx = \frac{k+1}{k+2} \int \sin^{k} x.$$

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} dx = \frac{2n-1}{2n} \cdots \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx}_{= \frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow$ 2.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x =$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x}_{= -\cos x\,\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$$

□

Proposition

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n-1)\cdot(2n-1)} = \frac{\pi}{2}$$

Beweis:

$$a_n = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)}$$

auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ ist $0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sin^{2n-1} x \ge \sin^{2n} x \ge \sin^{2n+1} x$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1} \ge \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \ge \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

rechte Ungleichung: (umformen) $\displaystyle\frac{\pi}{2} \ge \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1} = a_n$

linke Ungleichung: $\displaystyle\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \ge \frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\frac{2n+1-1}{2n+1}}_{=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle\frac{\pi}{2}}{\overset{\displaystyle\frac{\pi}{2}}{\downarrow}} \ge a_n \ge \underbrace{\frac{\pi}{2}\cdot\Big(\underbrace{1-\frac{1}{2n+1}}_{\to 1}\Big)}_{n\to\infty\ \to\ \frac{\pi}{2}} \Rightarrow a_n \to \frac{\pi}{2}$$

□

STIRLING'SCHE FORMEL

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$ (→ Näherungswert für $n!$)

Lemma

$f: [a-u, a+u] \to \mathbb{R}$ R.i. und konkav $\Rightarrow$

$$2u\, f(a) \geq \int_{a-u}^{a+u} f(x)\, dx \quad .$$

Beweis:

$$a = \frac{1}{2}(a-t) + \frac{1}{2}(a+t) \xRightarrow{f \text{ konkav}} f(a) \geq \frac{1}{2} f(a-t) + \frac{1}{2} f(a+t)$$

$\int_0^u$ anwenden:

$$u\, f(a) \geq \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^u f(a-t)\, dt}_{= \int_{a-u}^{a} f(t)\, dt} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^u f(a+t)\, dt}_{= \int_{a}^{a+u} f(t)\, dt} = \frac{1}{2} \int_{a-u}^{a+u} f(t)\, dt$$

□

Lemma

Für $x > 0$ ist $\left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1$.

Satz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Beweis:

$f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ konkav

$$k \in \mathbb{N}: \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\, dx \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \log k = \log k.$$

$n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}} \log x \, dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k-\frac{1}{2}} \log x}_{= \log k} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \log k}_{= \log \underbrace{\prod_{k=1}^{n} k}_{= n!}} = \log n!$

$$\int \underbrace{1}_{=(x)'} \log x \, dx = x \cdot \log x - \underbrace{\int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} dx}_{x}$$

$$\Rightarrow \log n! \ge \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \cancel{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} \underbrace{\log \frac{1}{2}}_{= -\log 2} + \cancel{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \log\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}$$

$$b_n := \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n .$$

$$b_n - b_{n+1} = \cancel{\log n!} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \log n + \cancel{n} - \underbrace{\log (n+1)!}_{= \cancel{\log n!} + \log(n+1)} + \underbrace{\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) \log(n+1)}_{= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(n+1) + \log(n+1)} - (\cancel{n} + 1) =$$

$$= \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{> 1} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow b_{n+1} < b_n$$

$$b_n = \underbrace{\log n!}_{\ge \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \log\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n \ge \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\log \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}_{> 1}}_{> 0} + \frac{\log 2}{2} > \frac{\log 2}{2} .$$

Also (b_n) ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt $\left(\frac{\log 2}{2}\right)$. $\Rightarrow$ (b_n) konvergiert.

Setze $\beta := \lim_{n \to \infty} b_n$.

$$a_n := \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} .$$

$$e^{b_n} = e^{\log n! - (n+\frac{1}{2})\log n + n} = \underbrace{e^{\log n!}}_{= n!} \cdot \underbrace{e^{-(n+\frac{1}{2})\log n}}_{= n^{-n-\frac{1}{2}} = n^{-n} \cdot n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \underbrace{e^{n}}_{\frac{1}{\;} = \frac{1}{e^n}} =$$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} = a_n$$

$$a_n := \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} = \frac{n! \, e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}}$$

$$a_n = e^{b_n} \longrightarrow e^{\beta} =: \alpha > 0$$

$x \mapsto e^x$ stetig

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2 \cancel{e^{2n}} \cdot 2^{2n} \cancel{n^{2n}} \sqrt{2n}}{\cancel{n^{2n}} \cdot n \cdot (2n)! \, \cancel{e^{2n}}} = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{2n!} = \sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times 2n} \cdot (2 \times 4 \times \ldots \times 2n) \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)} \sqrt{\frac{2}{n}}}_{=: c_n}$$

$$c_n^2 \to \alpha^2$$

$$c_n^2 = \underbrace{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}}_{\substack{\text{Produkt von WALLIS} \\ \to \frac{\pi}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdot (2n+1)}_{\substack{= (4 + \frac{2}{n}) \\ \to 4}} \to 2\pi$$

$\Rightarrow \quad a^2 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2\pi}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\underbrace{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}_{a_n \to a = \sqrt{2\pi}}} = 1$$

