Analysis

3. 3. 201

# I REELLE ZAHLEN

Reelle Zahlen sind alle Zahlen auf der Zahlengerade und können durch unendliche Dezimalzahlen und "lückenlos" beschrieben werden.

$$\frac{1}{3} = 0,\dot{3} \quad \rightarrow \quad 0,\dot{9} = 3 \times 0,\dot{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = 1,\dot{0}$$

<u>Proposition</u>

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: 1. Methode: Induktion nach $n$

IA: $n=1$ linke Seite: $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ rechte Seite: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

IS: $n>1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k}_{IV: = \frac{(n-1)n}{2}} + n = n\underbrace{\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Methode:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

$$= n \cdot (n+1)$$

$$S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$\square$

Endliche geometrische Reihe:

<u>Prop.</u> Für $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

<u>Beweis</u>: 1. Methode: Induktion

IA = $n = 0$ $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1$ ; $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$

IS: $n>0$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} q^k}_{IV = \frac{1-q^n}{1-q}} + q^n = \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q}$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2. Methode

$$s = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n$$

$$qs = q+q^2+q^3+\ldots+q^n+q^{n+1}$$

$$s-qs = (1-q)s = 1-q^{n+1} \Rightarrow s = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$\square$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt[2]{x^2} = |x|$

## Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

$a+bi \quad (a,b \in \mathbb{R}) \quad i^2 = -1$

Bsp.: • $\frac{19-9i}{2-3i} = \frac{(19-9i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{58-27i^2+39i}{13} = \frac{65+39i}{13} = 5+3i$

komplex konjugiert

• $\sqrt{5-12i} = a+bi$

$5-12i = a^2-b^2+2abi \qquad a^2-b^2=5 \quad 2ab=-12$

$a^2-\left(\frac{6}{a}\right)^2=5 \qquad a^4-5a^2-36=0 \qquad ab=-6$

$a^2-\frac{36}{a^2}=5 \qquad a^2 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+36} = \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2} = 9 \qquad b = -\frac{6}{a}$

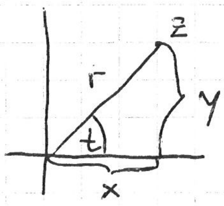
$a=3 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \sqrt{5-12i} = \pm(3-2i)$

im Komplexen $\mathbb{C}$ nicht eindeutig

$z = x+iy \qquad x = Re(z) \qquad y = Im(z)$

$\bar{z} = x-iy \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Zeichnen von komplexen Zahlen auf Gaußscher Zahlenebene




Polardarstellung: $z = r\cdot e^{it}$

$e^{it} = \cos t + i\sin t \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \cos^2\pi = \cos\pi\cdot\cos\pi = \cos(2\pi)$

$e^{x+iy} = e^x\cdot\cos y + ie^x\cdot\sin y$

$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$(e^z)^n = e^{n\cdot z} \qquad n \in \mathbb{Z}$

# EINFÜHRUNG IN DIE ANALYSIS

Analysis beschäftigt sich mit reellen Zahlen und Abbildungen auf diese.

reelle Zahlen sind unendliche Dezimal-Zahlen

$0,\overline{9} = 1,\overline{0}$

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$

$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,\dot{9}$

$\overset{\shortparallel}{1,\dot{0}}$

---

<u>Proposition</u>: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>Beweis</u>: Sei $s = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n$

$$\begin{array}{ll} s = & n+(n-1)+\ldots+1 \\ \hline 2s & =(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1) = n(n+1) \end{array}$$

$\Rightarrow s = \frac{n(n+1)}{2}$ $\square$

<u>Proposition</u>: Für $q \in \mathbb{C}$, $q \neq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (endliche geometrische Reihe)

<u>1. Beweis</u>: Induktion nach $n$

$n=0$: $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1$

Sei $n>0$ dann gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} q^k}_{=\frac{1-q^n}{1-q}} + q^n = \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\square$

<u>2. Beweis</u>: $s = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n$

$$\begin{array}{ll} qs = & q+q^2+q^3+\ldots+q^n+q^{n+1} \\ \hline (1-q)s = & 1-q^{n+1} \qquad | :(1-q) \quad q \neq 1 \end{array}$$

$s = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bsp. aus Unterstufe:

$$x = 0.\overline{3}$$
$$10x = 3.\overline{3}$$
$$9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[2]{x^2} = |x|$$

$$\mathbb{R}^s := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots x_s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{C}^s := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ z_s = x_s + iy_s \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^{2s}$$

**Def:** Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$ sei $|x| := \sqrt[2]{\sum_{j=1}^{s} x_j^2}$ der Betrag von $x$

**Prop:** (1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^s$

(2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $x \in \mathbb{R}^s, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

**Bew:** (1) $|x| = \sqrt[2]{x_1^2 + \dots + x_s^2} \geq 0$

(2) $(\Leftarrow)$ $|0| = \sqrt[2]{0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 0$

$(\Rightarrow)$ $|x| = 0 \Rightarrow |x_j| \leq \sqrt[2]{x_1^2 + \dots + x_s^2} = |x| = 0 \Rightarrow x_j = 0$

Also ist $x = 0$

(3) $|\lambda x| = \sqrt[2]{\underbrace{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_s)^2}_{= \lambda^2 (x_1^2 + \dots x_s^2)}} = |\lambda| \sqrt[2]{x_1^2 + \dots + x_s^2} = |\lambda| \cdot |x|$ $\square$

$z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $z \cdot \overline{z} = (x^2 - i^2 y^2) = x^2 + y^2 = |z|^2$

Für $z \in \mathbb{C}^s$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$

**Beweis:** $|\lambda z|^2 = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{|\lambda z_j|^2}_{\lambda z_j \overline{\lambda} \cdot \overline{z_j} = \underbrace{\lambda \overline{\lambda}}_{|\lambda|^2} \cdot \underbrace{z_j \overline{z_j}}_{|z_j|^2}} = |\lambda|^2 \cdot \sum_{j=1}^{s} |z_j|^2 = \circledast$

$= \circledast \; (|\lambda| \cdot |z|)^2 \Rightarrow |\lambda z| = |\lambda| |z|$ $\square$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

Prop.: Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$ Dann gilt

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{s} x_j y_j}_{= \langle x, y \rangle} \leq \left| \sum_{j=1}^{s} x_j y_j \right| \leq |x| \cdot |y|$$

es Produkt

Bew.: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq |x - \lambda y|^2 = \sum_{j=1}^{s} (x_j^2 - 2\lambda x_j y_j + \lambda^2 y_j^2) = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} x_j^2}_{= |x|^2} - 2\lambda \sum_{j=1}^{s} x_j y_j + \lambda^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{s} y_j^2}_{= |y|^2}$$

Setze $\lambda = \frac{\sum_{j=1}^{s} x_j y_j}{|y|^2}$, falls $y \neq 0$ (Falls $y = 0$: Ungleichung erfüllt)

$$\Rightarrow 0 \leq |x|^2 - 2 \frac{\left(\sum_{j=1}^{s} x_j y_j\right)^2}{|y|^2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{s} x_j y_j\right)^2}{|y|^4} |y|^2 =$$

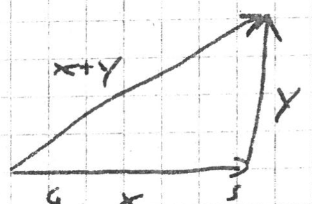
$$|x|^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{s} x_j y_j\right)^2}{|y|^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{s} x_j y_j\right)^2 \leq |x|^2 |y|^2 = (|x||y|)^2$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{s} x_j y_j \right| \leq |x||y|$$

Prop.: (1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

(2) $\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|$




Bew: (1) $|x+y|^2 = \sum_{j=1}^{s} (x_j^2 + 2x_j y_j + y_j^2) = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} x_j^2}_{= |x|^2} + 2 \sum_{j=1}^{s} x_j y_j + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} y_j^2}_{= |y|^2}$

$$= |x|^2 + 2 \underbrace{\sum_{j=1}^{s} x_j y_j}_{\leq |x||y|} + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

($\rightarrow$ Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

(2) $|a+b| \leq |a| + |b|$

$a := x-y \;,\; b := y$ :

$|x| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

$a := x \;,\; b := y-x$

$|y| \leq |x| + \underbrace{|y-x|}_{=|x-y|} \Rightarrow \underbrace{|y|-|x|}_{=-(|x|-|y|)} \leq |x-y|$

$\Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \qquad \square$

# I. REELLE ZAHLEN

## 1.) Axiome der reellen Zahlen

<u>Def</u>: Die Menge $\mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften

Addition: $\forall\, a,b \in \mathbb{R} \quad \exists!\; a+b \in \mathbb{R}$.

Multiplikation: $\forall a,b \in \mathbb{R}\; \exists!\; ab \in \mathbb{R}$.

Totalordnung: •) Für $a,b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:

-) $a<b$,

-) $a=b$,

-) $b<a$

•) $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$

Assoziativgesetze: •) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

•) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

Kommutativgesetz: •) $a+b = b+a$,

•) $a\cdot b = b\cdot a$.

Distributivgesetz: $a(b+c) = ab+ac$

(zweites Distributivgesetz $(b+c)a = ba+ca$ folgt aus Kommutativität)

neutrales Element: •) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}: \quad 0+a=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

•) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}: \quad 1\cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

•) $1 \neq 0$

inverses Element: •) $\forall a \in \mathbb{R}: \exists (-a) \in \mathbb{R}: \; (-a)+a = 0$,

•) $\forall a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$: $\exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}: a^{-1}\cdot a = 1 \quad (a^{-1} = \frac{1}{a})$

Verträglichkeitsgesetze: •) $a<b,\; c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c < b+c$

•) $a>0, b>0 \Rightarrow a\cdot b > 0$ (daraus folgt)

$$\left(\begin{array}{l} a<b,\; c>0 \Rightarrow ac<bc, \\ a<b,\; c<0 \Rightarrow ac>bc \end{array}\right).$$

Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (in $\mathbb{R}$).

Bis auf Isomorphie ist $\mathbb{R}$ durch diese Axiome eindeutig bestimmt.

türkisch chinesisch
1, I, eins, one, uno, unu, bir, on, 一 (← Isomorphie)

## 2.) Ungleichungen

Bsp: $\frac{4x-5}{x-2} < x$

1. Fall: $x > 2$: $\frac{4x-5}{x-2} < x \iff 4x-5 < x^2-2x \iff$

$\underbrace{x^2 - 6x + 5}_{} > 0$ $\qquad 3 \pm \sqrt{9-5} = 1,5$

$= (x-1)(x-5) > 0$

$\iff \begin{cases} x > 1 & \text{und } x > 5 \quad (x > 5) \\ \text{oder} & \\ x < 1 & \text{und } x < 5 \quad (x < 1) \end{cases}$ fällt weg, da $x > 2$

Lösung: $(5, +\infty)$

2. Fall: $x < 2$: $\frac{4x-5}{x-2} < x \iff 4x-5 > x^2-2x \iff$

$x^2 - 6x + 5 < 0$

$= (x-1)(x-5) < 0 \iff \begin{cases} x > 1 \text{ und } x < 5 \\ \text{oder} \\ \cancel{x < 1 \text{ und } x > 5} \end{cases}$ Lösung: $(1, 2)$

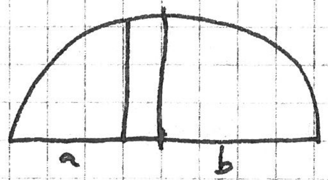
Insgesamt: $\left\{x : \frac{4x-5}{x-2} < x\right\} = (1,2) \cup (5, +\infty)$.

---

$a, b$ $\quad \frac{a+b}{2}$ arithmetische Mittel

$\sqrt[2]{ab}$ geometrische Mittel $\Big\}$ $a > 0,\ b > 0$

$\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$ harmonische Mittel




Prop: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ gilt:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt[2]{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

Bew: $0 \le \left(\sqrt[2]{a} - \sqrt[2]{b}\right)^2 = a - 2\sqrt[2]{ab} + b \Rightarrow (*)\ 2\sqrt[2]{ab} \le a + b$

$(*) \Rightarrow \sqrt[2]{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$(*) \Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt[2]{ab}$ $\square$.

## 3.) Vollständigkeit

$a = \lim_{n\to\infty} a_n :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$

<u>Proposition:</u> Es sind äquivalent:

(1) $\forall a,b$ mit $b>0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a<nb$ (Archimedisches Axiom)

(2) $\forall a$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a<n$

(3) $\lim_{n\to 0} \frac{1}{n} = 0$

<u>Bew.:</u> (1) $\Rightarrow$ (2): $b=1$ $\exists n \in \mathbb{N}: a < n \cdot 1 = n$

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\varepsilon > 0$. $\frac{1}{\varepsilon}$, $\exists N \in \mathbb{N}: N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Sei $n \geq N$

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

(3) $\Rightarrow$ (1): 1. Fall: $a \leq 0$ Setze $n=1$:

$a \leq 0 < b = nb$

2. Fall: $a>0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \exists N \; \forall n \geq N: \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{b}{a}$

$\Rightarrow a < nb$. $\square$

<u>Satz:</u> Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a<n$.

<u>Bew:</u> Angenommen $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $n \leq a$ $1 \in \mathbb{N}$ ($\Rightarrow \mathbb{N} \neq \emptyset$)

$\mathbb{N}$ sind nicht leer und nach oben beschränkt $\Rightarrow x := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$x - \frac{1}{2} < x \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $x - \frac{1}{2} < n$

$\Rightarrow \underset{\text{sup}}{x} < x + \frac{1}{2} < \underbrace{n+1}_{\text{natürliche Zahl}}$ – Widerspruch $\square$

$\mathbb{Q}$ ist direkt in $\mathbb{R}$

Prop.: (1) Seien $r < s \in \mathbb{R}$. Dann $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ mit $r < q < s$

(2) $\forall\, r \in \mathbb{R}\ \exists\, (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r$

(Man kann $q_n$ größer $r$ wählen)

Bew: (1) $s - r > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < s-r$

$K := \{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}, \frac{k}{n} \le r\}$ $\quad K \neq \emptyset$ $K$ ist nach oben beschränk

Definiere $k := \max K + 1 \quad k \in \mathbb{Z}, \; q = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$

$\frac{k}{n} > r \quad \frac{k-1}{n} \le r \Rightarrow \frac{k}{n} = \underbrace{\frac{k-1}{n}}_{\le r} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{< s-r} < s$, also

$r < q < s$

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$: $\exists\, q_n \in \mathbb{Q}$ mit $r < q_n < r + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r.$ $\square$

4.) Spezielle Mengen und Funktionen

**Def.:** Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, falls für $a, b \in I$ mit $a < b$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ folgt, dass $x \in I$.

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall $(]a,b[)$

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

halboffene Intervalle

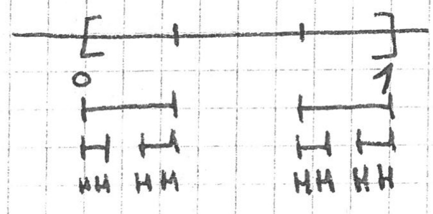
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

uneigentliche Intervalle z.B. $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$[a,b],\ a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad (a,b]$, für $a$ ist auch $-\infty$ zugelassen

Cantormenge: 


stets das innere Drittel wegnehmen

$C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$

$C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$

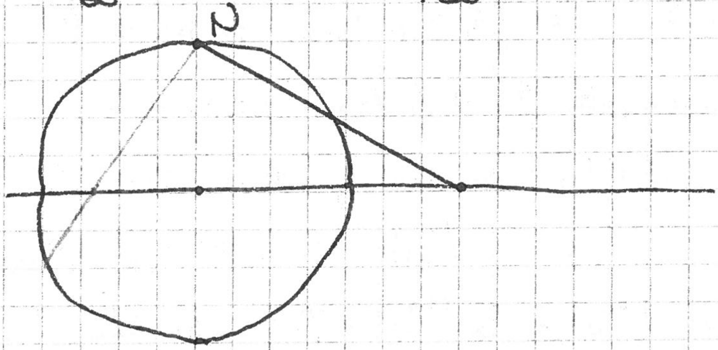
$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \qquad C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$

$C$ ist überabzählbar

erweiterte reelle Zahlen: $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$


N... Nordpol




$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

($\Rightarrow \infty$ hat nicht die selbe Bedeutung, wie $-\infty$ oder $+\infty$)

**Def:** Sei $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. (Rekursive Definition)

Setze $a^0 = 1$

Für $n > 0$ definiere $a^n := a^{n-1} \cdot a$

Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ Definiere

$a^n := \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$

Bemerkung: Insbesondere $0^0 = 1$ Manchmal ist es sinnvoll $0^0$ anders zu definieren. „Bei Grenzübergängen nicht naiv mit $0^0$ rechnen.“!!!

Prop: (1) $a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{C}$

(2) $1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

(3) $0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (bei $0^0 = 1$, bei $n < 0$ nicht definiert)

Bew. (1) $a^1 = \underbrace{a^0}_{=1} \cdot a = 1 \cdot a = a$

(2) $1^0 = 1$, $1^1 = 1$ Sei $n > 0$: $1^n = \underbrace{1^{n-1}}_{=1 \text{ (laut Induktionsannahme)}} \cdot 1 = 1$

Sei $n < 0$: $1^n = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{1}}_{=1}\Big)^{-n} = 1$

(3) Induktion: $0^1 \overset{(1)}{=} 0$

Sei $n > 1$, $0^n = 0^{n-1} \cdot 0 = 0$ $\square$

Prop: (1) $|a^n| = |a|^n \quad \forall a \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ (falls $n < 0$, dann muss $a \neq 0$ sein)

(2) $0 \leq a < b$ und $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 0 \leq a^n < b^n$

$0 < a < b$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0 \Rightarrow 0 < b^n < a^n$

(3) Falls $a \neq 0$, dann ist $a^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Bew: (1) $|a^0| = |1| = 1 = |a|^0$

Sei $n > 0$: $|a^n| = |a^{n-1} \cdot a| = \underbrace{|a^{n-1}|}_{=|a|^{n-1}} \cdot |a| = |a|^n$.