□

6. Anwendungen der Integralrechnung

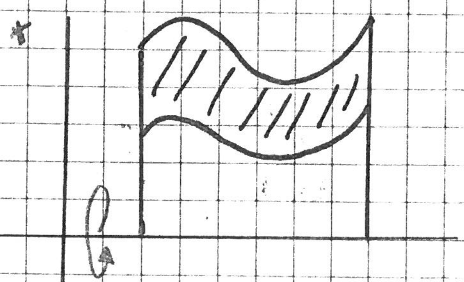
Flächen berechnen

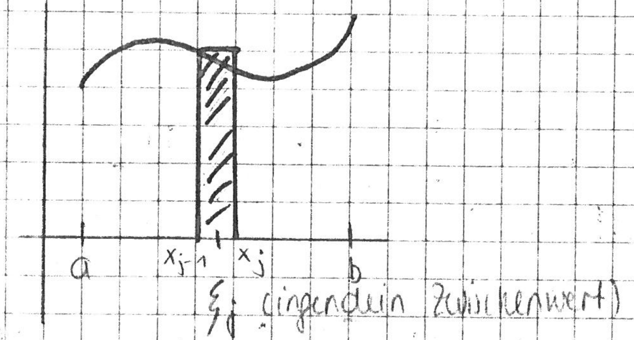
Volumen von Drehkörpern:

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f \geq 0$ $\qquad (0 \leq f_2 \leq f_1)$

bzw.

*





Volumen von Zylinderstücke

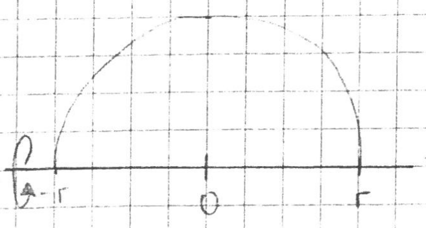
$\pi f(\xi_j)^2 (x_j - x_{j-1})$

$$\underbrace{\pi \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)^2 (x_j - x_{j-1})}_{\to \int_a^b f^2}$$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

$$* \left(V = \pi \int_a^b (f_1(x)^2 - f_2(x)^2) \, dx \right)$$

Beispiel: Volumen der Kugel



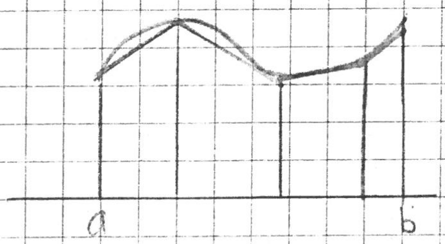
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\ , \qquad -r \le x \le r$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \Big(2r^3 - \underbrace{\frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r}}_{= \frac{2r^3}{3}} \Big) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \cdot r^3}}$$

8.3 Bogenlänge des Graphen einer Funktion

Länge von Teilstücken:

$$\sqrt{(f(x_j) - f(x_{j-1}))^2 + (x_j - x_{j-1})^2}$$



$$\sqrt{(f(x_j) - f(x_{j-1}))^2 + (x_j - x_{j-1})^2} \overset{MWS}{=} f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= (x_j - x_{j-1}) \sqrt{f'(\xi_j)^2 + 1}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sqrt{f'(\xi_j)^2 + 1}}$$

$$\rightarrow \int_a^b \sqrt{(f')^2 + 1}$$

$$\underline{l = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx}$$

Bogenlänge

Beispiel: Umfang des Viertelkreises

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le r$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} \, (-2x) = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$L = \int_0^r \sqrt{\underbrace{\frac{x^2}{r^2 - x^2} + 1}_{\frac{r^2}{r^2-x^2}}} \, dx = \int_0^r \frac{r}{\underbrace{\sqrt{r^2 - x^2}}_{= r^2\left(1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right)}}$$

uneigentl. Integral

$$= \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \, dx = \begin{pmatrix} u = \frac{x}{r} \\ du = \frac{dx}{r} \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \frac{r \cdot du}{\sqrt{1 - u^2}} = r \cdot \arcsin u \Big|_0^1 = \frac{r \cdot \pi}{2}$$

Beispiel: Umfang der Ellipse

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 \le 1 \qquad \begin{matrix} x = x_1 \\ y = x_2 \end{matrix} \; ; \quad \begin{matrix} a = a_1 \\ b = a_2 \end{matrix}$$

$L = 4$ Umfang der Viertelellipse

$$f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad 0 \le x \le a$$

$$f'(x) = b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \left(- \frac{2x}{a^2} \right) = - \frac{b}{a} \, \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$L = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{b^2}{\cancel{a^4}\; a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2} \cdot a^2 + 1} \; dx =$$

$$= 4 \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{b^2 x^2 + a^4 - a^2 x^2}{a^2 - x^2}} =$$

$$= 4 \cdot \int_0 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b^2x^2 + a^4 - a^2x^2}{a^2 - x^2}} \, dx =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \sin u = \frac{x}{a} \\ \cos u \, du = \frac{dx}{a} \end{array} \right) =$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \sqrt{\underbrace{\frac{b^2a^2 \sin^2 u + a^4 - a^4 \cdot \sin^2 u}{a^2 - a^2 \cdot \sin^2 u}}_{\frac{a^2 \cdot (b^2 \sin^2 u + a^2 \cdot \cos^2 u)}{a^2 \cdot \cos^2 u}}} \cdot a \cdot \cos u \, du =$$