Sei $n < 0$: $|a^n| = \left|\left(\tfrac{1}{a}\right)^{-n}\right| = \left|\tfrac{1}{a}\right|^{-n} = \left(\tfrac{1}{|a|}\right)^{-n} = |a|^n$

(2) Induktion nach $n$: $n = 1 \quad 0 \leq a^1 = a < b = b^1$

Sei $n > 1$: $0 \leq a^{n-1} < b^{n-1}$ Weil $a \geq 0$

$0 \leq \underbrace{a^{n-1} \cdot a}_{=a^n} \leq b^{n-1} \cdot a$ Da $b^{n-1} > 0$, ist

$b^{n-1} \cdot a < b^{n-1} \cdot b = b^n$

somit: $0 \leq a^n \leq b^{n-1} \cdot a < b^n$

Sei $n < 0$: $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \underbrace{\left(\tfrac{1}{b}\right)^{-n}}_{b^n} < \underbrace{\left(\tfrac{1}{a}\right)^{-n}}_{a^n}$

(3) $a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \underbrace{|a|^n}_{\overset{(1)}{=} |a^n|} > 0 \Rightarrow |a^n| \neq 0 \Rightarrow a^n \neq 0$. $\square$

Prop: Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

(1) $a^{n+m} = a^n a^m$.

(2) Falls $a \neq 0$, dann ist $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(3) $(a^n)^m = a^{nm}$

(4) $(a \cdot b)^n = a^n b^n$

(5) Falls $b \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Bew.: (1) Induktion nach n:

$m=0$: $a^{n+0} = a^n = a^n \cdot \underbrace{a^0}_{=1} = a^n$

Sei $m>0$: $a^{n+m} = \underbrace{a^{n+(m-1)}}_{=a^n \cdot a^{m-1}} \cdot a = a^n \cdot \underbrace{a^{m-1} \cdot a}_{a^m} = a^n a^m$

(2) kommt später noch

(3) Proseminar

(4) Induktion nach n: $n=0$: $(ab)^0 = 1 = \underbrace{a^0}_{=1}\underbrace{b^0}_{=1} = 1$

Sei $n>0$: $(ab)^n = \underbrace{(ab)^{n-1}}_{=a^{n-1}b^{n-1}} ab = \underbrace{a^{n-1} \cdot a}_{=a^n} \cdot \underbrace{b^{n-1} \cdot b}_{=b^n} = a^n \cdot b^n$ (laut. Def. der Potenz)

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n \overset{(4)}{=} \left(\underbrace{\frac{a}{b} \cdot b}_{=a}\right)^n = a^n \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(2) 1. Fall: $n-m \geq 0$: $a^{n-m} \cdot a^m \overset{(1)}{=} a^n \Rightarrow a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$

2. Fall: $n-m < 0$: $a^{m-n} \cdot a^n \overset{(1)}{=} a^m \Rightarrow \frac{a^n}{a^m} = \frac{1^{m-n}}{a^{m-n}} \overset{(5)}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{m-n} =$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-(n-m)} = a^{n-m}$. $\square$

Prop: Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gelten:

(1) $a^{n+m} = a^n a^m$

(2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(3) $(a^n)^m = a^{nm}$

(4) $(ab)^n = a^n b^n$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Bew: (1) 1. Fall: $n \geq 0$, $m \geq 0$: ✓ (vorhin schon bewiesen)

2. Fall: $n \geq 0$, $m < 0$: $a^n \cdot \underbrace{a^m}_{= \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}} = a^n \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{a^n}{a^{-m}} =$

$= a^{n-(-m)} = a^{n+m}$

3. Fall: $n < 0$ und $m \geq 0$: $a^n a^m = a^m \cdot a^n \underset{\text{2. Fall}}{=} a^{m+n} = a^{n+m}$

4. Fall: $n < 0$ und $m < 0$:

$\underbrace{a^n}_{= \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}} \cdot \underbrace{a^m}_{= \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(n+m)} = a^{n+m}$

(laut Def. neg. Potenz)

(2) $a^{n-m} a^m = a^n \Rightarrow a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$.

(3) Proseminar

(4) 1. Fall: $n \geq 0$: ✓ (vorhin schon bewiesen)

2. Fall: $n < 0$: $(ab)^n = \Big(\underbrace{\frac{1}{ab}}_{= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}\Big)^{-n} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}}_{= a^n} \underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)^{-n}}_{= b^n} = a^n \cdot b^n$.

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n b^n \overset{(4)}{=} \left(\frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b}\right)^n = a^n \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ □

Prop: Sei $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$.

(1) Falls $a > 1$, dann $a^n < a^m$

(2) Falls $0 < a < 1$, dann $a^m < a^n$

Bew: (1) $m - n > 0 \Rightarrow \quad 1 = 1^{m-n} < a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \Rightarrow a^n < a^m$.

(2) $\frac{1}{a} > 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}_{= \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}} < \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^m}_{= \frac{1^m}{a^m} = \frac{1}{a^m}} \Rightarrow a^m < a^n$. $\square$

27.4.08

# II FOLGEN

## 1, Folgen

<u>Def:</u> Sei $M \neq \emptyset$. Dann heißt eine Funktion von $\mathbb{N} \to M$ eine Folge

$(a_1, a_2, a_3, \dots)$ $\quad (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)$

manchmal betrachtet man auch $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(a_n)_{n=27}^{\infty}$

<u>Def:</u> Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$, dann heißt $(a_n)$

(1) monoton wachsend (steigend) falls:

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) streng monoton wachsend (steigend) falls:

$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) monoton fallend, falls

$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(4) streng monoton fallend, falls

$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Def:** Sei $(a_n)$ eine Folge. Falls $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ ist, dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)$

zB $(a_1, a_3, a_5, a_7, \dots)$, $(a_1, a_2, a_4, a_8) = (a_{2^n}$

Beispiel: Fibonacci-Folge (Leonardo da Pisa) ~1200 (ca. 1170 – 1240)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right)$$

Definiere: $b_n := \overset{\text{Vektor}}{\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}$ $\quad \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \dots \right) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \right.$

$$b_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times a_{n-1} + 1 \times a_n \\ 1 \times a_{n-1} + 1 \times a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}}_{= b_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_{n-1}$$

~~Eigenw~~

[Eigenwerte, Eigenvek

# 2. Grenzwerte

! $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

<u>Def</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^s$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C}^s, \mathbb{C})$.
Dann heißt $a \in \mathbb{R}^s$ der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
falls das Folgende gilt:

Limes
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon .$$

Schreibweisen: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , $a_n \to a$ , $a_n \xrightarrow{n\to\infty}$ , $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to a}$

„der Grenzwert ist" „die Folge geht gegen $a$"

<u>Bemerkungen</u>

- andere Schreibweise:
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

- $N$ hängt von $\varepsilon$ ab (N braucht nicht minimal gewählt zu werden)

- Falls $(a_n)$ einen Grenzwert hat, heißt sie <u>konvergent</u>, falls nicht, dann heißt sie <u>divergent</u>

- $(a_n)$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ ~~$\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq$~~
$$\Leftrightarrow \exists a \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

~~divergent~~

- $a_n \not\to a \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall N \; \exists n \geq N : |a_n - a| > \varepsilon$

- $(a_n)$ ist divergent
$$\forall a \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall N \; \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

**Prop:** Eindeutigkeit Limes

Falls $(a_n)$ konvergiert, dann ist der $\lim_{n \to \infty} (a_n)$ eindeutig bestimmt

**Bew.** Indirekt: Anp: $a_n \to a$, $a_n \to \tilde{a}$ und $\tilde{a} \neq a$

$$|\tilde{a} - a| > 0 \Rightarrow \frac{|\tilde{a} - a|}{2} > 0.$$

ich weiss $(a_n)$ konvergiert gegen $a$

$\exists N_1 \; \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{|\tilde{a} - a|}{2}$.

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |a_n - \tilde{a}| < \frac{|\tilde{a} - a|}{2}$ Setze $N := \max\{N_1,$

Falls $n \geq N$: $|a_n - a| < \frac{|\tilde{a} - a|}{2}$ und $|a_n - \tilde{a}| < \frac{|\tilde{a} - a|}{2}$

$$\underbrace{|\tilde{a} - a|}_{= \tilde{a} - a_n + a_n - a} < \underbrace{|\tilde{a} - a_n|}_{= |a_n - \tilde{a}| < \frac{|\tilde{a} - a|}{2}} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{|\tilde{a} - a|}{2}} < |\tilde{a} - a|$$

Widerspruch

daher ist $\tilde{a} = a$ $\square$

Prop. Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge, dann ist $(a_n)$ beschränkt

$$(\exists c \in \mathbb{R}\ (c>0) \text{ mit } |a_n| \le c \ \forall n).$$

konvergent ⇒ beschränkt

Beweis: $a := \lim_{n \to \infty} a_n$.

1 ist hier frei gewählt

$$\exists N \ \forall n \ge N : \underbrace{|a_n| - |a| \le |a_n - a| < 1}$$

$$\Rightarrow \underline{|a_n| < |a| + 1}$$

? Prüfungs Trainer S. 39 Nr. 130

Setze $C := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a|+1\}$

Sei $n \in \mathbb{N}$

eines davon, $<$ max aller $|a_n|$

1. Fall: $n < N$: $|a_n| \le C$.

2. Fall: $n \ge N$: $|a_n| \le |a| + 1 \le C$. $\square$

Prop: Sei $(a_n)$ eine Folge mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ falls $(a_{n_k})$ eine Teilfolge von $(a_n)$ ist, dann gilt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$\exists N : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$.

Sei $k \geq N$. Dann ist $n_k \geq k \geq N$. somit ist $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. $\square$

Bsp.: $$a_n := \frac{5n^2 + 17n + 18}{n^2 + 3n + 7}$$

Bruch um $n^2$ kürzen
Z, N $n^2$
dividieren durch nächste Potenz

$$a_n = \frac{5 + \frac{17}{n} + \frac{18}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \to 5$$

$\frac{17}{n} \to 0$, $\frac{18}{n^2} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{7}{n^2} \to 0$

$$\underbrace{|a_n - 5|}_{\substack{\text{Folge } -5(a_n) \\ a_n - 5(a_n)}} = \frac{|2n - 16|}{n^2 + 3n + 7} \leq \frac{2n + 16}{n^2 + 3n + 7}$$

Bruch vergrößern
Z vergrößern
N verkleinern
(+3n+7) weg

$$\leq \frac{2n + 16n}{n^2} = \frac{18}{n}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N > \frac{18}{\varepsilon}$ (so eine Zahl gibt es wegen dem archimedischen Axiom)

Sei $n \geq N$ dann ist $|a_n - 5| \leq \frac{18}{n} < \varepsilon$ $\square$

$\left(\frac{18}{n} \leq \frac{18}{N} \leq \varepsilon\right)$

Bsp. $\varepsilon\ \frac{1}{1000}$, $N = 18001$

Bsp $(n)$ ist divergent, weil sie unbeschränkt ist

Bsp: $(-1)^n$ : $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

$$a_{2n+1} = -1 \to -1$$
$$\neq$$
$$a_{2n} = 1 \to 1$$

Grenzwert nicht eindeutig
bzw. Teilfolge konv. gegen a

## Grenzwertsätze

Grenzwertsätze

Propo: Seien $a_n, b_n$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\underline{a = \lim_{n\to\infty} a_n}$ und $\underline{b = \lim_{n\to\infty} b_n}$

a, b existiert!

dann gelten:

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(4) Falls $b \neq 0$ ~~und~~ $(b_n \neq 0 \; \forall n)$, dann ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Bemerkungen:

(1) und (2) gelten auch in $\mathbb{R}^s$.

(3) gilt auch für $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ und $(b_n) \in \mathbb{R}^s$, bzw $(a_n)$ in $\mathbb{C}$ und $(b_n) \in \mathbb{C}^s$

(4) gilt auch in $\mathbb{C}$.

Beweis (Prop)

(1) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

gewählt

$$\exists N \ \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ u. } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $n \geq N$: $\underbrace{|(a_n + b_n) - (a+b)|}_{= a_n - a + b_n - b} \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$

$< \varepsilon$

Dreiecksungleichung

(3) $a_n$ konvergiert gegen $a \Rightarrow a_n$ beschränkt

$\Rightarrow \exists C > 0$ mit $|a_n| \leq C \ \forall n$. beschränkt

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|b| + C}$

und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|b| + C}$

Sei $n \geq N$

herausheben

$$\underbrace{|a_n b_n - ab|}_{a_n b_n - \underbrace{a_n b + a_n b}_{} - ab} \leq |a_n| \, |b_n - b| + |b| \, |a_n - a|$$

hinzufügen, ändert nichts, aber daraus kommt Dreiecksungleichung

Fortsetzen von Vorseite

$$\le \underbrace{|a_n|}_{\le C} \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{|b|+C}} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{|b|+C}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{|b|+C} (C + |b|) = \varepsilon$$

(2) $$a_n - b_n = \underbrace{a_n}_{\to a} + \underbrace{\underbrace{(-1)}_{\to -1} \underbrace{b_n}_{\to b}}_{\to -b} \to a - b$$

(4) $$\frac{|b|}{2} > 0$$

$$\exists N_0 \ \forall n \ge N_0 : |b| - |b_n| \le \underbrace{|b_n - b|}_{= |b - b_n|} < \overset{\substack{\text{gewähltes} \\ \varepsilon \\ \downarrow}}{\frac{|b|}{2}}$$

$$\underbrace{\frac{|b|}{2}}_{>0} < \underbrace{|b_n|}_{\ne 0} \qquad >0 \Rightarrow \ne 0$$

Sei $n \ge N_0$.

sei $\varepsilon > 0$.

1. Fall $a \ne 0$. $\exists N \ge N_0 : \forall n \ge N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4}$

und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{4|a|}$ ← $\varepsilon$

Sei $n \ge N$: $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n| |b|}$

$$\le \%$$

$$\underbrace{|a_n b - a b_n|}_{= a_n b - ab + ab - ab_n}$$

$$\underbrace{|b_n| > \frac{|b|}{2}}_{< \frac{2}{|b|^2}}$$

$$\leq \frac{2}{|b|^2}\Big(|b|\underbrace{|a_n-a|}_{<\frac{\varepsilon|b|}{4}} + |a|\underbrace{|b_n-b|}_{<\frac{\varepsilon|b|^2}{4|a|}}\Big) < \frac{2}{|b|^2}\Big(\frac{\varepsilon|b|^2}{2}\Big) = \varepsilon$$

2. Fall $a=0$

$$\exists N \geq N_0 \ \forall n \geq N_0 : |a_n - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a}}| < \frac{\varepsilon|b|}{2}$$

Sei $n \geq N$ $\quad \Big|\frac{a_n}{b_n} - \underset{=0}{\underset{\shortparallel}{\frac{a}{b}}}\Big| = \frac{|a_n|}{\underset{>\frac{|b|}{2}}{\underset{\shortparallel}{|b_n|}}} \leq \frac{2}{|b|}\underbrace{|a_n-a|}_{<\frac{\varepsilon|b|}{2}} < \varepsilon$

$\square$

Bsp $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{2n-1} = \frac{4+\frac{3}{n}\to 0}{2-\frac{1}{n}\to 0} = \frac{4}{2} = 2$

**Prop:** Sei $(a_n)$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Heuser S. 152

(1) Falls $b > a$, dann gibt es ein $N$
$\forall n \geq N: a_n < b$

(2) Falls $b < a$, dann $\exists N$
$\forall n \geq N: a_n > b$

**Bew:** zeigen nur (1)

$b - a > 0 \quad \exists N: \forall n \geq N:$ (gew. $\varepsilon$)

$a_n - a \leq |a_n - a| < b - a$

Sei $n \geq N: a_n < b$

der Betrag einer Zahl ist $\geq$ der Zahl selbst

Heusser S. 152

**Prop:** Sei $(a_n)$ Folge im $\mathbb{R}^s$ mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

**Bew** Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N \; \forall n \geq N$:

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| < \varepsilon$$

$\square$

Spezialfall von $f$ stetig $\Leftrightarrow f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$

Im Allgemeinen gilt die ~~Umkehrung~~ Umkehrung nicht

$a_n = (-1)^n$, $|a_n| \to 1$, aber $(a_n)$ ist divergent

**Prop:** $(a_n)$ Folge im $\mathbb{R}^s$. Dann gilt $a_n \to 0$ genau dann wenn $|a_n| \to 0$

**Bew.:** $(\Rightarrow)$ $a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to |0| = 0$

$(\Leftarrow)$ Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \; \forall n \geq N$:

$$|a_n - 0| = \underbrace{\big|\,|a_n| - 0\,\big|}_{= |a_n| = |a_n - 0|} < \varepsilon$$

Falls $a_n < b_n$, $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a < b$?

$a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\quad \underset{0}{\underset{\downarrow}{a_n}} < \underset{0}{\underset{\downarrow}{b_n}}$

"kleiner" bleibt beim ~~g~~ Grenzübergang nicht erhalten. "kleiner gleich" schon

Prop: Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ $\forall n$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Heuser S. 152

~~Dann~~ Dann gilt $a \leq b$

Bew. Anp. $a > b \Rightarrow a > \frac{a+b}{2} > b$

$\exists N \; \forall n \geq N: \; a_n > \frac{a+b}{2}$ und $b_n < \frac{a+b}{2}$

Sei $n \geq N$:

$a_n \leq b_n < \frac{a+b}{2} < a_n$

Widerspruch

Somit $a \leq b$ $\square$

Sandwichsatz

<u>Prop</u> Es seien $(a_n), (b_n), (x_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$

Heuser Satz 22.2 (S. 152)

mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Weiter gelte: $a_n \leq x_n \leq b_n \quad \forall n$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

<u>Bew</u> Sei $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < a$, $a + \varepsilon > a$

$\exists N \; \forall n \geq N: \; a - \varepsilon < a_n, \; b_n < a + \varepsilon$

~~Sei~~ $\cancel{a_n}$

Sei $n \geq N$. Dann ~~gilt~~ ist

$a - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$a - \varepsilon < \overset{x_n}{a_n} < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ $\square$

28.04.2009

Bsp: $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n} \right) = 0$

$$\frac{\sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt[2]{n+1} + \sqrt[2]{n}}{\sqrt[2]{n+1} + \sqrt[2]{n}} = \frac{1}{\sqrt[2]{n+1} + \sqrt[2]{n}} = \frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}}_{\to 1} + 1} \to \frac{0}{2} = 0$$

3. Uneigentliche Grenzwerte

Def: Sei $(a_n)$ Folge in $\mathbb{R}^s$. Dann sagen wir $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, falls $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists N\ \forall n \geq N : |a_n| > r$.

Def: Sei $(a_n)$ Folge in $\mathbb{R}$:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall r \in \mathbb{R}\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n > r$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall r \in \mathbb{R}\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n < r$

$a_n \to +\infty \Rightarrow a_n \to \infty$

$a_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to \infty$

$(-1)^n n \to \infty$, aber weder $\to +\infty$ noch $\to -\infty$

$(-1)^n$ ist divergent, aber $(-1)^n \not\to \infty$.