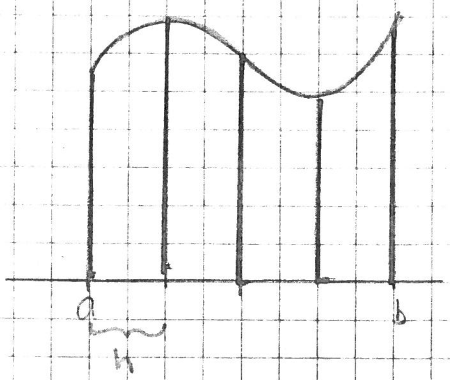
$$= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{b^2 \cdot \sin^2 u + a^2 \cdot \cos^2 u}}{\cancel{\cos u}} \cdot \cancel{\cos u} \, du =$$

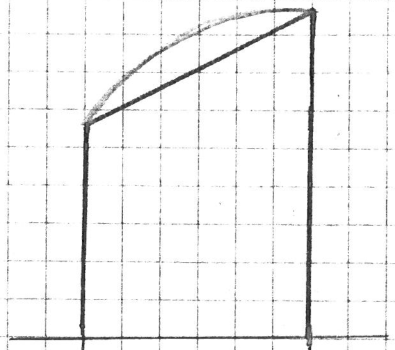
$$= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \cdot \sin^2 u + a^2 \cos^2 u} \, du$$

$\Rightarrow$ ellipsisches Integral

(kann man nicht berechnen)

7. Numerische Integration





Trapezregel: $\int_a^b f \approx \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a) = (b-a)\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right)$

$h = \frac{b-a}{n}$ $\qquad \int_a^b f \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)\right)$

$\Rightarrow$ Annäherung durch affine Fkt (Grad 1)

ohne Beweis:

Proposition

Sei $f: [a,b]$ zweimal differenzierbar

1.) $\exists\ \xi \in (a,b)$ mit $\left|\int_a^b f - (b-a)\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right)\right| = \frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b-a)^3$

2.) $h = \frac{b-a}{n}$, $|f''(x)| \leq C$, $\forall x \in [a,b]$, dann

$$\left|\int_a^b f - \left(h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)\right)\right)\right| \leq \frac{C}{12}(b-a)h^2 =$$

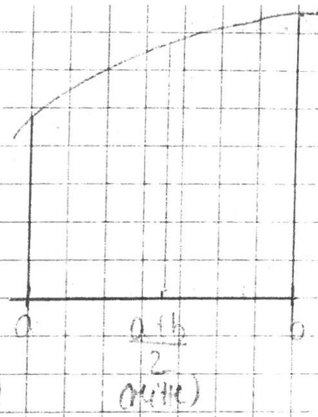
$$= \frac{C}{12} \cdot (b-a)^3 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Fehlerabschätzung beim Trapez

Polynome vom Grad 2:

Kepler'sche Fassregel, Simpsonregel

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$



(einfache Anwendung ⇒ Kepler'sche Fassregel)

$$h=\frac{b-a}{2n}: \quad \int_a^b f \approx \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+2jh) + 4\cdot\sum_{j=1}^{n} f(a+(2j-1)h)\right)$$

Grad ≥ 2

(Simpson'sche Formel ⇒ mehrfache Anwendung)

Kepler: → wird durch Parabel 2 Ordnung ($p(x)=ax^2+bx+c$) angenähert ⇒ genauer

Fehlerabschätzung:

Proposition

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 4-mal differenzierbar

1.) $\exists\, \xi\in(a,b): \left|\int_a^b f - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\right|\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$

2.) $h=\frac{b-a}{2n}$, $|f^{(4)}(x)|\leq C$, $\forall x\in[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f - \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)\right)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+2jh)+4\sum_{j=1}^{n} f(a+(2j-1)h)\right|$$

$$\leq \frac{C\left(\frac{b-a}{2}\right)}{90}h^4 = \frac{C\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90}\cdot\frac{1}{n^4}$$

Fehlerabschätzung bei Simpson

Beispiel:

$$\int_2^5 \frac{e^x}{x}\,dx \qquad (= 35{,}2310409998013)$$

Trapezregel: einfach: $\approx 50{,}066$ $\qquad |f''(x)| \leq 25$

$|f^{(4)}(x)| \leq 16$

$n = 238$ (239 Stützstellen):

Fehler $\leq 10^{-3}$ $\approx 35{,}23133095$

Simpson: $35{,}61170$

Fehler $\leq 10^{-10}$: $n = 341$ (683 Stützstellen)

$\approx 35{,}2310409999836$

VI. REIHEN

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=$$

$$(\quad)(\quad)(\quad)\ldots=0$$

$$(\quad)(\quad)\ldots=1$$

1. Konvergenz von Reihen

Definition

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist <u>konvergent</u>, falls $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert und setze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Andernfalls heißt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>divergent</u>.

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\quad A := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

manchmal auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$, $\quad m\in\mathbb{Z}$.

$\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}\right)$.

Beispiele:

- geometrische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, falls $|q|<1$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Proposition

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Dann ist: Linearität

1.) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (konvergent).

2.) Für $c \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$): $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)}_{= \underset{\to A}{A_n} + \underset{\to B}{B_n}} = A + B$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \underset{\to A}{A_n} = c \cdot A$. □

Proposition

$(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. "Monotonie"

Beweis:

analog wie Proposition zuvor.

Proposition:

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis:

$\underset{\to A}{A_n} - \underset{\to A}{A_{n-1}} = a_n \to A - A = 0$. □

Beispiel:

$a_n = (-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(= 1 - 1 + 1 - 1 \ldots)$

$|a_n| \to 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergent.

Bemerkung:

Analog kann man $\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$ definieren, wobei man üblicherweise 0 als Grenzwert nicht zulässt.

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+n}}_{= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots\right) = 1$$

(→ Partialbruchzerlegung)

$\Rightarrow$ so aber falsch, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent!!!

korrekte Version:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}} \Bigg) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\Big) = \underline{\underline{1}}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 2^n) \cancel{=} (1 - 2 + 2 - 4 + 4 - 8 + \ldots) = 1$$

$\Rightarrow$ diese Rechnung falsch!!

$$\sum_{k=1}^{n} (2^{k-1} - 2^k) = 1 - 2^n \to -\infty .$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ist divergent.}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \overset{2^0}{(1)} + \overset{2^1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \overset{2^2}{\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}} + \overset{2^3}{\underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}}} + \dots + \overset{2^n}{\underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{\geq \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}}} \geq$$

Ausdünnungsverfahren wird hier angewendet

$$\geq 1 + \frac{n}{2} \to +\infty.$$

Proposition (Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}^s$)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}^s$.
Dann $\exists$ Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) und $\exists\, a \in \mathbb{R}^s$ mit
$a_{n_k} \to a$.

Beweis:

$\exists\, C.\ \ \underline{|a_n| \leq C}$ (beschränkt) $\forall n$

$\forall j\ \forall n: \ (a_n)_j \in [-C, C]$.
(Komponente)

Komponente

$\exists\, n_k^{(1)} \uparrow$ mit $(a_{n_k^{(1)}})_1 \to a^{(1)} \in \mathbb{R}$
(monoton wachsend)

$\exists\, n_k^{(2)} \uparrow$ mit $(a_{n_k^{(2)}})_2 \to a^{(2)} \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Teilfolge von $(n_k^{(1)})$

$\vdots$

$\exists\, n_k^{(s)} \uparrow$ Teilfolge von $(n_k^{(s-1)})$: $(a_{n_k^{(s)}})_s \to a^{(s)} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a_{n_k^{(s)}} \to \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(s)} \end{pmatrix}$$

$\square$

Definition Reihenfolge kann man ändern

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist <u>bedingt konvergent</u>, falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert.

Reihenfolge kann man nicht ändern ⇒ kann andern Wert bekommen

Majorantentest:

Satz:

Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}^d$, (b_n) Folge in $\mathbb{R}$ und es gelte $|a_n| \leq b_n \;\; \forall n$.
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut).

<u>Beweis:</u>

$$|A_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|a_k|}_{\leq b_k} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k}_{= B_n} \leq B. \qquad \forall n$$

Satz von Bolzano-Weierstraß ⇒ $\exists$ Teilfolge (A_{n_k})

$\exists A \in \mathbb{R}^d$ mit $A_{n_k} \to A$.

Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists N : \forall n \geq N : |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\exists K : \forall k \geq K : |A_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{3}$

Sei $n \geq N$: Wähle $k \geq K$ mit $n_k \geq n \geq N$:

$$|A_n - A| \leq \underbrace{|A_n - A_{n_k}|}_{= |A_{n_k} - A_n| = \left|\sum_{j=n+1}^{n_k} a_j\right|} + \underbrace{|A_{n_k} - A|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \quad \leq \; (\Delta\text{-Ungleichung})$$

③ $$\underbrace{\sum_{j=n+1} \underbrace{|b_j|}_{=b_j}}_{=b_{n_k}-B} + \frac{\varepsilon}{3} \le \underbrace{|b_{n_k}-B|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|B-B_n|}_{<\varepsilon/3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

also $A_n \to A$. $\square$

(auch bewiesen, dass absolut konvergent $\Rightarrow$ Betrag)

Proposition

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent und es gilt: } \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.}$$

Bemerkung

Diese Sätze gelten nicht in $\mathbb{Q}$!!!

Satz !!!

Sei (a_n) absolut konvergent, $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv (Permutation auf $\mathbb{N}$). Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

größter Unterschied zw. bed. u. abs. konv.

in $\mathbb{R}^s$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent $\Rightarrow \exists\, \sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz (Riemann'scher Umordnungssatz)

(a_n) Folge in $\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent, $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
Dann $\exists\, \sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$.

Satz 1. *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Funktion. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Beweis. Setze $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ und $B := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N_0, sodass

$$|A - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |B - B_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N_0$ gilt. Setze $N := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(N_0)\}$. Sei $n \geq N$. Definiere $r := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Dann gilt

$$\Bigg|A - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}}_{=\sum_{k=1}^{N_0} a_k + \sum^{n}_{\substack{k=1\\ \sigma(k)>N_0}} a_{\sigma(k)}}\Bigg| \leq \underbrace{|A - A_{N_0}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1\\ \sigma(k)>N_0}}^{n} |a_{\sigma(k)}|}_{\leq \sum_{k=N_0+1}^{r} |a_k|} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\sum_{k=N_0+1}^{r} |a_k|}_{=B_r - B_{N_0}} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{|B - B_r|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|B - B_{N_0}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon .$$

Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$. □

Riemann'sche Umordnungssatz

Satz 2. *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe, und weiters sei $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann gibt es eine bijektive Funktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$ gilt.*