Bsp: Sei $k \in \mathbb{Z}$

(1) Falls $k > 0$, dann $\lim\limits_{n \to \infty} n^k = +\infty$.

(2) Fall $k = 0$, dann $\lim\limits_{n \to \infty} n^k = 1$.

(3) Falls $k < 0$, dann $\lim\limits_{n \to \infty} n^k = 0$.

Bew:

(2) $n^k = n^0 = 1 \to 1$.

(1) Sei $r \in \mathbb{R}$. Falls $r \leq 0$, dann ist $r < n^k$.

Wenn $r > 0$. Nach Archimedischem Axiom $\exists N$, $N > r$. Sei $n \geq N$

Dann ist $n^k \geq n \geq N > r$. Also $\lim\limits_{n \to \infty} n^k = +\infty$

(3) $n^{-k} \to +\infty$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall n \geq N : \underbrace{n^{-k}}_{=\frac{1}{n^k}} > \frac{1}{\varepsilon}$

Sei $n \geq N$ : $-\varepsilon < 0 \leq n^k < \varepsilon$, $\qquad \varepsilon > n^k$

also $|n^k - 0| < \varepsilon \Rightarrow n^k \to 0$. $\square$

4) Konvergenzsätze

$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$ ; $a_0 = 2$ $\qquad a_n \to a$

$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[2]{2}$

$a_1 = 2$, $\quad a_n = 2a_{n-1} - 1$ $\qquad a_n \to a \Rightarrow a = 2a - 1 \Rightarrow a = 1$

Falsch, weil $a_n$ nicht konvergiert! $(a_n = 2^{n-1} + 1)$

$a_n \to a$ : Sei $\varepsilon > 0$ : $\exists N \ \forall n \geq N$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Seien $n, m \geq N$. $|a_n - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

$(a_n)$ heißt Cauchyfolge, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$(a_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)$ Cauchyfolge

<u>Satz:</u> Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$:

(1) Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(2) Wenn $(a_n)$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann $(a_n)$ konvergent und $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

<u>Beweis:</u> Es genügt (1) zu ~~beweisen~~ zeigen:

$A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad A \neq \emptyset$ (weil z.B. $a_1 \in A$) und $A$ ist nach oben beschränkt $\Rightarrow$ $A$ besitzt ein Supremum. Setze $a := \sup A$

Sei $\varepsilon > 0$. $a - \varepsilon < a \Rightarrow a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $A$

$\Rightarrow \exists N$ mit $a_N > a - \varepsilon$

Sei $n \geq N$. Dann gilt: $a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$

$\Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ Daher ist $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. $\square$

Bsp: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$

$a_1 := 1$, für $n > 1$ sei $a_n := \sqrt[2]{1+a_{n-1}}$ $\quad a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Angenommen $(a_n)$ konvergiert $\Rightarrow$ $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2]{1+a_{n-1}} \underset{x \mapsto \sqrt[2]{1+x} \text{ ist stetig}}{=}$

$\sqrt[2]{1+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}_{=a}} = \sqrt[2]{1+a} \geq 0$

$\Rightarrow \quad a^2 \geq 1+a \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (<2)$

Lemma: $(a_n)$ ist konvergent.

Beweis: Behauptung: $(a_n)$ ist stetig monoton wachsend.

Beweis der Behauptung: Induktion: $n=1$: $\quad 0 < 1 \Rightarrow 1 < 1+1 \Rightarrow$

$a_1 = 1 = \sqrt[2]{1} < \sqrt[2]{1+\underbrace{1}_{a_1}} = a_2$

Sei $n > 1$: $\quad a_{n-1} < a_n \Rightarrow 1 + a_{n-1} < 1 + a_n \Rightarrow$

$a_n = \sqrt[2]{1+a_{n-1}} < \sqrt[2]{1+a_n} = a_{n+1}$. $\quad\Diamond$

Behauptung: $\quad a_n < 2 \quad \forall n$.

Beweis der Behauptung: Induktion: $n=1 \quad a_1 = 1 < 2$

Sei $n > 1 \quad a_{n-1} < 2 \Rightarrow 1 + a_{n+1} < 3 < 4 \Rightarrow$

$a_n = \sqrt[2]{1+a_{n+1}} < 2 \quad \Diamond$

$(a_n)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow$ $(a_n)$ ist konvergent $\square$

Somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$

Bsp: $a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$

$(a_n)$ ist divergent $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

$$\underset{\downarrow \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \le b_n \le \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}_{\downarrow \frac{1}{2}} \Rightarrow b_n = \frac{1}{2}$$

Def: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ heißt der Cesaro-Limes (Cesaro-Mittel) von $(a_n)$, sofern er existiert.

Prop.: Falls $a_n \to a$, dann $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \to a$.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N_1$ $\forall n \ge N_1$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{N_1} |a_j - a| \to 0 \Rightarrow \exists N \ge N_1$ $\forall n \ge N$: $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{N_1} |a_j - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $n \ge N$: $\left| \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j - \underbrace{a}_{= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a} \right| = \frac{1}{n} \left| \sum\limits_{j=1}^{n} (a_j - a) \right| \le$

$$\le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |a_j - a| = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N_1} |a_j - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{j=N_1+1}^{n} \underbrace{|a_j - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}}_{< (n-N_1)\frac{\varepsilon}{2} \le n \frac{\varepsilon}{2}} <$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} n \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Daher $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \to a$. $\square$

Bsp.: $a_n := \frac{1}{n}\left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

$a_n = \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{2n}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{2}{3n}} + \ldots + \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n+1}} \to 0$. FALSCH!

RICHTIG: $\lim\limits_{j\to\infty} \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{1+\frac{1}{j}}}}{\frac{j}{j+1}} = 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1}}_{a_n} \to 1$

## 5.) Einige spezielle Grenzwerte

Prop: sei $q \in \mathbb{C}$

(1) Falls $|q| < 1$, dann ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

(2) Falls $|q| > 1$, dann $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ $\quad (q \in \mathbb{R},\ q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty)$

Beweis: $|q^n| = |q|^n$

(1) $|q| < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{|q|}$ und $|q|^n < |q|^{n-1}$ $\quad (|q|^n)$ ist monoton fallend

(Falls $q = 0 \Rightarrow q^n = 0 \to 0$)

$|q|^n \geq 0$ monoton fallend und nach unten ~~oben~~ beschränkt.

$\Rightarrow$ konvergente Seke $\quad a := \lim_{n\to\infty} |q|^n = \inf_{n \in \mathbb{N}} |q|^n. \quad a \geq 0$

Ang. $a \neq 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a < \frac{a}{|q|} \Rightarrow \exists n$ mit $|q|^n < \frac{a}{|q|} \Rightarrow$

$|q|^{n+1} < a \leq |q|^{n+1}$ – Widerspruch. Daher $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

(2) Sei $r \in \mathbb{R}$ $\quad$ Falls $r \leq 0 \leq |q|^n$.

Falls $r > 0$ $\quad |q| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{q}\right| < 1 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}_{\frac{1}{|q^n|}} \xrightarrow{(1)} 0 \Rightarrow \exists N\ \forall n \geq N:$

$\frac{1}{|q^n|} < \frac{1}{r}$. Sei $n \geq N$.

Dann ist $r < |q^n|$ $\quad$ Also $q^n \to \infty$. $\quad \square$

### Geometrische Reihe:

Satz: Sei $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ $\quad$ Dann ist

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{1+q+q^2+q^3+\dots} := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^k}_{=1+q+q^2+\dots q^n} = \frac{1}{1-q}$$

Bew: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$ $\quad (q^{n+1} \to 0)$ $\quad \square$

$$\left.\begin{aligned} s &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \\ qs &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots \end{aligned}\right\} : (1-q)s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{1-q}$$

Prop: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$, O.B.d.A. $\varepsilon > 1$

$0 < 1-\varepsilon < 1 < 1+\varepsilon$

$(1-\varepsilon)^n \to 0$, $(1+\varepsilon)^n \to +\infty$

Daher $\exists N\ \forall n \geq N \quad (1-\varepsilon)^n \Rightarrow 1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$

$\Leftrightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ □.

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} \qquad 3^n \leq \underbrace{2^n}_{\leq 3^n} + 3^n < 2 \cdot 3^n$

$\Rightarrow \underset{\downarrow\atop 3}{3} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{1} \cdot \underset{3}{3}}_{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$

Prop: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bew: Setze $a_n = \underbrace{\sqrt[n]{n} - 1}_{\geq 0} \qquad \sqrt[n]{n} = 1 + \overset{\geq 0}{a_n} \Rightarrow n = (1+a_n)^n$

Sei $n \geq 2 \qquad n = (1+a_n)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \geq \binom{n}{2} a_n^2 =$

$\frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow a_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow a_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n-1}}$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $N > \max \{2, 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\}$ (so ein $N$ gibt es wegen dem Archimedischen Axiom)

Sei $n \geq N \quad n \geq 2$ und $\sqrt[2]{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$

$0 \leq a_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, also $a_n$ konvergiert gegen Null und daher $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \underbrace{a_n}_{\to 0}) = 1$ □.

Prop: Sei $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{C}$

(1) Falls $|q| < 1$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$

(2) Falls $|q| > 1$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = \infty$

Bew: (1) Wähle $s$ mit $|q| < s < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^k q^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}{}^k}_{\to 1} |q| = |q| \qquad \exists N \ \forall n \geq N:$

$\sqrt[n]{|n^k q^n|} < s$. Sei $n \geq N \quad \underset{\downarrow\atop 0}{0} \leq |n^k q^n| < \underset{\downarrow\atop 0}{s^n}$. Daher gilt $n^k q^n \to 0$

(2) Sei $r \in \mathbb{R}$: Falls $r \leq 0$, dann ist $r < |n^k q^n|$

Falls $r > 0$: $\left|\frac{1}{q}\right| < 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \underbrace{n^{-k}\left(\frac{1}{q}\right)^n}_{=\frac{1}{n^k q^n}} \to 0$

$\exists N \ \forall n \geq N \ \frac{1}{|n^k q^n|} < \frac{1}{r}$

Sei $n \geq N$, dann ist $r < |n^k q^n|$, also $n^k q^n \to \infty$ □.

Prop: Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Bew: Nach dem archimedischen Axiom (gibt es) $\exists N$ mit $|a| < N$

Sei $n \geq N$: $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{|a|^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \underbrace{\frac{|a|}{N}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{|a|}{N+1}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{|a|}{n-1}}_{<1} \cdot \frac{|a|}{n} \leq$

$\leq \underbrace{\frac{|a|^N}{(N-1)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to 0}$. Somit $\frac{a^n}{n!} \overset{*}{\to} 0$. □

Prop: (1) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Bew: (1) Sei $r \in \mathbb{R}$. Für $r \leq 0$ ist $r < 0 < \sqrt[n]{n!}$

Falls $r > 0$: $\frac{r^n}{n!} \overset{*}{\to} 0 \Rightarrow \exists N \ \forall n \geq N: \frac{r^n}{n!} < 1$

Sei $n \geq N$. Dann ist $\frac{r^n}{n!} < 1 \Rightarrow r < \sqrt[n]{n!}$. Daher $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

(2) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall n \geq N: \sqrt[n]{n!} > \frac{1}{\varepsilon}$. Sei $n \geq N$: $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$ □.

Bsp: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{100}}{1{,}01^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{100}}{\left(1 + \frac{1}{100}\right)^n}$

$a_{100} \approx 3{,}70 \cdot 10^{199}$,

$a_{1.000} \approx 4{,}77 \cdot 10^{295}$,

$a_{10.000} \approx 6{,}11 \cdot 10^{356}$.

$\frac{n^{100}}{1{,}01^n} = n^{100} \underbrace{\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n}_{|\ldots| < 1} \longrightarrow 0$ $n^k q^n \to 0$, falls $|q| < 1$

$a_{200.000} \approx 6{,}73 \cdot 10^{-335}$

($a_{10.050} \approx 6{,}12068 \cdot 10^{356}$, Maximum)

## 6.) Die Zahl e

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

Lemma: Setze $a_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$ $\left(= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \leq 3$.

Beweis: $a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)}}_{>0} > \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = a_n$, also $(a_n)_n$ ist streng monoton wachsend.

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 1}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}}_{\leq\frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}_{\leq\frac{1}{2^3}}$$

$$+ \ldots + \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}}_{\leq \frac{1}{2^{n-1}}} \leq 1 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}_{= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\underbrace{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\leq 1} \leq 2} \leq 3$$

(endliche geometrische Reihe)

Weil $(a_n)$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert $(a_n)$. $\square$

Def.: $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$

Die Zahl e ist (ebenso wie $\pi$) transzendent, d.h. es gibt kein nichttriviales (⊙) Polynom mit rationalen Koeffizienten, sodass e (bzw. $\pi$) Nullstelle dieses Polynoms ist.

$e \approx 2.718281828459045235 36\ldots$

Prop.: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Bew: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j}}_{= \frac{n((n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1))}{j!}} \left(\frac{1}{n}\right)^j \cdot \underbrace{1^{n-j}}_{=1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{(n-j+1)}{n}}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = b_n, \text{ also } a_n \leq b_n \ \forall n.$$

$b_n \to e$. Sei $\varepsilon > 0$ $\exists K \ \forall n \geq K: \ b_n > e - \varepsilon$

Insbesondere ist $b_K > e - \varepsilon$.

(⊙) ein Polynom $\neq 0$

Setze $c_n := \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-j+1}{n}}_{\to 1} \longrightarrow$

$\to \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} = b_k > e - \varepsilon$

Daher $\exists N \geq K : \forall n \geq N: \; c_n > e - \varepsilon$

Sei $n \geq N$: $\quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \geq \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j = c_n > e - \varepsilon$

$e - \varepsilon < a_n \leq b_n < e < e + \varepsilon$, also $|a_n - e| < \varepsilon$. Somit $a_n \to e$ $\square$

Später: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

## 7.) Häufungswerte

<u>Def.</u>: Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Dann heißt $b \in \mathbb{R}^s$ Häufungswert von $(a_n)$, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ gibt mit $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = b$.

<u>Prop</u>: $b$ ist Häufungswert von $(a_n)$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n$ mit $|a_n - b| < \varepsilon$

<u>Bew</u>: $(\Rightarrow)$ Sei $\varepsilon > 0$. $\exists (a_{n_k}),\ a_{n_k} \to b$. $\exists K \ \forall k \geq K: |a_{n_k} - b| < \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ Behauptung: $\exists n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ mit $|a_{n_j} - b| < \frac{1}{j} \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$

Beweis der Behauptung: Induktion (Induktionsanfang ist der allgemeine Induktionsschritt)

$\exists n_1 < \ldots < n_{k-1}$ mit $|a_{n_j} - b| < \frac{1}{j}$ für $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Es gibt unendlich viele $n$ mit $|a_n - b| < \frac{1}{k}$. Daher $\exists n_k > n_{k-1}$ mit $|a_{n_k} - b| < \frac{1}{k}$ (sonst gäbe es ja nur $n_{k-1}$ Indizes mit $|a_{\text{Index}} - b| < \frac{1}{k}$) ↯

Erstelle Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ ist $|a_{n_k} - b| < \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{k}} \Rightarrow a_{n_k} \to b$. $\square$

„Menge der Häufungspunkte ist abgeschlossen."

Prop: Sei $(a_n)$ Folge von $\mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^s$. Falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\tilde{b}$ Häufungswert von $(a_n)$ mit $|\tilde{b} - b| < \varepsilon$, dann ist $b$ Häufungswert von $(a_n)$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. $\exists$ Häufungswert $\tilde{b}$ von $(a_n)$ mit $|\tilde{b} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Daher $\exists$ $(a_{n_k})$ Teilfolge von $(a_n)$ mit $a_{n_k} \to \tilde{b}$. $\exists K$ $\forall k \geq K$: $|a_{n_k} - \tilde{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei $k \geq K$ $\quad |a_{n_k} - b| \leq \underbrace{|a_{n_k} - \tilde{b}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\tilde{b} - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

Somit ist $b$ Häufungswert von $(a_n)$. $\square$

Manchmal lässt man auch $\infty$ als Häufungswert zu, bzw. bei Folgen in $\mathbb{R}$ auch $+\infty$ und $-\infty$.

Prop: Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Weiters seien $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathbb{R}^s$, $(n_k^{(1)}), (n_k^{(2)}), \dots, (n_k^{(r)})$ streng monoton wachsende Folgen in $\mathbb{N}$ mit $a_{n_k^{(j)}} \to b_j$ für $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, und $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \{n_k^{(j)} : k \in \mathbb{N}\}$ sei endlich.

Dann ist $\{b : b \text{ ist Häufungswert von } (a_n)\} = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$.

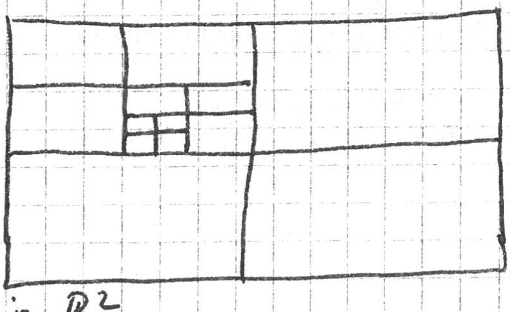
Bew: Weil $a_{n_k^{(j)}} \to b_j$, ist $b_j$ Häufungswert von $(a_n)$. Sei $b$ Häufungswert von $(a_n)$. $\exists$ Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ mit $a_{n_k} \to b$. $\exists j$, sodass unendlich viele der $n_k$ in $\{n_k^{(j)} : k \in \mathbb{N}\}$ liegen. Somit $b = b_j$. $\square$

Satz von Bolzano-Weierstraß

(Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^s$) hat eine $\underbrace{\text{konvergente Teilfolge}}_{\text{Häufungspunkt}}$.)

Satz: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ und eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$

Beweis: Beweisidee: Wie fange ich einen Löwen in der Sahara?



in $\mathbb{R}^2$

in $\mathbb{R}$

05.05.2004

Behauptung: $\forall n \; \exists \; a_1 \leq a \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 = b$

mit $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ und es gibt unendlich viele $k$ mit $x_k \in [a_n, b_n]$.

Bew. der Beh.: Induktion $n = 1$ $\quad a_1 = a$, $b_1 = b$, $b_1 - a_1 = b - a = \frac{b-a}{2^{1-1}}$,

$\forall \; k$ ist $x_k \in [a_1, b_1]$.