Beweisidee. Sei $J_1 := \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ und $J_2 := \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in J_1} a_n + \sum_{n \in J_2} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n \in J_1} a_n - \sum_{n \in J_2} a_n$. Wären sowohl $\sum_{n \in J_1} a_n$ als auch $\sum_{n \in J_2} a_n$ konvergent, dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent. Falls eine dieser Reihen konvergent und die andere divergent wäre, dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Also müssen sowohl $\sum_{n \in J_1} a_n$ als auch $\sum_{n \in J_2} a_n$ divergent sein. Weiters ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, weil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Wähle jetzt so lange Indizes aus J_1, bis die Summe größer als r ist (bzw. grßer als 1 im Fall $r = +\infty$, bzw. 0 im Fall $r = -\infty$). Dann wähle so lange

Indizes aus J_2 bis die Summe kleiner als r ist (bzw. 0, bzw. -2), dann wieder so lange aus J_1 bis die Summe größer als r ist (bzw. 3, bzw. -1), und so weiter. Damit erhalten wir eine Umordnung, die gegen r konvergiert. □

Satz 3. *Seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen. Dann ist das Cauchyprodukt* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *mit* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) .$$

Beweis. Setze $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $R_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ und $R := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ und $S := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ und $D_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}|$$

und

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k| \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \underbrace{\sum_{j=0}^{n-k} |b_j|}_{=S_{n-k} \le S} \le S \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |a_k|}_{=R_n \le R} \le RS .$$

Daher ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, und deshalb konvergiert diese Folge. Setze $D := \lim_{n\to\infty} D_n$. Wegen $|c_n| \le \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}|$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ nach dem Majorantentest, also $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut. Setze $C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} A_n B_n = AB$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|C - C_n| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |AB - A_n B_n| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{und} \quad |D - D_n| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle $n \geq N$. Sei $n \geq N$. Dann ist

$$|C - AB| \leq \underbrace{|C - C_n|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + |C_n - A_n B_n| + \underbrace{|A_n B_n - AB|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} <$$

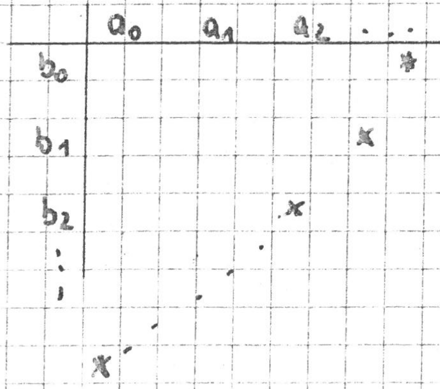
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}}_{=\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j} - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)}_{=\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j} \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} a_k b_j \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} |a_k||b_j|}_{\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|}_{=D_{2n} - D_n}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|D_{2n} - D|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|D - D_n|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon\,.$$

Somit ist $C = AB$. $\square$

Definition

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Definiere $c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$.
Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das <u>Cauchy-Produkt</u> von $\sum a_n$ und $\sum b_n$.



! Cauchy-Produkt konvergenter Reihen muss nicht konvergieren!

Proposition

$\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Produkt konvergiert absolut.

2. KONVERGENZTESTS

- Majorantentest

- Wurzeltest

Satz:

1.) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

2.) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis:

2.) $\exists$ Teilfolge (a_{n_k}) mit $|a_{n_k}| > 1$ $\forall k \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ Reihe divergiert.

K. Tests

1.) Wähle q so, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$.

$\exists N \quad \forall n \geq N : \quad \sqrt[n]{|a_n|} < q \Rightarrow |a_n| < q^n$.

$$\sum_{n=N}^{\infty} q^n = q^N \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{= \frac{1}{1-q}} \overset{\text{Maj.-test}}{\Longrightarrow} \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ abs. konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abs. konv.}$$

$\square$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} : \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{5} \longrightarrow \frac{1}{5} < 1$$

weil $\sqrt[n]{n} \to 1$

Wurzeltest $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ konvergiert $\left(= \frac{15}{32}\right)$

3 Quotiententest

Proposition:

(a_n) Folge in $\mathbb{R}^s$, $a_n \neq 0 \ \forall n$.

1.) $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

2.) $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Proposition:

$a_n \neq 0 \ \forall n$. Dann gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

$\Rightarrow$ Wurzeltest öfter anwendbar als Quotiententest

Integraltest

Satz

$f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (absolut) genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Beispiele:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad \frac{1}{x} \downarrow$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}$ div. $\overset{\text{Integralt.}}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \frac{1}{x^2} \downarrow$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ konv. $\overset{\text{Int.t.}}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv.

Proposition

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

Leibniztest

Satz:

Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}$, monoton fallend.
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Beispiel

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. $\quad \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right)$

$\frac{1}{n} \downarrow 0 \overset{\text{L.T.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert $(\log 2)$.

Satz (Verallgemeinerung von Leibniz)

Sei (a_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Weiters sei (b_n) eine Folge in $\mathbb{R}^s$ und $\exists C \in \mathbb{R}$ mit
$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leq C. \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Warum Verallgemeinerung

1 Folge: $a_n \downarrow 0$
2 Folge $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_n\right| < C$
$\Rightarrow$ durch Konstante [illegible] beschränkt

$b_n = (-1)^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \underbrace{1+(-1)}_{=0} + \underbrace{1+(-1)}_{=0} + \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ konv.}$$

Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

$a_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$ — mont fallend — gegen 0 konv

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sin k}_{=\operatorname{Im}(e^{ik})}\right| \leq \Bigg|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{e^{ik}}_{=(e^{i})^k}}_{=\frac{e^i - e^{ik}}{1-e^i}}\Bigg| \leq \frac{2}{|1-e^i|} \quad \forall n$$

geom. Reihe

Im ≤ abs komplexe Zahl

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \text{ konvergiert.}$$

Beispiel:

(a_n) sei durch $a_{2n} := \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$, $a_{2n-1} := \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

alternierend, $a_n \to 0$ $\cancel{\overset{\text{Leibniz}}{\Rightarrow}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

$\Rightarrow$ $|a_n|$ ist nicht monoton fallend!!

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_{2n-1} + a_{2n})}_{= \frac{2}{n}} \text{ ist divergent}$$

3. Potenzreihen

Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ <u>Potenzreihe</u> $(z \in \mathbb{C})$. Dabei heißt $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ der <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe $\left(\frac{1}{\infty} := 0, \frac{1}{0} := \infty\right)$.

im Reellen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

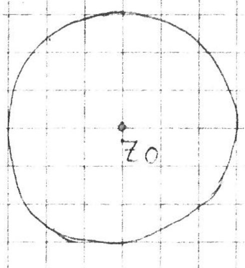
Definition

$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ heißt Konvergebiet der Potenzreihe.

Potenzreihe

$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$

$< R < \infty$



$(x_0 - R, x_0 + R)$

$= \infty$: $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$

$= 0$: $\emptyset$ $\emptyset$

Proposition

$\boxed{\text{Falls } |z-z_0| < R, \text{ dann konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ absolut.}}$

Beweis:

Wurzeltest: $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\ |z-z_0|$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \cdot \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{= \frac{1}{R}} = \frac{|z-z_0|}{R} < 1$$

$\overset{\text{Wurzeltest}}{\Rightarrow}$ absolute Konvergenz $\square$

Proposition

Falls $S \in \mathbb{R}$ erfüllt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konvergiert,
falls $|z-z_0| < S$, und divergiert, falls $|z-z_0| > S$,
dann ist S der Konvergenzradius.
Genauso umgekehrt.

Beweis:

$\Rightarrow$: • $|z-z_0| < R \Rightarrow$ Konvergenz, $|z-z_0| > R$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \frac{|z-z_0|}{R} > 1 \overset{\text{Wurzeltest}}{\Rightarrow} \text{divergent}$$

$\Rightarrow \; \limsup |a_n(z-z_0)|^{\cdot} = R$

Falls $|z-z_0| > S \Rightarrow$ divergent $\Rightarrow \frac{|z-z_0|}{R} \geq 1 \Rightarrow |z-z_0| \geq R$

$\Rightarrow S \geq R$.

- $|z-z_0| > R \Rightarrow \underbrace{\frac{|z-z_0|}{R} > 1}$ $\Rightarrow$ div. $\Rightarrow S \leq R$.

$\Rightarrow |z-z_0| > R$ $\square$

Beispiele:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \left(= \frac{1}{1-x}\right)$$

$R = 1$

$|x| = 1 \Rightarrow |x^n| = 1 \not\to 0 \Rightarrow$ div. am Rand

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \quad (= \log(x+1))$$

$R = 1$

$x = -1$: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergent (Leibniz)

$\Rightarrow$ konvergiert hin und wieder am Rand!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}, \quad R = 1$$

$|x| = 1 \Rightarrow \left| \frac{x^n}{n(n-1)} \right| \leq \frac{1}{(n-1)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $\xRightarrow{\text{Majorantenkrit.}}$ konv.

roposition

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Konvergenzradius R_1,

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ Konvergenzradius R_2.

1.) $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

$R \geq \min\{R_1, R_2\}$

2.) $$\sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n)(z-z_0)^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad R \geq R_1.$$

3.) $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n\right),$$

$R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

eweis:

1.) $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$: Summensatz (Summe von konv. Reihen konvergiert)

2.) analog

3.) $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$: absolute Konvergenz

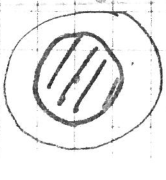
$\Rightarrow$ Cauchy-Produkt $\Rightarrow$ Konvergenz

tz:

ei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

eiter sei $r \in (0, R)$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

leichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r\}$.

in $\mathbb{C}$ 

in $\mathbb{R}$ 

Proposition
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, Konvergenzradius R.

Dann haben $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z-z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z-z_0)^n$

Konvergenzradius R.   Konvergenzradius bleibt beim Integrieren u. Differenzieren gleich

Beweis:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\to 1} \; \underbrace{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}^{\frac{n+1}{n}}} \Big)$$

$$\underbrace{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}_{\to \frac{1}{R}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \qquad \square.$$

1.) des folgenden Satzes gilt auch in $\mathbb{C}$ (aber ganz anderer Beweis).

Satz! (Differenzieren u. Integrieren von Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R,

setze $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

1.) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x-x_0)^n$ falls $|x-x_0| < R$

2.) Für $|x-x_0| < R$ gilt $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-x_0)^n$.

Indexverschiebung!