Sei $n > 1$. Setze $c := \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

1. Fall: Es gibt unendlich viele $k$ mit $x_k \in [a_{n-1}, c]$.

Definiere $a_n := a_{n-1}$, $b_n := c$ $\quad \underbrace{b_n}_{= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}} - \underbrace{a_n}_{= a_{n-1}} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$

2. Fall: Es gibt nur endlich viele $k$ mit $x_k \in [a_{n-1}, c]$

$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele $k$ mit $x_k \in [c, b_{n-1}]$

Setze $a_n := c$, $b_n := b_{n-1}$

$\underbrace{b_n}_{= b_{n-1}} - \underbrace{a_n}_{= c = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$ $\quad \Diamond$

Wir erhalten $a_1 = a \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 = b$.

Betrachte $A := \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$. $A \neq \emptyset$, weil $a = a_1 \in A$

$b$ ist eine obere Schranke von $A$. Daher gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$x_0 := \sup A$

$a \in A \Rightarrow a \leq x_0$ $\quad$ $b$ obere Schranke von $A \Rightarrow x_0 \leq b$, also

$x_0 \in [a, b]$

Behauptung: Für alle $k \in \mathbb{N}$ $\exists \; n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ mit $|x_{n_j} - x_0| < \frac{1}{j}$

für alle $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Bew. der Beh.: Induktion (Induktionsanfang ist allgemeiner Schritt).

Sei $k \in \mathbb{N}$: $\frac{b-a}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \Rightarrow \exists \; r \in \mathbb{N}: \frac{b-a}{2^{r-1}} < \frac{1}{k}$

Es gibt unendlich viele $n$ mit $x_n \in [a_r, b_r]$. Daher $\exists \; n_k > n_{k-1}$

mit $x_{n_k} \in [a_r, b_r]$

$a_r \leq x_0 \Rightarrow x_{n_k} \leq b_r = \underbrace{(b_r - a_r)}_{= \frac{b-a}{2^{r-1}} < \frac{1}{k}} + \underbrace{a_r}_{\leq x_0} < x_0 + \frac{1}{k}$

ist
es nur
Möglichkeiten
nur
ch viele
$x_n \in [a_r, b_r]$

$b_r$ : obere Schranke von $A \Rightarrow b_r \geq x_0$.

$$x_{n_k} \geq a_r = \underbrace{b_r}_{\geq x_0} - \underbrace{(b_r - a_r)}_{= \frac{b-a}{2^{r-1}} < \frac{1}{k}} > x_0 - \frac{1}{k}, \text{ also}$$

$$x_0 - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x_0 + \frac{1}{k} \Rightarrow |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k}. \quad \diamond$$

$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(x_n)$, $|x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k} \Rightarrow x_{n_k} \to x_0$ $\square$

Def.: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (beschränkt). Dann heißt $\sup\{b : b$ ist Häufungswert von $(a_n)\}$ der Limes superior von $(a_n)$ ($\limsup_{n\to\infty} a_n$) und $\inf\{b : b$ ist Häufungswert von $(a_n)\}$ der Limes inferior von $(a_n)$ ($\liminf_{n\to\infty} a_n$).

Manchmal werden auch $+\infty$ und $-\infty$ für lim sup und lim inf zugelassen (nie aber $\infty$)

Satz: Prop: Sei $(a_n)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

(1) Dann ist $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0$

(i) $\exists N \; \forall n \geq N: \; a_n < b + \varepsilon$,

(ii) es gibt unendlich viele $n$ mit $a_n > b - \varepsilon$.

(2) Dann ist $b = \liminf_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0$

(i) $\exists N \; \forall n \geq N: \; a_n > b - \varepsilon$,

(ii) es gibt unendlich viele $n$ mit $a_n < b + \varepsilon$

Bew: genügt (1) zu zeigen.

($\Rightarrow$) Sei $\varepsilon > 0$: Angenommen $\forall N \; \exists n \geq N$ mit $a_n \geq b + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})$ mit $a_{n_k} \geq b + \varepsilon \; \forall k$

$\exists$ Teilfolge $(a_{n_{k_j}})$ mit $a_{n_{k_j}} \to a \Rightarrow a$ Häufungswert von $(a_n)$ und $a \geq b + \varepsilon > b \geq a$

- Widerspruch, also: $\exists N \; \forall n \geq N : a_n < b + \varepsilon$

$\exists \tilde{b}$ Häufungswert von $(a_n)$ mit $\tilde{b} > b - \varepsilon$. Daher $\exists$ unendlich viele $n$ mit $a_n > b - \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Sei $\varepsilon>0$. $\exists N\ \forall n\geq N: a_n<b+\varepsilon$ $\quad\exists\ \infty$ viele $n$ mit $a_n>b-\varepsilon$. $\Rightarrow$

Daher $\exists$ unendlich viele $n$ mit $|a_n-b|<\varepsilon$. Somit ist $b$ Häufungswert von $(a_n)$.

Angenommen $\exists$ Häufungswert $c$ von $(a_n)$ mit $c>b$. Setze $\varepsilon:=\frac{c-b}{2}$.

$\exists N\ \forall n\geq N: a_n<b+\varepsilon=b+\frac{c-b}{2}=\frac{b+c}{2}$ $\quad\exists\ \infty$ viele $n$ mit

$a_n>c-\varepsilon=\frac{b+c}{2}$. Deswegen $\exists$ $n$ mit $a_n<\frac{b+c}{2}<a_n$ - Widerspruch.

Daher ist $b=\limsup_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Bsp.: $a_n=(-1)^n$ $\quad\{b: b \text{ Häufungswerte von } (a_n)\}=\{-1,1\}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n=1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=-1$.

$\liminf_{n\to\infty} a_n\leq\limsup_{n\to\infty} a_n$

Prop.: Sei $(a_n)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n\leq\liminf_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn $(a_n)$ konvergiert. Weiters gilt in diesem Fall

$\limsup_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_n$.

Bew: ($\Rightarrow$) $a:=\limsup_{n\to\infty} a_n\leq\liminf_{n\to\infty} a_n\leq\limsup_{n\to\infty} a_n=a\Rightarrow\liminf_{n\to\infty} a_n=a$.

Sei $\varepsilon>0$: $\exists N\ \forall n\geq N: a_n<a+\varepsilon$ $\quad(a=\limsup)$

und $a_n>a-\varepsilon$ $\quad(a=\liminf)$. Daher für $n\geq N$ $|a_n-a|<\varepsilon$

Also $a_n\to a$.

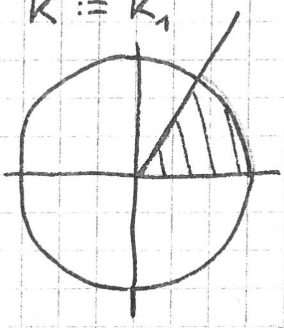
($\Leftarrow$) $a_n\to a\Rightarrow\{b: b \text{ Häufungswerte von } (a_n)\}=\{a\}\Rightarrow$

$\limsup_{n\to\infty} a_n=a\leq a=\liminf_{n\to\infty} a_n$ $\square$

2.) Die Zahl $\pi$

Für $r > 0$: $K_r := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 \right\}$

$K := K_1$



$K_r(x)$, bzw. $K(x)$

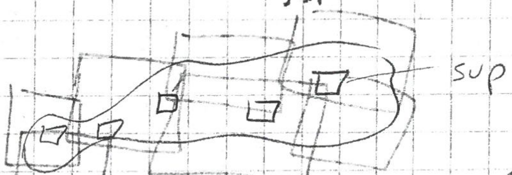
$L(K(x))$ \\\ $A(K(x))$

Was ist Fläche? (Was ist Bogenlänge?)

$A(\ldots)$ Fläche (area)

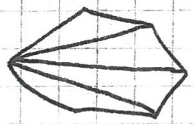
$A(\square\, b) = ab$

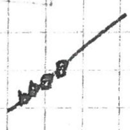
**Def:** $B \subseteq \mathbb{R}^2$ besitzt eine Fläche, falls $\sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} A(P_j) : P_j \text{ achsenparallele Rechtecke, paarweise disjunkt, } \bigcup_{j=1}^{n} P_j \subseteq B \right\} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} A(P_j) : P_j \text{ achsenparallele Rechtecke, } B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} P_j \right\} =: c$




Dann ist $A(B) := c$

$A(\triangle) = \frac{a \cdot b}{2}$

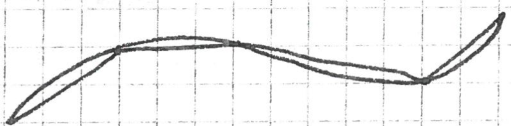
Polygone  haben Fläche

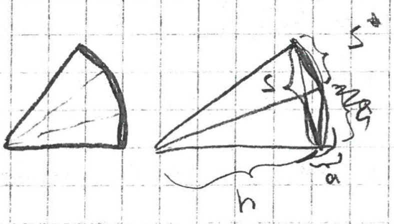


**Prop:** $B$ hat Fläche genau dann, wenn

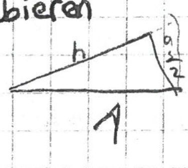
$\sup \{ A(P) : P \text{ Polygon}, P \subseteq B \} = \inf \{ A(P) : P \text{ Polygon}, P \supseteq B \}$

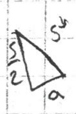
**Def.:** $L(c) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} l_j, \; l_j \text{ Länge des Streckenzuges} \right\}$ ist Bogenlänge der Kurve $c$.






Halbieren




11.05.2009

$h = 1 - a$

$\cancel{1} = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = (1-a)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \cancel{1} - 2a + a^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$

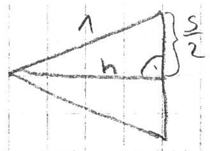
$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2a - a^2$

$= a(\underbrace{2-a}_{\geq a}) \geq a^2$, da $a \leq 1$ ($2a \leq 2$, $a \leq 2-a$)

$s^{*2} = \underbrace{a^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}_{\Rightarrow s^{*2} \leq 2\left(\frac{s}{2}\right)^2} = 2a \leq 2\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{2} \Rightarrow s^* \leq \frac{s}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow s^{*2} \cancel{\geq} a^2$

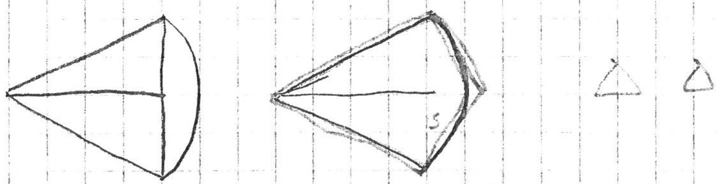
$a \leq \frac{s}{2}$ $\qquad$ a muss kleiner als 1 sein (1 = Radius)



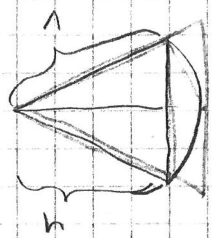

$$A(\triangle) = \frac{sh}{2} = \frac{1}{2}\cdot s \cdot \sqrt{1-\frac{s^2}{4}}$$

$$1 = h^2 + \frac{s^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{1-\frac{s^2}{4}}$$

Lemma: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ s_n > 0\ \ \forall s \in (0, s_n): \sqrt[2]{1-\frac{s^2}{4}} > 1 - \frac{1}{n}$



$$A(\triangle) = \sum \frac{1}{2}\cdot s \underbrace{\sqrt{1-\frac{s^2}{4}}}_{\le 1} \le \frac{1}{2} \underbrace{\sum s}_{C(\triangle)}$$




$$A(\circ) = \sum \frac{1}{2}\cdot s \cdot h \quad \sqrt[2]{1-\frac{s^2}{4}}\cdot \underbrace{h}_{= \frac{1}{\sqrt[2]{1-\frac{s^2}{4}}}} = \frac{1}{2}\sum s \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2]{1-\frac{s^2}{4}}}}_{\le \frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \le$$

$$\le \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum s}_{= C(\triangle)} \text{ (17)} \Rightarrow C(\circ) \ge 2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) A(\circ)$$

$$A(\triangle) = \frac{1}{2}\sum s \cdot \underbrace{\sqrt{1-\frac{s^2}{4}}}_{> 1-\frac{1}{n}} \ge \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \underbrace{\sum s}_{= C(\triangle)}$$

$$A(\circ) \ge \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot \underbrace{C(\circ)}_{\ge \left(1-\frac{1}{n}\right) A(\triangle)\cdot 2 \text{ (17)}} \ge \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 A(\triangle)$$

Also $K(x)$ hat eine Fläche:

$$C(\triangle) \le \frac{2}{1-\frac{1}{n}} A(\triangle)$$

Daher hat $K(x)$ eine Länge und und $C(K(x)) \le 2A(K(x))$

$$C(\triangle) \ge 2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) A(\triangle) \text{ (11)} \Rightarrow C(K(x)) \ge 2A(K(x))$$

Proposition: $K(x)$ besitzt eine Fläche und eine Bogenlänge, und es gilt

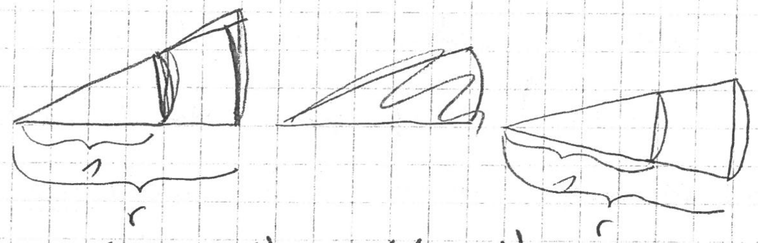
$$C(K(x)) = 2A(K(x))$$

Definition: $\pi := A(K)$

$\pi \approx 3.14159265358979323846$

Korollar: (Ein Satz der unmittelbar aus einem anderen folgt.)

$C(K) = 2\pi$



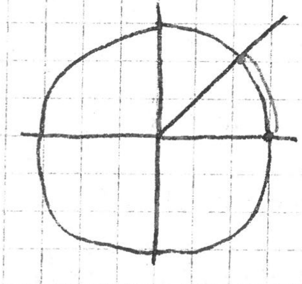

(Strahlensatz)

Kor: $C(K_r(x)) = r\, C(K(x))$

$A(K_r(x)) = r^2 A(K(x))$

Kor: $A(K_r) = r^2\pi$, $C(K_r) = 2\pi r$.

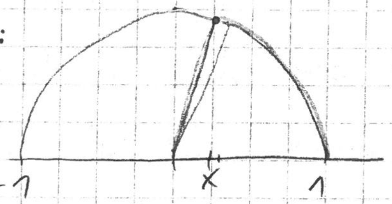
Für $x \in \mathbb{R}$ sei $c(x) = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ so, dass die Bogenlänge von $\binom{1}{0}$ zu $c(x)$ zum Einheitskreis gleich $x$ ist.



$\cdot\ c(x)$

$x$ ist der Winkel zu den Geraden $\overline{\binom{0}{0},\binom{1}{0}}$, $\overline{\binom{0}{0}, c(x)}$

Für $x \in [-1,1]$ definiere $\tau(x)$ als Bogenlänge von $\binom{1}{0}$ zu $\binom{x}{\sqrt{1-x^2}}$ am Einheitskreis:




$\tau$ ist streng monoton fallend, $\tau(1) = 0$, $\tau(-1) = \pi$.

$x \in [-1,1]: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass: $\forall y$ mit $|y-x| < \delta : |\tau(y) - \tau(x)| < \varepsilon$

# III. Stetige Funktionen

## 1.) Stetigkeit

**Def:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^s$, $f: M \to \mathbb{R}^s$, $x_0 \in M$

(1) $f$ heißt stetig in $x_0$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ sodass } \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(2) $f$ heißt stetig falls $f$ stetig in $x$ für alle $x \in M$ ist.

**Bemerkung:** $\delta$ hängt von $\varepsilon$ und $x_0$ (und $f$) ab.

**Prop:** $f(x) = c$ und $f(x) = x$ sind stetig

**Bew:** Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$. Sei $y$ so, dass $|y - x| < \delta$

1. Fall ($f(x) = c$): $|\underbrace{f(y)}_{=c} - \underbrace{f(x)}_{=c}| = 0 < \varepsilon$

2. Fall ($f(x) = x$): $|\underbrace{f(y)}_{=y} - \underbrace{f(x)}_{=x}| < \delta = \varepsilon$. $\square$

(In diesen Fällen hängt $\delta$ nicht von $x_0$ ab $\to$ gleichmäßige Stetigkeit)

**Bsp:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ in Punkt 5 stetig

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $x$ so, dass $|x - 5| < \delta$

$$|\underbrace{f(x)}_{=2x+1} - \underbrace{f(5)}_{=11}| = |2x - 10| = 2\underbrace{|x-5|}_{<\delta = \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

zum Berechnen von $\delta$: $2|x-5| < 2\delta$ Sei $2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

**Bsp:** $f(x) = x^2$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x|+1}\}$.

Sei $y$ so, dass $|y - x| < \delta$

$$|\underbrace{f(y)}_{=y^2} - \underbrace{f(x)}_{=x^2}| = |(y-x)\cdot(y+x)| = |y-x| \cdot \underbrace{|y+x|}_{\le |y|+|x|} \le |y-x|\,(\underbrace{|y|}_{\le \underbrace{|y-x|}_{<\delta \le 1} + |x|} + |x|) \le$$

$$\le \underbrace{|y-x|}_{<\delta \le \frac{\varepsilon}{2|x|+1}} (2|x| + 1)^{(1)} < \varepsilon$$

(1) bis hierhin rechnen, dann $\varepsilon$ wählen.

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1, \text{ falls } x = 0, \\ 0, \text{ falls } x \neq 0; \end{cases}$ ist unstetig in $0$.

zz. $\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x$ mit $|x - 0| < \delta : |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon_0$.

Wähle $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}$. Sei $\delta > 0$. Wähle $x := \frac{\delta}{2}$. $|x - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$|\underbrace{f(x)}_{=0} - \underbrace{f(0)}_{=1}| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$

Prop: Sei $f: M \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in M$.

(1) Falls $s > f(x_0)$, dann $\exists \delta > 0 \; \forall x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta : f(x) < s$

(2) Falls $s < f(x_0)$, dann $\exists \delta > 0$ sodass $\forall x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta : f(x) > s$

Beweis: Es genügt (1) zu zeigen.

Setze $\varepsilon := s - f(x_0) > 0$ $f$ stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in M$ mit ~~$|x - x_0|$~~ $|x - x_0| < \delta$.