Beweis:

2.) $r = |x-x_0|$, $f_n \xrightarrow{glm.} f$ auf $[x_0 - r, x_0 + r]$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} (x-x_0)^k = \sum_{n=1} \frac{a_{n-1}}{n} (x-x_0)^n$$

Beweis:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot r^n|} = r \cdot \underbrace{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}_{= \frac{1}{R}} = \frac{r}{R} < 1 \quad \overset{\text{Wurzeltest}}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \text{ konvergiert.}$$

Sei $\varepsilon > 0$. $|z - z_0| \leq r$. $\exists N : \forall n \geq N : \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon$.

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{= \sum_{k=n+1}^{\infty}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \underbrace{|z - z_0|^k}_{\leq r^k} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \quad f_n \to f$ gleichmäßig. $\square$

Korollar

Für $|z_1 - z_0| < R$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ stetig in z_1.

Beweis:

Wähle r so, dass $|z_1 - z_0| < r < R$.

$\underset{\text{stetig}}{f_n} \overset{gl.}{\to} f$ auf $\{z : |z - z_0| \leq r\} =: A \Rightarrow f$ stetig auf $A \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ ist stetig in z_1. $\square$

1.) Setze $g(x) := \sum_{n=0} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n$. Konvergenzradius R.

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot a_n}{n} (x-x_0)^n = f(x) - a_0 .$$

$$\overset{HS}{\Longrightarrow} f'(x) = (f(x) - a_0)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n .$$ □

Funktionen in Potenzreihen entwickeln

- $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$

$\Rightarrow$ nicht in Potenzreihe entwickelbar

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$R = 1$

Weitere Potenzreihen

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad R = \infty$

- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad , \quad R = \infty$

- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad , \quad R = \infty$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

(braucht sich nur 1. Formel merken, dann kann man sich die anderen 2 herleiten)

- geom. Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , R = 1$

- binomische Reihe: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad , \quad R = \begin{cases} 1 , & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0 \\ \infty , & \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n=0, \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} & , \text{ falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Beispiel:

e^x um 3 : $\nearrow$ wichtig!!

$$e^x = e^{(x-3)+3} = \overbrace{e^{x-3}}^{\text{Potenzreihe von } e^x} e^3 = e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!} (x-3)^n \quad , R = \infty$$

Beispiel:

$f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} , R=1.$$

$$f(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \quad : \quad x=0 \; : \; 0=c$$

$$\Rightarrow \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} , R=1.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n , \quad |z_1 - z_0| = R$$

	Reihe konv.	Reihe div.
f stetig in z_1		
f nicht stetig in z_1		

Abelsche Grenzwertsatz

1. konv
2. stetig im Punkt
3. Punkt auf Rand von KG

wichtig

Satz:

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius R,
sei z_1 so, dass $|z_1 - z_0| = R$.
f sei auch in z_1 definiert. Falls f stetig in z_1 und
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergiert, dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n = f(z_1)$.

Beispiel:

$$x + (1-x) \cdot \log(1-x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad \text{K.r. } R = 1$$

$x = -1$: $f(x) = x + (1-x)\log(1-x)$ ist stetig in -1.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ konvergiert

$$\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = -1 + 2 \cdot \log 2.$$

Beweis des Quotiententests

1.) Wähle q so, dass $\limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q < 1$

$\exists N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \quad \forall n \geq N$

Induktion: $|a_n| \leq \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n \quad \forall n \geq N$.

Geometrische Reihe als Majorante $\overset{MT}{\Longrightarrow}$ absolute Konvergenz.

$\square$

Beweis von $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

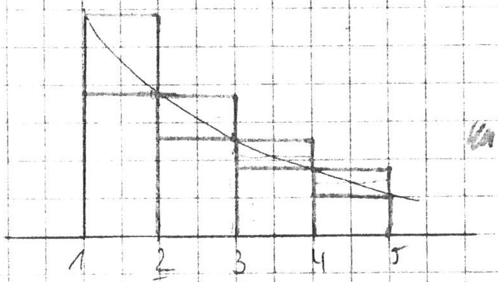
Sei $q > \limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow \exists N$:

$|a_n| = \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n \quad \forall n \geq N$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \underbrace{\sqrt[n]{q^N}}_{\to 1} \cdot q \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} . \qquad \square$$

Beweis vom Integraltest



$f(x)$ monoton fallend

$$f(2) + f(3) + \ldots = \sum_{n=\cancel{1}2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \square$$

Beweis von $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konv. $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

$$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

$\alpha \le 0$: $\quad x^{-\alpha} \ge 1 \quad \forall x \ge 1 \Rightarrow n^{-\alpha} \not\to 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ div.}$$

$\alpha > 0$: $\quad \frac{1}{x^\alpha}$ monoton fallend

Integraltest: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv. $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\,dx$ konv. $\Leftrightarrow$

$$-\alpha < -1 \Leftrightarrow \alpha > 1. \qquad \square$$

Beweis des Leibnizkriteriums

$$A_n := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k .$$

Behauptung: $A_{2n-1} \geq A_{2n+1} \geq A_{2n} \geq A_{2n-2}$

Beweis der Behauptung:

Induktion: $A_{2n} = A_{2n-1} - \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \leq A_{2n-1}$

$$A_{2n} = \underbrace{A_{2n-1}}_{= A_{2n-2} + a_{2n-1}} - a_{2n} = A_{2n-2} + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{\geq 0} \geq A_{2n-2}$$

MONOTON FALLEND

$$A_{2n+1} = \underbrace{A_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0}}_{\geq A_{2n}} = A_{2n-1} \underbrace{- a_{2n} + a_{2n+1}}_{\leq 0} \leq A_{2n-1}$$

$\diamond$

(A_{2n}) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow$ konvergent

Setze $A := \lim_{n \to \infty} A_{2n}$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N: \forall n \geq N: |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists K: \forall k \geq K:$
$|A - A_{2k}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $n \geq \max(N, 2K)$.