$f(x) - f(x_0) \leq |f(x) - f(x_0)| < s - f(x_0)$

Falls $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$, dann $f(x) < s$. $\square$

Prop: $f: M \to \mathbb{R}$, $x_0 \in M$. Dann ist $f$ in $x_0$ stetig genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ die Eigenschaft $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Bew: $(\Rightarrow)$ $x_n \to x_0$. Sei $\varepsilon > 0$ $f$ stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$x_n \to x_0 \Rightarrow \exists N \; \forall n \geq N : |x_n - x_0| < \delta$. Sei $n \geq N$

$|x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

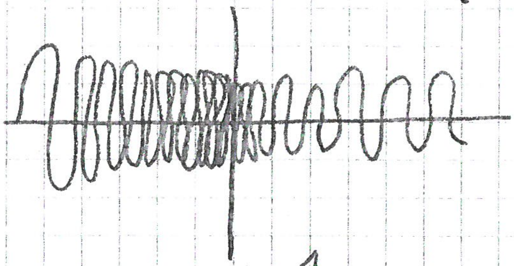
$(\Leftarrow)$ Ang. $f$ wäre nicht stetig in $x_0$. $\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x$ mit $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ $(\frac{1}{n} > 0)$ $\exists x_n$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Erhalten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$.

Daher $f(x_n) \to f(x_0)$ $\exists N \; \forall n \geq N : |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0$

Sei $n \geq N$. $\varepsilon_0 \leq |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ - Widerspruch

Somit ist $f$ stetig in $x_0$. $\square$

__Bsp:__ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ ist unstetig in 0.



Wähle $x_n := \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$, $f(x_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$,

also $f$ ist nicht stetig in 0.

__Prop:__ Seien $f, g : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap\!\shortparallel}{M}} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in M$, $f, g$ stetig in $x_0$

(1) Dann sind $f+g$ und $f-g$ stetig in $x_0$.

(2) Dann ist $f \cdot g$ stetig in $x_0$.

(3) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in $x_0$.

__Bemerkung:__ (1) gilt auch $\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$, (2) auch wenn $f: \underset{(\mathbb{C}^s) \to (\mathbb{C}^r)}{\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r}$, $g: \underset{(\mathbb{C}^s) \to (\mathbb{C})}{\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r}$, (3) auch $\mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$.

__Bew:__ Sei $x_n$ so, dass $x_n \to x_0$. (Beweis mittels Grenzwertsätze!)

(1) $(f \pm g)(x_n) = \underset{\downarrow ⓘ \; f(x_0)}{f(x_n)} \pm \underset{\downarrow ⓘ \; g(x_0)}{g(x_n)} \to f(x_0) \pm g(x_0)$

(2) $(fg)(x_n) = \underset{\downarrow \; f(x_0)}{f(x_n)} \cdot \underset{\downarrow \; g(x_0)}{g(x_n)} \to f(x_0) \cdot g(x_0)$

(3) O.B.d.A.: $g(x_0) > 0$. $\exists\, \delta_0 > 0 \; \forall x$ mit $|x_n - x_0| < \delta_0$: $g(x) > 0$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \dfrac{f(x_n) \to f(x_0)}{g(x_n) \to g(x_0)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0)$ $\square$

__Korollar:__ (1) Jedes Polynom $(p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$ ist stetig

(2) Jede rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p, q$ Polynome ist stetig für alle $x$ mit $q(x) \neq 0$.

ⓘ da $f$ und $g$ stetig und $x_n \to x_0$

mittels Induktion

Bew: (1) $x \longmapsto x^0 = 1$ stetig. Sei $n > 0$. $x^n = \underbrace{x^{n-1}}_{\text{stetig}} \cdot \underbrace{x}_{\text{stetig}}$ stetig.

$p$ ist Summe und Produkt stetiger Funktionen $\Rightarrow$ stetig.

(2) $p, q$ stetig $\Rightarrow f = \frac{p}{q}$ stetig. (wegen Pkt. 3. vorher) $\square$

Prop: $f: M_1 \to M_2$, $g: M_2 \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in M_1$, $f$ stetig in $x_0$, $g$ stetig in $f(x_0)$

Dann ist $g \circ f$ stetig in $x_0$.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. $g$ stetig $\Rightarrow \exists \eta$ (Eta) $> 0$ $\forall y$ mit $|y - f(x_0)| < \eta : |g(y) - \underbrace{g(f(x_0))}_{(g \circ f)(x_0)}| < \varepsilon$

$f$ stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0$ $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \eta$.

Sei $x$ so, dass $|x - x_0| < \delta$. $|f(x) - f(x_0)| < \eta \Rightarrow |\underbrace{g(f(x))}_{(g \circ f)(x)} - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$

$|\underbrace{g(f(x))}_{(g \circ f)(x)} - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

Bsp.: $x \longmapsto e^{x^2}$ $f(x) = e^x$ ist stetig, $g(x) = x^2$ stetig

$\Rightarrow \underbrace{(f \circ g)(x)}_{= e^{x^2}}$ stetig

$x \longmapsto \cancel{\ } x \sin \frac{1}{x}$ $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = 1$ stetig

$x \neq 0$

$f(x) = x \sin \frac{1}{x} = f_1 \cdot (f_2 \circ \frac{f_3}{f_1})$ ist stetig. (da alle $f_{1,2,3}$ stetig sind)

Im Allgemeinen sind Umkehrfunktionen stetiger bijektiver Funktionen nicht stetig

Bsp.: $f: [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$,

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 1, \\ x-1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

$$f^{-1}: [0,2] \to [0,1] \cup (2,3], \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 1, \\ x+1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{n} \to 1, \quad f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n} \to 2 \neq 1 = f^{-1}(1)$$

somit ist $f^{-1}$ nicht stetig in 1.

Def.: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$.

(1) $f$ heißt streng monoton wachsend (steigend), falls
$x, y \in M,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(2) $f$ heißt monoton steigend, falls
$x, y \in M,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

(3) $f$ heißt streng monoton fallend, falls
$x, y \in M,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

(4) $f$ heißt monoton fallend, falls
$x, y \in M,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

## 2.) Grenzwerte

Def.: Sei $x_0 \in (a,b)$, $f: (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sagen wir für $\alpha \in \mathbb{R}$, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, falls

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a,b)$ mit $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta$: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Bemerkungen: •) $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta \iff 0 < |x - x_0| < \delta$

•) $f$ muss an $x_0$ nicht definiert sein.

•) Wenn $f$ an der Stelle $x_0$ definiert ist, muss nicht $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ gelten

Bsp.: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

Für $x \neq 5$ gilt: $\frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = x+5 \xrightarrow{x \to 5} 10.$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$. Sei $x$ so, dass $0 < |x-5| < \delta$

$\Big|\underbrace{\frac{x^2-25}{x-5}}_{=x+5} - 10\Big| = |x-5| < \delta = \varepsilon$. Daher $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = 10$.

Prop.: $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \iff$ Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x_0$ $\forall n$ und $x_n \to x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. Beweis bei Folgen & oder Stetigkeit

Prop.: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$.

Bew: $\alpha := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x$ mit $x < |x - x_0| < \delta$: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Sei $h$ so, dass $0 < |h| < \delta$. $|(x_0+h) - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|f(x_0+h) - \alpha| < \varepsilon$. Also $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = \alpha$.

$\alpha := \lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h)$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ $\forall h$ mit $0 < |h| < \delta : |f(x_0+h) - \alpha| < \varepsilon$.

Sei $x$ so, dass $0 < |x - x_0| < \delta$. Setze $h := x - x_0$

$\varepsilon > |f(\underbrace{x_0+h}_{=x}) - \alpha| = |f(x) - \alpha|$. Deshalb $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$. $\square$

Prop.: (1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Bew $\to$ Stetigkeit

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right]$.

(3) Falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, dann $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

Prop.: Falls $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \neq x_0$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Prop.: Falls $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \neq x_0$,

$\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \alpha$. (Sandwich-Satz)

Wie zeigt man, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert?

Man gibt Folgen $(a_n), (b_n)$ an mit $a_n \neq x_0$, $b_n \neq x_0$ $\forall n$, $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$

und $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$

**Prop:** $f$ ist stetig in $x_0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

**Bew:** ($\Rightarrow$) Sei $\varepsilon > 0$. $f$ stetig in $x_0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sei $x$ so, dass $0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

($\Leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$. $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0) \to \exists\, \delta > 0\ \forall x$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sei $x$ so, dass $|x - x_0| < \delta$

1. Fall: $x \neq x_0$ : $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Fall: $x = x_0$ : $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Somit ist $f$ stetig in $x_0$. $\square$

**Def:** (1) $f : (x_0, b) \to \mathbb{R}$, dann heißt $\alpha := \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $\forall x$ mit $x_0 < x < x_0 + \delta : |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

(2) $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$, dann heißt $\alpha := \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $\forall x$ mit $x_0 - \delta < x < x_0 : |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann heißt $\alpha := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, r\ \forall x$ mit $|x| \geq r : |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

(4) $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, r\ \forall x$ mit $x \geq r : |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

(5) $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, r\ \forall x$ mit $x \leq r : |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Es gelten analoge Sätze wie zuvor.

**Prop.:** Es gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Weiters gilt dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

**Bew:** ($\Rightarrow$) $\alpha := \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists\, \delta > 0\ \forall x$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$:

$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Sei $x$ so, dass $x_0 < x < x_0 + \delta$:

$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, also $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \alpha$.

Sei $x$ so, dass $x_0 - \delta < x < x_0 : |f(x) - \alpha| < \varepsilon$, somit $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha$.

$(\Leftarrow)$ $\alpha := \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists\, \delta_1 > 0$:

$\forall x$ mit $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ : $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. $\exists\, \delta_2 > 0$: $\forall x$ mit $x_0 - \delta_2 < x < x_0$

$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Sei $x$ so, dass $0 < |x - x_0| < \delta$.

1. Fall: $x > x_0$: $x_0 < x < x_0 + \delta \leq x_0 + \delta_1$ : $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

2. Fall: $x < x_0$: $x_0 - \delta_2 \leq x_0 - \delta < x < x_0$ : $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

Daher $\alpha = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. $\square$

Prop: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Dann ist $f$ stetig in $x_0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $:\Leftrightarrow$ $\forall r\ \exists\, \delta > 0$ : $\forall x$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ : $|f(x)| \geq r$.
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ $:\Leftrightarrow$ $\forall r\ \exists\, \delta > 0$ : $\forall x$ mit $x_0 < x < x_0 + \delta$ : $f(x) \geq r$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $:\Leftrightarrow$ $\forall r\ \exists s$ : $\forall x$ mit $x \leq s$ : $f(x) \leq r$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$ $:\Leftrightarrow$ $\forall r\ \exists s$ : $\forall x$ mit $|x| \geq s$ : $f(x) \geq r$

## 3.) Der Zwischenwertsatz von Bolzano

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gelte $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$, bzw. $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.

Bew: O.B.d.A.: $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$.

$A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$ $A \neq \emptyset$, weil $a \in A$.

$A$ ist nach oben beschränkt, weil $b$ obere Schranke ist.

Daher $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 = \sup A$

$a \leq x_0 \leq b$, also $x_0 \in [a,b]$

Falls $x_0 = b$, dann ist $f(x_0) \geq 0$.

Wenn $x_0 \neq b \Rightarrow x_0 < b$ $x_0 + \frac{1}{n} \to x_0$. $\exists N \forall n \geq N$ : $x_0 + \frac{1}{n} < b$ $(\Rightarrow$ $x_0 + \frac{1}{n} \in [a,b])$

$f$ stetig $\Rightarrow$ $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(\underbrace{x_0 + \tfrac{1}{n}}_{\notin A})}_{> 0} \geq 0$

Es ist also stets $f(x_0) \geq 0$.

Ang. $f(x_0) \neq 0$. Dann wäre $f(x_0) > 0$.

$f$ ist stetig in $x_0$. $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$f(x_0) - f(x) \leq \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{= |f(x_0) - f(x)|} < f(x_0) \qquad (\Rightarrow f(x) > 0)$$

$x_0 - \delta < x_0 = \sup A \Rightarrow \exists\, x \in A$ mit $x_0 - \delta < x \leq x_0 < x_0 + \delta$,

also $|x - x_0| < \delta$. Somit ist $f(x) > 0$. $\quad 0 < f(x) \leq 0$ (aus Mengendefinition) – Widerspruch

Daher ist $f(x_0) = 0$. $\square$

18.05.2009

Bsp.: Zeige $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Setze $f(x) := x^2 - 2$ ist stetig, $f(0) = -2 < 0$, $f(2) > 0$

Nach dem Zwischenwertsatz (ZWS) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$

Zwischenwertsatz gilt nicht in $\mathbb{Q}$: $f(x) = x^2 - 2$ ist stetig auf $\mathbb{Q}$,

$f(0) < 0$, $f(2) > 0$, aber $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$

<u>Korollar:</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es gäbe $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) \leq \alpha$ und $f(x_2) \geq \alpha$, dann gibt es ein $x \in I$ mit $f(x) = \alpha$

<u>Bew.:</u> Setze $g(x) := f(x) - \alpha$ $\quad g$ ist stetig

1\. Fall: $x_1 = x_2$: Setze $x := x_1 = x_2$ $\quad \alpha \leq f(x) \leq \alpha \Rightarrow f(x) = \alpha$.

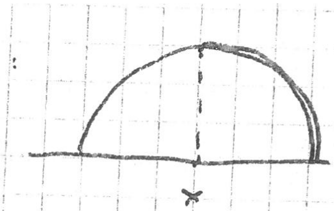
2\. Fall: $x_1 < x_2$: $g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x_1) = f(x_1) - \alpha \leq 0$,

$g(x_2) = f(x_2) - \alpha \geq 0 \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists\, x \in [x_1, x_2]$ mit $\underbrace{g(x)}_{= f(x) - \alpha} = 0$, also $x \in I$

und $f(x) = \alpha$

3\. Fall: $x_2 < x_1$: $g: [x_2, x_1] \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x_2) = f(x_2) - \alpha \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} 0$,

$g(x_1) \overset{\geq}{\leq} 0 \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists\, \underbrace{x \in [x_2, x_1]}_{\Rightarrow x \in I}$ mit $\underbrace{g(x)}_{= f(x) - \alpha} = 0 \Rightarrow f(x) = \alpha$. $\square$

$\tau(x)$:  $\tau$ ist stetig, $\tau(-1)=\pi$, $\tau(1)=0$
$\Rightarrow \forall y \in [0,\pi]\ \exists x \in [-1,1]$ mit $\tau(x)=y$.

Für $x \in [0,\pi]$ definiere $c(x) := \begin{pmatrix} y \\ \sqrt[2]{1-y^2} \end{pmatrix}$, wobei $y \in [-1,1]$ so ist, dass $\tau(y)=x$

Für $x \in [-\pi, 0]$ definiere $c(x) := \begin{pmatrix} y \\ -\sqrt[2]{1-y^2} \end{pmatrix}$, wobei $y \in [-1,1]$ so ist, dass $\tau(y)=x$

Für $x \in \mathbb{R}$: $\exists n \in \mathbb{Z}$ mit $x + 2n\pi \in (-\pi,\pi]$. Definiere $c(x) := c(x+2n\pi)$

<u>Satz:</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist $f$ streng monoton (wachsend oder fallend)

<u>Bew.:</u> Indirekt, ang. $f$ ist nicht streng monoton $\Rightarrow \exists x_1 < x_2 < x_3 \in I$ mit $f(x_1) \geq f(x_2)$ und $f(x_3) \geq f(x_2)$, bzw. $f(x_1) \leq f(x_2)$ und $f(x_3) \leq f(x_2)$.
O.B.d.A. $f(x_1) \geq f(x_2)$ und $f(x_3) \geq f(x_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$ und $f(x_3) > f(x_2)$. Wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(x_2) < \alpha < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$
auf $[x_1, x_2]$ ist $f(x_2) < \alpha < f(x_1) \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists y_1 \in [x_1, x_2]$ mit $f(y_1) = \alpha$
$\Rightarrow y_1 < x_2$. Auf $[x_2, x_3]$ ist $f(x_2) < \alpha < f(x_3) \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists y_2 \in [x_2, x_3]$ mit $f(y_2) = \alpha \Rightarrow x_2 < y_2$ Insbesondere ist $y_1 \neq y_2$. Aber $f(y_1) = \alpha = f(y_2)$ – Widerspruch zu $f$ injektiv. Daher ist $f$ streng monoton.

$\square$

<u>Prop.:</u> Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to B$ bijektiv.
(1) Falls $f$ streng monoton wachsend, dann ist $f^{-1}$ streng monoton steigend
(2) Falls $f$ streng monoton fallend, dann ist $f^{-1}$ streng monoton fallend.

<u>Bew.:</u> Es genügt (1) zu zeigen.
Indirekt, ang. $f^{-1}$ ist nicht steigend. $\Rightarrow \exists x < y$ mit $f^{-1}(x) \not< f^{-1}(y)$.
Also $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y) \overset{f \text{ streng monoton steigend}}{\Longrightarrow}$
$x = f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) = y$ – Widerspruch zu $x < y$. Somit ist $f^{-1}$ streng monoton steigend. $\square$

**Satz:** Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f: I \to J$ eine bijektive stetige Funktion. Dann ist $f^{-1}$ stetig.

2. Fall wäre s.m. fa

**Bew:** $f$ stetig und injektiv $\Rightarrow$ $f$ ist streng monoton. O.B.d.A. $f$ ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $f^{-1}$ ist streng monoton wachsend.

$f^{-1}: J \to I$

Sei $x \in J$. Sei $\varepsilon > 0$.

1. Fall: $x = \inf J \Rightarrow f^{-1}(x) = \inf I$. $\exists x_\varepsilon \in I$ mit $f^{-1}(x) \leq x_\varepsilon < f^{-1}(x) + \varepsilon$. $\Rightarrow$ $\underset{f(f^{-1}(x)) < f(x_\varepsilon)}{x < f(x_\varepsilon)}$. Setze $\delta := f(x_\varepsilon) - x > 0$

Sei $y \in J$ mit $|y - x| < \delta$. Dann $x \leq y < x + \delta = f(x_\varepsilon)$

$f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y) < x_\varepsilon < f^{-1}(x) + \varepsilon \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(x)| < \varepsilon$

2. Fall: $x = \sup J$: Analog

3. Fall: $\inf J < x < \sup J$: $\exists y_\varepsilon, x_\varepsilon \in I$ mit

$f^{-1}(x) - \varepsilon < y_\varepsilon < f^{-1}(x) < x_\varepsilon < f^{-1}(x) + \varepsilon$

$\Rightarrow f(y_\varepsilon) < x < f(x_\varepsilon)$ Setze $\delta := \min\{x - f(y_\varepsilon), f(x_\varepsilon) - x\} > 0$

Sei $y \in J$ so, dass $|y - x| < \delta$. Dann ist

$f(y_\varepsilon) \leq x - \delta < y < x + \delta \leq f(x_\varepsilon) \Rightarrow$

$f^{-1}(x) - \varepsilon < y_\varepsilon < f^{-1}(y) < x_\varepsilon < f^{-1}(x) + \varepsilon$. Somit $|f^{-1}(y) - f^{-1}(x)| < \varepsilon$

Daher ist $f^{-1}$ stetig. $\square$

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}.$$

**Def.:** Sei $M$ eine Menge, $f: M \to M$ eine Funktion. $x \in M$ heißt Fixpunkt von $f$, wenn $f(x) = x$.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $x$ ein Punkt der Periode $n$, falls $f^n(x) = x$ und $f^k(x) \neq x$ für $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Ein Fixpunkt ist ein Punkt der Periode 1.

## Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

**Proposition 1.** *Für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist $1^q = 1$.*

*Beweis.* Sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten dann, dass $1^q = \sqrt[n]{\underbrace{1^m}_{=1}} = \sqrt[n]{1} = 1$. □

**Proposition 2.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und seien $q, r \in \mathbb{Q}$. Dann gelten:*

(1) $a^{q+r} = a^q a^r$.

(2) $a^{q-r} = \dfrac{a^q}{a^r}$.

(3) $(a^q)^r = a^{qr}$.

(4) $(ab)^q = a^q b^q$.

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^q = \dfrac{a^q}{b^q}$.

*Beweis.* Es seien $q = \frac{m_1}{n_1}$ und $r = \frac{m_2}{n_2}$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Die Funktionen $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ und $x \mapsto x^{n_1}$ sind bijektive Funktionen $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$.

(1) Hier ist $q + r = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$. Wir erhalten

$$(\underbrace{a^{q+r}}_{=\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}}})^{n_1 n_2} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = a^{m_1 n_2} a^{m_1 n_2} =$$

$$= (\underbrace{a^{m_1}}_{=(\sqrt[n_1]{a^{m_1}})^{n_1}})^{n_2} (\underbrace{a^{m_2}}_{=(\sqrt[n_2]{a^{m_2}})^{n_2}})^{n_1} = (\underbrace{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}}_{=a^q})^{n_1 n_2} (\underbrace{\sqrt[n_2]{a^{m_2}}}_{=a^r})^{n_1 n_2} = (a^q a^r)^{n_1 n_2}.$$

Nachdem $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ bijektiv ist, ergibt sich daraus, dass $a^{q+r} = a^q a^r$ gilt.

(2) Da $a^{q-r} a^r \underset{\text{wegen (1)}}{=} a^{q-r+r} = a^q$, ergibt sich, dass $a^{q-r} = \frac{a^q}{a^r}$ gilt.

(3) Es ist $qr = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$ und deshalb

$$((a^q)^r)^{n_1 n_2} = ((\underbrace{(a^q)^r}_{=\sqrt[n_2]{(a^q)^{m_2}}})^{n_2})^{n_1} = \Bigg(\underbrace{\left(\sqrt[n_2]{(a^q)^{m_2}}\right)^{n_2}}_{=(a^q)^{m_2}}\Bigg)^{n_1} = ((a^q)^{m_2})^{n_1} =$$

$$= (a^q)^{m_2 n_1} = ((\underbrace{a^q}_{=\sqrt[n_1]{a^{m_1}}})^{n_1})^{m_2} = \Bigg(\underbrace{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1}}_{=a^{m_1}}\Bigg)^{m_2} = (a^{m_1})^{m_2} =$$

$$= \underbrace{a^{m_1 m_2}}_{(\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}})^{n_1 n_2}} = \Big(\underbrace{\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}}}_{=a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = a^{qr}}\Big)^{n_1 n_2} = (a^{qr})^{n_1 n_2}.$$

Weil $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ bijektiv ist, folgt daraus, dass $(a^q)^r = a^{qr}$ gilt.

(4) Wir erhalten

$$\Big(\underbrace{(ab)^q}_{=\sqrt[n_1]{(ab)^{m_1}}}\Big)^{n_1} = \left(\sqrt[n_1]{(ab)^{m_1}}\right)^{n_1} = (ab)^{m_1} = \underbrace{a^{m_1}}_{=\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1}} \underbrace{b^{m_1}}_{=\left(\sqrt[n_1]{b^{m_1}}\right)^{n_1}} =$$

$$= \Big(\underbrace{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}}_{=a^q}\Big)^{n_1} \Big(\underbrace{\sqrt[n_1]{b^{m_1}}}_{=b^q}\Big)^{n_1} = (a^q)^{n_1}(b^q)^{n_1} = (a^q b^q)^{n_1} .$$

Da $x \mapsto x^{n_1}$ bijektiv ist, ergibt sich, dass $(ab)^q = a^q b^q$ gilt.
(5) Wegen $\left(\frac{a}{b}\right)^q b^q \underset{\text{wegen (4)}}{=} \left(\frac{a}{b}b\right)^q = a^q$ erhalten wir $\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}$. □

**Proposition 3.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und sei $q \in \mathbb{Q}$.*

(1) *Falls $q > 0$ ist, dann gilt $0 < a^q < b^q$.*

(2) *Falls $q < 0$ ist, dann gilt $a^q > b^q > 0$.*

*Beweis.* (1) Es sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen $q > 0$ ist $m > 0$. Daher ist $0 < a^m < b^m$, und deshalb $0 < \underbrace{\sqrt[n]{a^m}}_{=a^q} < \underbrace{\sqrt[n]{b^m}}_{=b^q}$. Somit ist $0 < a^q < b^q$.
(2) Da $q < 0$ ist, gilt $-q > 0$. Wegen (1) gilt daher $0 < a^{-q} < b^{-q}$. Es ist $a^{-q} = a^{0-q} \underset{\text{wegen (2) aus Proposition 2}}{=} \frac{a^0}{a^q} = \frac{1}{a^q}$, und deshalb auch $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$. Also ist $0 < \frac{1}{a^q} < \frac{1}{b^q}$, woraus sich $a^q > 0$, $b^q > 0$ und $b^q < a^q$ ergeben. □

**Proposition 4.** *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und seien $q, r \in \mathbb{Q}$ mit $q < r$.*

(1) *Falls $a > 1$ ist, dann gilt $a^q < a^r$.*

(2) *Falls $a < 1$ ist, dann gilt $a^q > a^r$.*

*Beweis.* (1) Da $q < r$ gilt, ist $r - q > 0$. Aus $a > 1$ folgt wegen (1) von Proposition 3, dass $1^{r-q} < a^{r-q}$. Nach Proposition 1 ist $1^{r-q} = 1$, und aus (2) von Proposition 2 folgt, dass $a^{r-q} = \frac{a^r}{a^q}$ gilt. Somit erhalten wir $1 = 1^{r-q} < a^{r-q} = \frac{a^r}{a^q}$, woraus sich $a^q < a^r$ ergibt.
(2) Aus $0 < a < 1$ folgt, dass $\frac{1}{a} > 1$ gilt. Wegen (1) erhält man $\left(\frac{1}{a}\right)^q < \left(\frac{1}{a}\right)^r$. Es ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^q \underset{\text{nach (5) von Proposition 2}}{=} \frac{1^q}{a^q} \underset{\text{wegen Proposition 1}}{=} \frac{1}{a^q},$$

und daher auch $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$. Das ergibt $\frac{1}{a^q} < \frac{1}{a^r}$, und da $a^q > 0$ und $a^r > 0$ gelten, erhalten wir daraus $a^r < a^q$. □

## Potenzfunktionen mit reellen Exponenten

**Proposition 5.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:*

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(2) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

(3) $(ab)^x = a^x b^x$.

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

*Beweis.* Es seien $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = y$. Dann ist auch $(q_n + r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty}(q_n + r_n) = x + y$.

(1) Weil $(q_n + r_n) \to x + y$ erhalten wir

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{a^{q_n+r_n}}_{=a^{q_n}a^{r_n} \text{ (wegen (1) von Proposition 2)}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{a^{q_n}}_{\to a^x} \underbrace{a^{r_n}}_{\to a^y} = a^x a^y .$$

(2) Aus $a^{x-y}a^y \underset{\text{wegen (1)}}{=} a^{x-y+y} = a^x$, erhalten wir $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

(3) Es ist

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(ab)^{q_n}}_{=a^{q_n}b^{q_n} \text{ (wegen (4) von Proposition 2)}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{a^{q_n}}_{\to a^x} \underbrace{b^{q_n}}_{\to b^x} = a^x b^x .$$

(4) Weil $\left(\frac{a}{b}\right)^x b^x \underset{\text{wegen (3)}}{=} \left(\frac{a}{b}b\right)^x = a^x$ ergibt sich $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$. □

**Lemma 1.** *Seien $a, x \in \mathbb{R}$. Wenn $a > 1$ und $x > 0$ gelten, dann ist $a^x > 1$.*

*Beweis.* Nachdem $x > 0$ und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q < x$. Wegen (1) von Proposition 3 ist $a^q > 1^q \underset{\text{nach Proposition 1}}{=} 1$. Da $a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, q \le x\}$ ist $a^x \ge a^q > 1$. □

**Proposition 6.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und sei $x \in \mathbb{R}$.*

(1) *Falls $x > 0$ ist, dann gilt $0 < a^x < b^x$.*

(2) *Falls $x < 0$ ist, dann gilt $a^x > b^x > 0$.*

*Beweis.* (1) Wegen $0 < a < b$ ist $\frac{b}{a} > 1$. Nach Lemma 1 ist

$$1 < \left(\frac{b}{a}\right)^x \underset{\text{nach (4) von Proposition 5}}{=} \frac{b^x}{a^x} .$$

Weil $a^x > 0$ ist, erhält man daraus, dass $a^x < b^x$ gilt.
(2) Da $x < 0$ ist, erhalten wir $-x > 0$. Nach (1) gilt $0 < a^{-x} < b^{-x}$. Es ist $a^{-x} = a^{0-x} \underset{\text{wegen (2) aus Proposition 5}}{=} \frac{a^0}{a^x} = \frac{1}{a^x}$, und somit auch $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$. Daher ist $0 < \frac{1}{a^x} < \frac{1}{b^x}$. Wegen $a^x > 0$, $b^x > 0$ erhalten wir daraus $b^x < a^x$. □

**Proposition 7.** *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.*

(1) *Falls $a > 1$ ist, dann gilt $a^x < a^y$.*

(2) *Falls $a < 1$ ist, dann gilt $a^x > a^y$.*

*Beweis.* (1) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Weil $a > 1$ ist, gilt nach Lemma 1, dass $1 < a^{y-x} \underset{\text{nach (2) von Proposition 5}}{=} \frac{a^y}{a^x}$. Daraus erhält man wegen $a^x > 0$, dass $a^x < a^y$ gilt.
(2) Nachdem $0 < a < 1$ ist, gilt $\frac{1}{a} > 1$. Wegen (1) ergibt sich $\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y$. Es ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x \underset{\text{nach (4) von Proposition 5}}{=} \frac{\overbrace{1^x}^{=1}}{a^x} = \frac{1}{a^x} ,$$

und deshalb auch $\left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y}$. Also ist $\frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y}$. Weil $a^x > 0$ und $a^y > 0$, erhält man daraus $a^y < a^x$. □

**Prop:** Sei $f:[a,b]\to[a,b]$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=x$ (also einen Fixpunkt).

**Bew:** Setze $g(x):=f(x)-x$. Dann ist $g(x)=0 \iff f(x)=x$

$g$ ist stetig. $g(a)=\underbrace{f(a)}_{\geq a}-a\geq 0$, $g(b)=\underbrace{f(b)}_{\leq b}-b\leq 0 \overset{ZWS}{\Longrightarrow}$

$\exists\, x$ mit $g(x)=0 \Rightarrow f(x)=x$. $\square$

**Gegenbeispiel:** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x+1$ stetig, bijektiv, aber hat keinen Fixpunkt.

$f:(0,1)\to(0,1)$ $f(x)=\frac{x}{2}$ stetig, aber hat keinen Fixpunkt
(0 wäre der Fixpunkt)

$f(x)=x^2$ stetig, bijektiv, aber hat keinen Fixpunkt
(wären bei 0 und 1)

4.) Wurzel- und Potenzfunktionen

**Prop.:** Für $n\in\mathbb{N}$, ist $f(x)=x^n$ $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, stetig, streng monoton wachsend, bijektiv, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**Bew.:** Sei $r\in\mathbb{R}$. Setze $s=\max\{1,r\}$. Falls $x\geq s$, dann ist $x^n\geq x\geq s\geq r$, also $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ ⑰.

surjektiv $f$ ist stetig. Sei $y\in[0,+\infty)$: $f(0)=0\leq y$

$\exists\, x_1\in\mathbb{R}$ mit $f(x_1)\geq y \overset{ZWS}{\Longrightarrow} \exists\, x\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=y$. $\square$

**Def.:** Für $n\in\mathbb{N}$ sei $\sqrt[n]{x}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ die Umkehrfunktion von $x\mapsto x^n$.

**Prop.:** Für $n\in\mathbb{N}$ ist $x\mapsto\sqrt[n]{x}$, $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ stetig, bijektiv, streng monoton wachsend. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

(Bis auf Limes bereits alles gezeigt. Limes folgt aus ⑰)

**Prop.:** Sei $a \geq 0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ so, dass $m_1 n_2 = m_2 n_1$ (also $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$). Dann gilt die $\sqrt[n_1]{a^{m_1}} = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$

**Bew.:** $x \mapsto x^{n_1 n_2}$ bijektiv.

$$\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1 n_2} = \Big(\underbrace{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1}}_{=a^{m_1}}\Big)^{n_2} = a^{m_1 n_2} = a^{m_2 n_1} = (\underbrace{a^{m_2}}_{=\left(\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\right)^{n_2}})^{n_1} =$$

$$= \left(\left(\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\right)^{n_2}\right)^{n_1} = \left(\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\right)^{n_2 n_1} \quad x \mapsto x^{n_1 n_2} \text{ bij.} \Rightarrow \sqrt[n_1]{a^{m_1}} = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$$

**Def.:** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und sei $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$.
Dann ist $a^q := \sqrt[n]{a^m}$

eindeutig da $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$

**Prop.:** $1^q = 1 \ \forall q \in \mathbb{Q}$

**Prop.:** $a, b > 0$, $q, r \in \mathbb{Q}$

(1) $a^{q+r} = a^q a^r$

(2) $a^{q-r} = \frac{a^q}{a^r}$

(3) $(a^q)^r = a^{qr}$

(4) $(ab)^q = a^q b^q$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}$

**Prop.:** $0 < a < b$, $q \in \mathbb{Q}$

(1) $q > 0 \Rightarrow a^q < b^q$

(2) $q < 0 \Rightarrow a^q > b^q$

**Prop.:** $a > 0$, $q < r \in \mathbb{Q}$

(1) $a > 1 \Rightarrow a^q < a^r$

(2) $a < 1 \Rightarrow a^q > a^r$

**Lemma:** Sei $a > 0$ und sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \to \infty} q_n = 0$.
Dann ist $\lim_{n \to \infty} a^{q_n} = 1$.

**Bew.:** 1. Fall $a \geq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, $\sqrt[n]{a} \to 1 \Rightarrow$

$\exists K: \quad 1 - \varepsilon < \sqrt[K]{\frac{1}{a}} < \sqrt[K]{a} < 1 + \varepsilon$

$q_n \to 0 \Rightarrow \exists N \ \forall n \geq N: -\frac{1}{K} < q_n < \frac{1}{K}$. Sei $n \geq N$.

$$1 - \varepsilon < \sqrt[K]{\frac{1}{a}} \leq \underbrace{a^{-\frac{1}{K}}}_{=(a^{-1})^{\frac{1}{K}}} < a^{q_n} < a^{\frac{1}{K}} \leq \sqrt[K]{a} < 1 + \varepsilon$$

Daher $|a^{q_n}-1| < \varepsilon$, also $a^{q_n} \to 1$.

2. Fall: $a=1$ $\quad 1^{q_n} = 1 \to 1$.

3. Fall: $a<1$ $\quad a^{q_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-q_n} \to 1$. $\square$

<u>Lemma:</u> Sei $a \in \mathbb{R}$, $a>1$ und sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Weiters gilt, falls $x \in \mathbb{Q}$, dass $a^x = \sup \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$

<u>Bew.:</u> $A := \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$. $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 < x < q_2$ (Archimedisches Axiom)
$\Rightarrow a^{q_1} \in A$, also $A \neq \emptyset$. Sei $y \in A \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$, $q \leq x < q_2$ mit $y = a^q \Rightarrow y = a^q < a^{q_2}$, daher ist $a^{q_2}$ obere Schranke von $A$.

Für $x \in \mathbb{Q}$: Wenn $y \in A \Rightarrow y = a^q$ für $q \in \mathbb{Q}$, $q \leq x \Rightarrow \underbrace{a^q}_{=y} \leq a^x \in A$
$\Rightarrow a^x = \sup A$. $\square$

<u>Def.:</u> Für $x \in \mathbb{R}$, $x>0$ setze $0^x := 0$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, sei $b \in \mathbb{R}$

(1) Falls $a>1$, dann setze $a^b := \sup\{a^q ; q \in \mathbb{Q}, q \leq b\}$.

(2) Für $a=1$, setze $1^b := 1$

(3) Falls $a<1$, dann setze $a^b := \left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$

<u>Lemma:</u> Seien $a>0$, $x \in \mathbb{R}$, $(q_n) \in \mathbb{Q}$ mit $q_n \to x$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^x$.

<u>Bew.:</u> 1. Schritt: <u>Behauptung:</u> Es gibt eine Folge $(r_n) \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$ und $a^{r_n} \to a^x$

<u>Bew. der Beh.:</u> 1. Fall: $a>1$: $\exists r_1 < r_2 < \ldots < r_n \in \mathbb{Q}$ mit
$x - \frac{1}{k} < r_k < x$ und $a^x - \frac{1}{k} < a^{r_k} < a^x$ $\quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Induktion nach $n$: (Induktionsschritt = Induktionsanfang)

$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$, $q < x$ mit $a^x - \frac{1}{n} < a^q < a^x$

$\exists r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n > q$, $r_n > r_{n-1}$, $r_n > x - \frac{1}{n}$, $r_n < x$

Dann ist $r_n > r_{n-1}$, $x - \frac{1}{n} < r_n < x$, $\quad a^x - \frac{1}{n} < a^q < a^{r_n} < a^x$.

Erhalte Folge $(r_n) \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$ und $a^{r_n} \to a^x$.