1. Fall: n gerade: $\Rightarrow n = 2k$, $k \geq K$, $|\underbrace{A_n}_{= A_{2k}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

2. Fall: n ungerade: $n = 2k+1$, $k \geq K$,
$$|\underbrace{A_n}_{= A_{2k+1} = A_{2k} + a_{2k+1}} - A| \leq \underbrace{|A_{2k} - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon .$$

$\square$.

Beweis von Verallgemeinerung aus Leibnitzkrits:

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \quad , \quad B_0 := 0 \; .$$

$$b_n = B_n - B_{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{b_k}_{=B_k - B_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot B_k - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot B_{k-1}}_{= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k} =$$

$$= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \, (a_k - a_{k+1}) - \underbrace{a_1 B_0}_{=0}$$

$$|B_k| \leq C \quad \forall n .$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} B_k \, (a_k - a_{k+1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} C \, (a_k - a_{k+1}) =$$

$$= C \, (a_1 - \underbrace{a_n}_{\to 0}) \to C a_1$$

Grenzkrit

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \underbrace{\underbrace{a_n}_{\to 0} \underbrace{B_n}_{|\ldots| \leq C}}_{\leq 0} \Big)}_{= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, (a_k - a_{k+1}) \text{ ist konvergent}$$

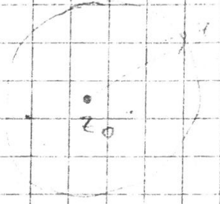
$\square$

XI 7t

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R $(R \in (0, +\infty))$.

z_1 so, dass $|z_1 - z_0| = R$. Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{t \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t(z_1 - z_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n.$$



Beweis: ABEL

$x = t$

$b_n = a_n (z_1 - z_0)^n$

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Also, es genügt der Fall $R = 1$ und $z_1 = 1$ zu betrachten.

Setze $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

$A_{-1} = 0$.

$A_n - A_{n-1} = a_n$

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{=(A_k - A_{k-1})} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot x^k}_{= \sum_{k=-1}^{n-1} A_k \cdot x^{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k (1-x) - \underbrace{A_{-1} x^0}_{=0} = A_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k = \frac{1}{1-x} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{\to \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =: f(x)} - \underbrace{A_n}_{\to A} \underbrace{x^n}_{\to 0} \Big) \to \frac{1}{1-x} f(x)$$

$|x| < 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$A = (1-x) \cdot A \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\substack{= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \text{geom. Reihe}}} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n .$$

$$|f(x) - A| = |1-x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A) x^n \right| \leq |1-x| \sum_{n=0}^{\infty} |A_n - A| \, |x|^n =$$

$$= \underbrace{|1-x| \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |A_n - A| \underbrace{|x|^n}_{\leq 1}}_{< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ falls } |x-1| < \delta} + \underbrace{|1-x| \sum_{n=N}^{\infty} \underbrace{|A_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} |x|^n}_{< \frac{\varepsilon}{2} |x|^N \leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon .$$

$\square$

e^x – Potenzreihe (Beweis)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \underline{\infty}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!}}_{= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Indexverschiebung

Übgl. $\Rightarrow$ $\exists c : f(x) = c \cdot e^x$. $\quad 1 = f(0) = c$

$$\Rightarrow \quad e^x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

inomische Reihe für $\alpha \notin \mathbb{N}_0$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| \Leftrightarrow$$

NR: $\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} \binom{\alpha}{n}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Big| \underbrace{\frac{\alpha-n}{n+1}}_{= \frac{\frac{\alpha}{n} - 1}{1+\frac{1}{n}} \to -1} \Big| = 1$$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \qquad R=1$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{\binom{\alpha}{n}}_{= \frac{\alpha-n+1}{\alpha}\binom{\alpha}{n-1}} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha-n) \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}_{f(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n}_{= x \cdot f'(x)}$$

$$\Rightarrow \quad (1+x) f'(x) = \alpha f(x)$$

Diff.gl.

$$\Rightarrow \quad \exists c: \quad f(x) = c \cdot (1+x)^{\alpha}$$

$$1 = f(0) = c$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

□

sin x – Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \qquad R = \infty$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

Nullter Glied muss weg gelassen $\Rightarrow n = 1$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = -\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}_{f(x)} = -f(x)$$

$$f'' + f = 0$$

cha. Polynom: $x^2 + 1 = 0$

Nullstellen: $x^2 = -1$

$x = \pm i$

Aufg. 1)

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cdot \sin x$$

$$0 = f(0) = c_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = c_2 \cdot \sin x$$

$$f'(x) = c_2 \cdot \cos x$$

$$1 = f'(0) = c_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\sin x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}$$

$\square$

cos x – Potenzreihe (Beweis)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$