2. Fall: $a = 1$: $1^{r_n} \to 1 = 1^x$

3. Fall: $a < 1$: $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \exists (r_n) \in \mathbb{Q},\ r_n \to x \quad (-r_n \to -x)$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{-r_n}}_{= a^{r_n}} \to \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}}_{= a^x} \qquad \Diamond$$

2. Schritt: $\exists (r_n) \in \mathbb{Q},\ r_n \to x,\ a^{r_n} \to a^x$.

$q_n \to x \Rightarrow q_n - r_n \to 0 \Rightarrow a^{q_n - r_n} \to 1$

$$a^{q_n} = a^{(q_n - r_n) + r_n} = \underbrace{a^{q_n - r_n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{a^{r_n}}_{a^x} \to a^x. \qquad \square$$

<u>Prop:</u> Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$

(2) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

(3) $(ab)^x = a^x b^x$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

<u>Lemma:</u> $a > 1,\ x > 0 \Rightarrow a^x > 1$

<u>Prop:</u> $0 < a < b$, $x \in \mathbb{R}$

(1) Falls $x > 0 \Rightarrow 0 < a^x < b^x$

(2) Falls $x < 0 \Rightarrow 0 < b^x < a^x$

<u>Prop:</u> $a > 0$, $x < y \in \mathbb{R}$

(1) Falls $a > 1$, dann ist $a^x < a^y$.

(2) Falls $a < 1$, dann ist $a^x > a^y$.

19.05.2009

**Def.:** $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $\exp(x) := e^x$ heißt Exponentialfunktion.

$a > 0$. $x \mapsto a^x$ $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$.

$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

Funktionalgleichung: Hier $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, aber $f(x) \neq a^x$. (Auswahlaxiom, Lineare Algebra, Hamelbasen)

**Prop:** Sei $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ eine Funktion mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dann gelten:

(1) $f(0) = 1$.

(2) $f(nx) = f(x)^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(3) $\forall q \in \mathbb{Q}$: $f(q) = f(1)^q$

**Bew.:** (1) $f(\underbrace{0}_{=0+0}) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$ durch kürzen $(f(0) > 0)$

(2) Für $n = 0$: $f(0 \cdot x) = f(0) \overset{(1)}{=} 1 = f(x)^0$

Sei $n > 0$: $f(n \cdot x) = f((n-1)x + x) = \underbrace{f((n-1)x)}_{\overset{IV}{=} f(x)^{n-1}} \cdot f(x) = f(x)^n$ Induktionsvoraussetzung

Sei $n < 0$: $1 \overset{(1)}{=} f(\underbrace{0}_{= nx - nx = nx + (-nx)}) = f(nx + (-nx)) = f(nx) \cdot \underbrace{f(\underbrace{-n}_{>0} x)}_{= f(x)^{-n} = \frac{1}{f(x)^n}} = ⓞ$

$ⓞ = f(nx) \cdot \frac{1}{f(x)^n} \Rightarrow f(nx) = f(x)^n$

(3) $q = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$.

$f(q)^n \overset{(2)}{=} f(\underbrace{nq}_{=m}) = f(m \cdot 1) \overset{(2)}{=} f(1)^m \Rightarrow$

$\Rightarrow f(q) = \sqrt[n]{f(1)^m} = f(1)^{\frac{m}{n}} = f(1)^q$. $\square$

**Satz:** Sei $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(1) $\exists\, a \in \mathbb{R},\ a > 0$ mit $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x+y) = f(x) f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $f$ ist monoton

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ ($f$ ist stetig in $0$).

(4) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $f$ ist stetig.

**Bew.:** (1) $\Rightarrow$ (2): $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$. Sei $x < y$.

Monotonie:

1. Fall: $a > 1$: $f(x) = a^x < a^y = f(y)$ also $f$ (streng) monoton steigend.

2. Fall: $a = 1$: $f(x) = 1^x \overset{\geq}{\leq} 1 = f(y)$, also $f$ ist monoton steigend. fallend (gleichzeitig)

3. Fall: $a < 1$: $f(x) = a^x > a^y = f(y)$ also $f$ (streng) monoton fallend.

(2) $\Rightarrow$ (3): $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ bereits in (1) $\Rightarrow$ 2 bewiesen.

$\sqrt[n]{f(1)} \to 1$, $\sqrt[n]{\frac{1}{f(1)}} \to 1$ Sei $\varepsilon > 0$

$\exists N$: $1 - \varepsilon < \sqrt[N]{f(1)} < 1 + \varepsilon$ und $1 - \varepsilon < \sqrt[N]{\frac{1}{f(1)}} < 1 + \varepsilon$.

Wähle $\delta := \frac{1}{N} > 0$. Sei $x$ so, dass $0 < |x| < \delta \Rightarrow -\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}$

1. Fall: $f$ ist monoton steigend: $1 - \varepsilon < \underbrace{f\left(-\frac{1}{N}\right)}_{= f(1)^{-\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{\frac{1}{f(1)}}} \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{N}\right) = \underbrace{f(1)^{\frac{1}{N}}}_{= \sqrt[N]{f(1)}} < 1 + \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$, also $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

2. Fall: $f$ ist monoton fallend: $1 + \varepsilon > \sqrt[N]{\frac{1}{f(1)}} = f\left(-\frac{1}{N}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{N}\right) = \sqrt[N]{f(1)} > 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$, also $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

(3) $\Rightarrow$ (4): Funktionalgleichung gilt schon nach (3)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \underset{= x - x_0 + x_0}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{f((x - x_0) + x_0)}_{= \underbrace{f(x - x_0)}_{\to 1} f(x_0)} = f(x_0),$$ also $f$ stetig in $x_0$.

Daher $f$ ist stetig.

(4) $\Rightarrow$ (1) Setze $a = f(1)$. Für $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$f(q) = \underbrace{f(1)}_{= a}{}^q = a^q$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists\, (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ mit

$q_n \to x$. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{f(q_n)}_{} = a^x$. $\square$

**Prop:** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. $f: x \mapsto a^x$, $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$

Dann ist $f$ stetig. (Bereits auf voriger Seite bewiesen)

(1) Falls $a > 1$ ist $f$ streng monoton steigend, bijektiv, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
vorhin schon gezeigt
und $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

(2) Falls $a < 1$ ist $f$ streng monoton fallend, bijektiv, $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

**Bew:** (1) genügt. $a^n \to +\infty$. Sei $r \in \mathbb{R}$ $\exists N: a^N > r$.

Sei $x \geq N$. $a^x \geq a^N > r$. Somit $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

$\left(\frac{1}{a}\right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^N \Rightarrow 0$. Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N: \left(\frac{1}{a}\right)^N < \varepsilon$

Sei $x \leq -N$. Dann ist $0 < a^x < a^{-N} = \left(\frac{1}{a}\right)^N < \varepsilon$, also

$|a^x - 0| < \varepsilon$. Daher $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.

injektiv, da streng monoton wachsend.

surjektiv: Sei $y \in (0, +\infty)$. $\exists x_1, x_2$ mit $f(x_1) < y < f(x_2)$.

Nach dem Zwischenwertsatz $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$. $\square$

**Prop:** Für $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt $(a^b)^c = a^{bc}$

**Bew:** Sei $f(x) = a^{bx}$: $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ $f(x+y) = a^{bx+by} = a^{bx} \cdot a^{by} =$

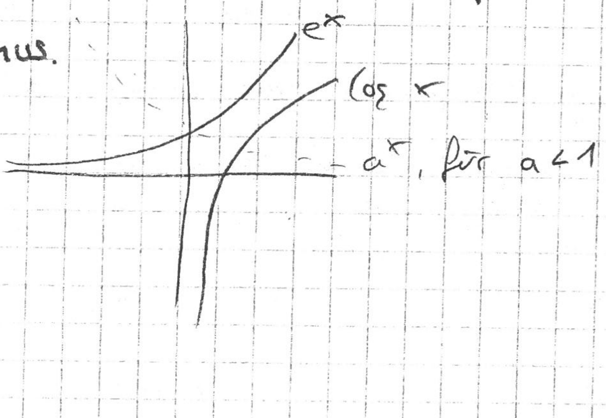
$= f(x) \cdot f(y)$. $f$ ist stetig ($b \cdot x$ ist stetig, $a^x$ ist stetig $\Rightarrow$ Komposition ist stetig)

$\Rightarrow \exists\, d > 0$ mit $f(x) = d^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$d = d^1 = f(1) = a^b$ Somit $a^{bc} = f(c) = (a^b)^c$. $\square$

$x \mapsto e^x$. stetig, streng monoton wachsend $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$

**Def.:** $\log: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto e^x$ und heißt Logarithmus.



**Prop.:** $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig, bijektiv, streng monoton steigend,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.

$e^{\log x} = x$, $\log e^x = x$.

**Prop.:** Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$. Dann gelten:

(1) $\log xy = \log x + \log y$

(2) $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

(3) $\log(x^\alpha) = \alpha \log x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(4) $\log 1 = 0$.

**Bew.:** (1) $e^{\log xy} = xy = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = e^{\log x + \log y} \overset{x \mapsto e^x \text{ bij.}}{\Longrightarrow} \log xy = \log x + \log y$

(2) analog

(3) $e^{\log x^\alpha} = x^\alpha = \left(e^{\log x}\right)^\alpha = e^{\alpha \log x} \overset{x \mapsto e^x \text{ bij.}}{\Longrightarrow} \log x^\alpha = \alpha \log x$

(4) $e^0 = 1 \Rightarrow \log 1 = 0$. $\square$

**Prop.:** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x^\alpha$

Dann ist $f$ stetig.

(1) Für $\alpha > 0$ ist $f$ streng monoton wachsend, $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ stetig, bijektiv, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (inj. bereits durch Monotonie gegeben)

(2) Für $\alpha < 0$ ist $f$ streng monoton fallend, bijektiv, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

**Bew.:** $f(x) = (e^{\log x})^\alpha = e^{\alpha \log x}$ stetig ($e^x$ stetig, $\alpha \log x$ stetig $\Rightarrow$ Komposition stetig) bijektiv (surjektiv) durch ZWS. $\square$

**Def.:** Sei $a > 1$. Definiere für $x > 0$

$\log_a x := \frac{\log x}{\log a}$ $\quad ({}^a\log x)$

**Prop.:** Es gilt $a^x = b$ genau dann, wenn $x = \log_a b$.

**Bew.:** ($\Rightarrow$) $a^x = b \Rightarrow x \log a \Rightarrow \log(a^x) = \log b \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a} \overset{\text{Definition}}{=} \log_a b$

($\Leftarrow$) $x = \log_a b \Rightarrow a^x = \underbrace{a^{\log_a b}}_{= a^{\frac{\log b}{\log a}}} = \underbrace{e^{\log a \cdot \frac{\log b}{\log a}}}_{= e^{\log a \cdot \frac{\log b}{\log a}}} = e^{\log b} = b$. $\square$

$a = e^{\log a}$

**Satz**: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Weiters gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x|<1$, dass $|e^x-1-x| \le \frac{|x|^2}{1-|x|}$.

25.05.2009

**Bew**: 1. Schritt: **Beh.** $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ konvergent.

**Bew. der Beh.**: Sei $N \ge |x|+1$ und sei $n \ge N$

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Big(\underbrace{\frac{n+1+x}{n+1}\cdot\frac{n}{n+x}}_{\frac{n^2+n+nx+x-x}{n^2+n+nx+x} = 1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}}\Big)^n =$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x}{n+1}\right) \underbrace{\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n}_{\text{Bernoullische Ungleichung: } \ge 1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}} \ge$$

$$\ge \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underbrace{\Big(1 \underbrace{-\frac{nx}{(n+1)(n+x)} + \frac{x}{n+1} - \frac{nx^2}{(n+1)^2(n+x)}}_{\frac{\cancel{-n^2x} - \cancel{nx} + \cancel{n^2x} + \cancel{nx} + \cancel{nx^2} + x^2 - \cancel{nx^2}}{(n+1)(n+x)} \ge 0}\Big)}_{\ge 1}$$

$\ge \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow$ monodon steigend

1. Fall: $x \le 0$ $\quad \Big(\underbrace{1+\frac{x}{n}}_{\le 1}\Big)^n \le 1$ beschränkt

2. Fall: $x \ge 0$ $\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\underbrace{\frac{n}{n}}_{\le 1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\le 1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\le 1}}_{\le 1} \cdot x^k$

$$\le \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^N}{N!}\sum_{k=N}^{n} \underbrace{\frac{1}{(N+1)\dots k}}_{\le \frac{1}{N^{k-N}}} x^{k-N} \le \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^N}{N!} \underbrace{\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{x}{N}\right)^{k-N}}_{= \sum_{k=0}^{n-N}\left(\frac{x}{N}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{x}{N}\right)^{n-N+1}}{1-\frac{x}{N}} \le \frac{1}{1-\frac{x}{N}}} \overset{\bullet}{\le}$$

$$\overset{\bullet}{\le} \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^N}{N!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{N}}.$$

Somit ist $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ monodon wachsend und nach oben beschränkt, deshalb konvergent. ◁

2. Schritt: Definiere $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ durch $f(x):=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Beh: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Bew. der Beh: Wähle $n>\max\{2(|x|+|y|+1),\ 2|xy|+1\}$

$$\left|\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\underbrace{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}}-1\right|$$

$$=\left(\frac{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{\underbrace{1+\frac{x+y}{n}}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\dots)^k=1+\sum_{k=1}^{n}\dots$$

$$=1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{=\underbrace{\frac{1}{k!}}_{\le 1}\underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{\le n^k}}\left|\left(\frac{\frac{xy}{n^2}}{\underbrace{1+\frac{x+y}{n}}_{\ge\frac{1}{2}}}\right)^k\right|\le\sum_{k=1}^{n}\underbrace{n^k\left(\frac{2|xy|}{n^2}\right)^k}_{\left(\frac{2|xy|}{n}\right)^k}=$$

$$\frac{2|xy|}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2|xy|}{n}\right)^k}_{=\frac{1-\left(\frac{2|xy|}{n}\right)^2}{1-\frac{2|xy|}{n}}\le\frac{1}{1-\frac{2|xy|}{n}}}\le\frac{2|xy|}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{2|xy|}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0\cdot 1=0$$

Daher ist $\frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}=1 \Rightarrow f(x)f(y)=f(x+y)$ ◇

3. Schritt: Beh: Sei $|x|<1$. Dann gilt: $|f(x)-1-x|\le\frac{|x|^2}{1-|x|}$

Bew: Sei $n\ge 2$: $\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1-x\right|\le\sum_{k=2}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}\left(\frac{|x|}{n}\right)^k}_{=\underbrace{\frac{1}{k!}}_{\le 1}\underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}}_{\le 1}|x|^k}\le$ ⊙

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k=1+x+\sum_{k=2}^{n}\dots$$

⊙ $\le |x|^2\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}|x|^k}_{=\frac{1-|x|^{n-1}}{1-|x|}\le\frac{1}{1-|x|}}\le\frac{|x|^2}{1-|x|}\Rightarrow|f(x)-1-x|\le\frac{|x|^2}{1-|x|}$. ◇

4\. Schritt: $f(x+y) \overset{2.\text{Schritt}}{\Longrightarrow} f(x)f(y) \quad \forall x,y$ Sei $|x|<1$.

$$|f(x)-1|-|x| \leq |f(x)-1-x| \leq \frac{|x|^2}{1-|x|} \Rightarrow$$

$$|f(x)-1| \leq |x| + \frac{|x|^2}{1-|x|} \xrightarrow{x\to 0} 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$\overset{\text{Satz-Funktionalgleichung}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a>0$ mit $f(x)=a^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$a = a^1 = f(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Deshalb $f(x)=e^x$ und

$$|\underbrace{e^x}_{=f(x)}-1-x| \underset{3\,\text{Schritt}}{\leq} \frac{|x|^2}{1-|x|}$$

□

<u>Prop.:</u> $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

<u>Bew:</u> Sei $x$ so, dass $|x|<1$ und $x\neq 0$

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| = \frac{|e^x-1-x|}{|x|} \leq \frac{\frac{|x|^2}{1-|x|}}{|x|} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|^2}{1-|x|} = \frac{|x|}{1-|x|} \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

daher $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. □

<u>Bsp:</u> $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = e^5$.

Weil $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n+2}} = e^{15} = (e^5)^3$$

$$= \Big(\underbrace{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}_{e^5}\Big)^3 \underbrace{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}_{\to 1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{6n\cdot(\underbrace{\sqrt[n]{e}}_{=e^{\frac{1}{n}}}-1)}_{6\cdot\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}_{\to 1,\ \text{weil } \frac{e^x-1}{x}\xrightarrow{x\to 0}1}} = 6\cdot 1$$

$$\lim_{n\to\infty}4n^2\left(\sqrt[2n^2]{e}-1\right) = 2$$

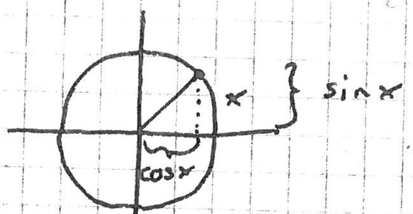
$$= 2\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{2n^2}}-1}{\frac{1}{2n^2}}}_{\to 1,\ \text{weil } \frac{e^x-1}{x}\xrightarrow{x\to 0}1}$$

$$\lim_{n\to\infty} 8^n \Big(\underbrace{\sqrt[8^n]{3}}_{3^{\frac{1}{8^n}} = e^{\frac{1}{8^n}\log 3}} - 1\Big) = \log 3$$

$$= \log 3 \, \frac{e^{\frac{1}{8^n}\log 3} - 1}{\underbrace{\frac{1}{8^n}\log 3}_{\to 1}}$$

6.) Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)

$c(x)$




**Def.:** Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\sin x := c(x)_2$ und $\cos x := \cancel{c(x)}\ c(x)_1$

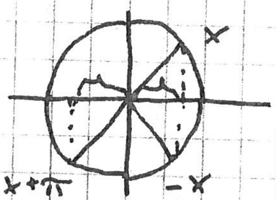
**Prop:** $\sin(x + 2n\pi) := \sin x$ und $\cos(x + 2n\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$

**Prop:** $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$,

ungerade Funktion (Symmetrie bzgl. 0-Punkt) — gerade Funktion (Symmetrie bzgl. y-Achse)

$\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$

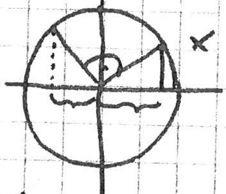
**Bew:**




$\square$.

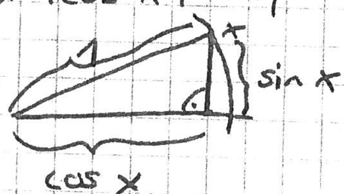
**Prop.:** $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

**Bew:**




**Prop.:** $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $\underbrace{\sin^2 x}_{\sin x \cdot \sin x} + \cos^2 x = 1$ Weiters gelten $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$

**Bew:**




Pythagoras $\Rightarrow \sin^2 + \underbrace{\cos^2}_{\geq 0} = 1$

$\Rightarrow \sin^2 \leq 1 \Rightarrow |\sin x| \leq 1$

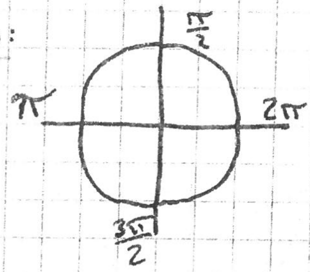
Analog $|\cos x| \leq 1$. $\square$

**Prop:** $\sin x = 0 \iff x = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Für $x \in (0, \pi)$ ist $\sin x > 0$, für $x \in (\pi, 2\pi)$ ist $\sin x < 0$, für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos x > 0$, für $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ist $\cos x < 0$.

**Bew:**



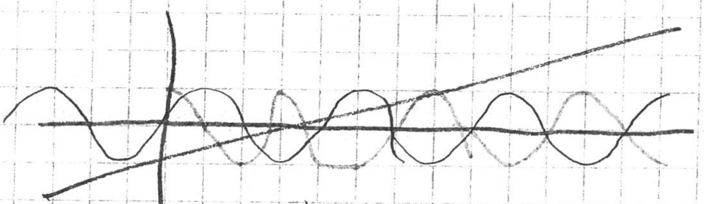

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\square$.

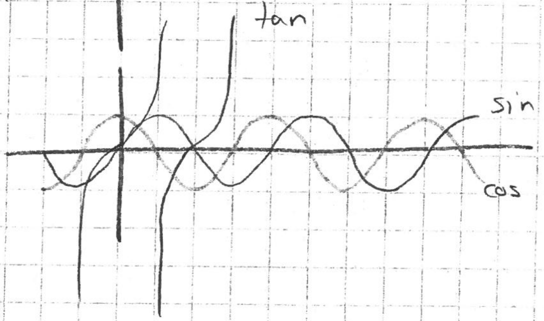
**Def:** Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ dann ist $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$.

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

**Prop:** $\forall x$ gilt: $\tan(x + \pi) = \tan x$ und $\tan(-x) = -\tan x$

Bew mittels Def



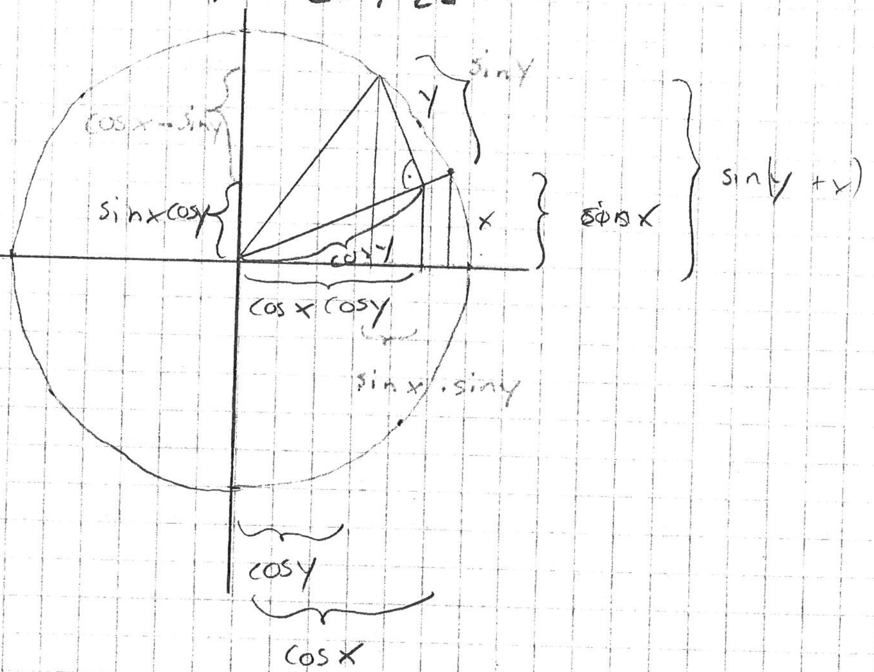



| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sin 0 = 0$, | $\cos 0 = 1$ | $(\tan 0 = 0)$ |
| $\frac{\pi}{6}$: | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{\pi}{4}$: | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | $(\infty)$ |

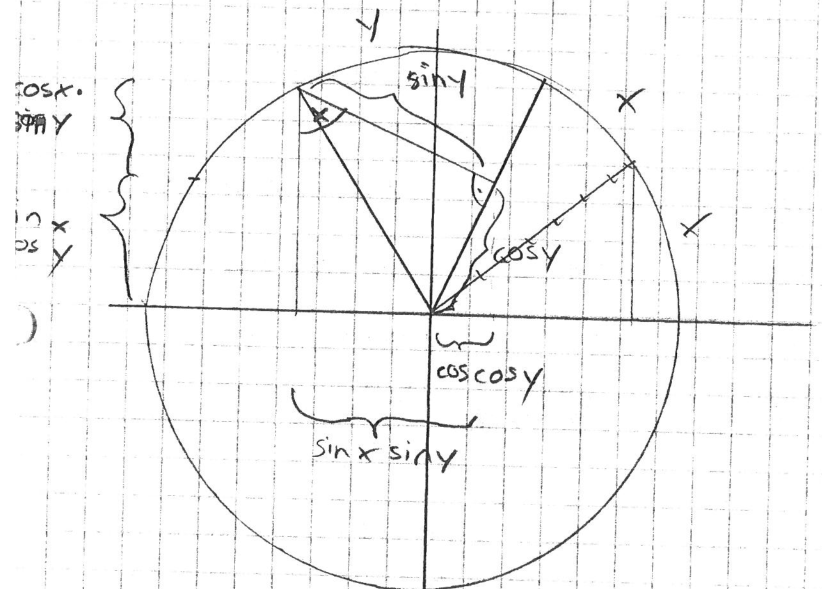
**Prop:** Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ und
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

**Bew:** Seien $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1. Fall: $x+y \in [0, \frac{\pi}{2}]$




2. Fall: $x+y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$




$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\sin(x+y) = \sin(x + (y - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + (y - \frac{\pi}{2})) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$

$$\cos x \cdot \underbrace{\cos(y - \tfrac{\pi}{2})}_{=\cos(y+\pi+\frac{\pi}{2}) \,=\, -\cos(y+\frac{\pi}{2}) \,=\, \sin y} - \sin x \underbrace{\sin(y - \tfrac{\pi}{2})}_{=\sin(y+\pi+\frac{\pi}{2}) \,=\, -\sin(y+\frac{\pi}{2}) \,=\, -\cos y} \qquad \square$$

Prop: $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$

Bew: $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} =$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \cdot \tan y}. \quad \square$$

Prop: $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x$,

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

Bew: $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$,

Rest analog. $\square$.

Prop: $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$,

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$,

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$.

Bew: $\frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) = \frac{1}{2}(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y})$

$= \cos x \cdot \cos y$ , Rest analog $\square$

Prop: $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

Bew: $2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \sin(\underbrace{\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}}_{=x}) + \sin(\underbrace{\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}}_{=y}) =$

$\sin x + \sin y$ Rest analog $\square$

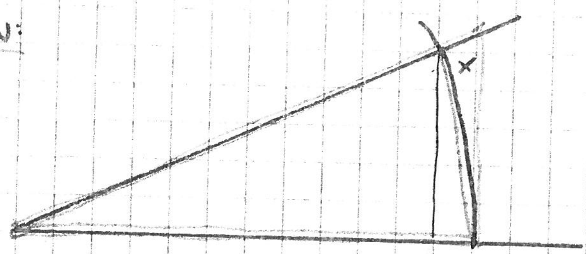
Prop: Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt:

$\sin x \leq x$ und $x \cos x \leq \sin x$

$(\sin x \leq x \leq \tan x)$

Insbesondere gilt für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dass $|\sin x| \leq |x|$

Bew:




$$\underbrace{A(\triangle)}_{=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x} \le \underbrace{A(\triangle)}_{=\frac{x}{2}} \le \underbrace{A(\triangle)}_{=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$\Rightarrow \; x\cos x \le \sin x \le x.$

Sei $|x| \le \frac{\pi}{2}$ 1. Fall: $x \ge 0$: $|\sin x| = \sin x \le x = |x|$

2. Fall: $x \le 0$: $|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) \le (-x) = |x|$ □.

Prop: $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1.$

Bew: Sei $|x| \le \frac{\pi}{2}$. $|\underbrace{\cos x}_{=\cos 2\frac{x}{2}} - 1| = |\underbrace{\cos 2\frac{x}{2}}_{=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} - \underbrace{1}_{=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}| = |-2\sin^2\frac{x}{2}| =$

$2\cdot \underbrace{\sin^2\frac{x}{2}}_{\le(\frac{x}{2})^2} \le 2\cdot\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{x\to 0} 0$

Also $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1.$ □

26.05.2009

Prop: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Bew: (1) Sei $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

1. Fall: $x > 0$: $\sin x \le x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \le 1$

$x\cos x \le \sin x \Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x}$, also $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$

2. Fall: $x < 0$: $\cos x = \cos(-x) \le \frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin(-x)}{-(-x)} = \frac{\sin(-x)}{-x} \le 1.$

also $\underset{x\to 0}{\phantom{a}}$ $\underset{\downarrow \atop 1}{\cos x} \le \frac{\sin x}{x} \le \underset{\downarrow \atop 1}{1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos(2\frac{x}{2}) - 1}{x^2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - (\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2})}{x^2} =$

$= -2\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}\cdot\Bigl(\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1}\Bigr)^2 \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\cos x - 1}{x} = \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ □

Komplexe Exponentialfunktion:

$z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$. $\quad e^z = e^{x+iy} := e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y)$

$z_1 = x_1 + iy_1$, $\quad z_2 = x_2 + iy_2$

$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}}$

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \underbrace{e^{x_1+x_2}}_{= e^{x_1} \cdot e^{x_2}} (\underbrace{\cos(y_1+y_2)}_{= \cos y_1 \cdot \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2} + i \underbrace{\sin(y_1+y_2)}_{= \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2})$$

$$= \underbrace{e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)}_{= e^{z_1}} \underbrace{e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)}_{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$\boxed{n \in \mathbb{Z}: (e^z)^n = e^{nz}}$ (Beweis mittels Induktion)

$\boxed{|e^z| = e^x}$ $\left(\text{formaler: } |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}\right) \Rightarrow e^z \neq 0 \;\forall z$

$e^z$ ist nicht injektiv, weil: $\quad e^{z+2\pi i} = e^z \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{= \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1} = e^z$

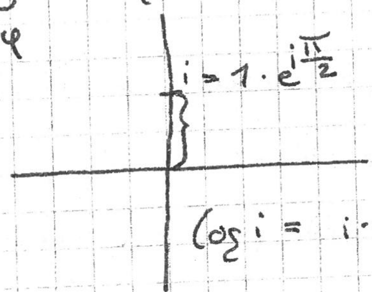
$e^z$ hat Periode $2\pi i$

Polarkoordinaten: $z = r \cdot e^{i\varphi}$ $\quad r = |z|$

$r > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ $\quad$ Für $z \neq 0$ eindeutig.

$z \longrightarrow e^z$ ist bijektiv: $\{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Hauptast des Logarithmus: $\log \underbrace{z}_{r \cdot e^{i\varphi}} := \log r + i\varphi$




$a^b = e^{b \log a}$ $\quad$ Hauptast

$i^i = e^{i \log i} = e^{i i \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ $\quad$ $\log i = i \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

Summensätze gelten auch im Komplexen. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

aber $\sin z$ und $\cos z$ sind unbeschränkt.

Vorsicht: $-1 = i^2 = \underbrace{i}_{\sqrt{-1}}\underbrace{i}_{\sqrt{-1}} = \sqrt[2]{-1}\cdot\sqrt[2]{-1} \neq \sqrt[2]{\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1}} = \sqrt[2]{1} = 1$

## 7.) Der Satz vom Minimum und Maximum

Def.: Sei $A$ eine nichtleere Menge und $f: A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Weiters sei $x_0 \in A$:

(1) $x_0$ heißt (globales) Maximum von $f$, falls $\forall x \in A: f(x) \leq f(x_0)$.

(2) $x_0$ heißt (globales) Minimum von $f$, falls $\forall x \in A: f(x) \geq f(x_0)$.

Def.: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a,b)$.

(1) $x_0$ heißt lokales Maximum von $f$, falls $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$

(2) $x_0$ heißt striktes lokales Maximum von $f$, falls $\exists \delta > 0$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}: f(x) < f(x_0)$

(3) $x_0$ heißt lokales Minimum von $f$, falls $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$: $f(x) \geq f(x_0)$

(4) $x_0$ heißt striktes lokales Minimum, wie (3) $f(x) > f(x_0)$

Def.: (1) $x_0$ heißt Extremum, falls $x_0$ Maximum oder Minimum

(2) $x_0$ heißt lokales Extremum, falls $x_0$ lokales ~~Maximum~~ Minimus der lok. Maxima.

(3) $x_0$ heißt striktes lokales Extremum, falls $x_0$ strikt lok. Min. oder s.l. Max.

Bsp.: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) := (1-x)\sin\frac{1}{x}$ stetig,

$|f(x)| = \underbrace{|1-x|}_{<1}\underbrace{|\sin\frac{1}{x}|}_{\leq 1} < 1$.

$a_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \; (\to 0)$, $f(a_n) = (1-a_n)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}_{=1} = 1 - a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$,

also $\sup\{f(x) : x \in (0,1)\} = 1$,

also $f$ hat kein Maximum.

$b_n := \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ $(\to 0)$, $f(b_n) = -(1-b_n) \to -1$, also $f$ hat kein Minimum

## Satz von Maximum und Minimum

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $m_1, m_2 \in [a,b]$ mit $f(m_1) \leq f(x) \leq f(m_2)$ $\forall x \in [a,b]$.

Bew: Es genügt zu zeigen, dass $f$ ein Maximum hat.

Setze $s := \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}, & \text{falls } f \text{ nach oben beschränkt ist}, \; * \\ +\infty, & \text{falls } f \text{ nicht nach oben beschränkt ist}. \end{cases}$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere $s_n := \begin{cases} s - \frac{1}{n}, & \text{falls } s \in \mathbb{R}, \\ n, & \text{falls } s = +\infty. \end{cases}$

Es ist $s_n < s$. $\therefore \exists\, x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) > s_n$.

Damit erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\exists\, m_2 \in [a,b]$ mit $x_{n_k} \to m_2$.

$f(m_2) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{> s_{n_k}}$

1. Fall: $s = +\infty$: $f(m_2) > s_{n_k} = n_k \longrightarrow +\infty$ - Widerspruch.

Also $f$ ist nach oben beschränkt.

2. Fall: $s \in \mathbb{R}$: $f(m_2) > s_{n_k} = s - \frac{1}{n_k} \longrightarrow s \Rightarrow f(m_2) \geq s \geq f(m_2)$

weil $s = \sup\{f(x)\}$

Somit ist $f(m_2) = s \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$. $\square$

Dieser Beweis funktioniert in $\mathbb{Q}$ nicht, da wir in * die Vollständigkeit verwendet haben.

In $\mathbb{Q}$ ist dieser Satz falsch.

Bsp.: $f : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ stetig.

$f$ ist nicht nach oben beschränkt, weil $\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$

Bsp.: $f:[-2,2]\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=6x-x^3$ stetig

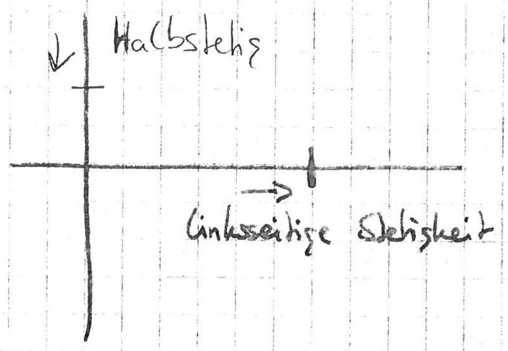
$f$ ist beschränkt, aber $f$ hat kein Minimum und kein Maximum

Bsp.: $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(1-x)\sin\frac{1}{x}, & \text{für } x>0,\\ 0, & \text{für } x\leq 0.\end{cases}$

$f$ ist linksseitig stetig, d.h. $\forall x\in[-1,1]$ gilt $\lim\limits_{y\to x^-} f(y)=f(x)$

$f$ hat weder Minimum, noch Maximum.

„Für halbstetige Funktionen bleibt die Hälfte des Satzes richtig."



8.6.09

# 8. Gleichmäßige Stetigkeit

**Def** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^s$, $f: M \to \mathbb{R}^r$. Dann heißt $f$ gleichmäßig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in M$ mit $|x-y| < \delta$: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Hier hängt $\delta$ nur von $\varepsilon$ (und nicht von $x$) ab

$f, g$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow \alpha_1 f + \alpha_2 g$ gleichm. stetig

$f, g$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow f \circ g$ gleichm. stetig

$I, J$ Intervalle, $f: I \cup J \to \mathbb{R}^r (\mathbb{R})$, $I \cap J \neq \emptyset$

$f|_I$, $f|_J$ gleichm. stetig $\Rightarrow f$ gleichm. stetig

**Satz:** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f$ gleichmäßig stetig

**Bew** indirekt, ang. $f$ wäre nicht gleichm. stetig

$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y$ mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon_0$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann $\exists x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} (= \delta)$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Erhalte Folge $(x_n)$ und $(y_n)$.
nach Satz von Bolzano-Weierstraß $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})$ von $(x_n)$ und $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $x_{n_k} \to x_0$.

$$y_{n_k} = \underbrace{(y_{n_k} - x_{n_k})}_{\to 0} + \underbrace{x_{n_k}}_{\to x_0} \to x_0 .$$

/.

~~Wir wissen~~

Weil $f$ stetig in $x_0$, $\exists \delta > 0$ $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Wegen $x_{n_k} \to x_0$ und $y_{n_k} \to x_0$ $\exists K$ $\forall k \geq K$:

$$|y_{n_k} - x_0| < \delta \text{ und } |x_{n_k} - x_0| < \delta$$

Sei $k \geq K$: $\varepsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq$

$$\underbrace{|f(x_{n_k}) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{|f(y_{n_k}) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{2}} < \varepsilon_0$$

Widerspruch!

Daher ist $f$ gleichm. stetig $\square$

! Dieser Satz gilt nicht in $\mathbb{Q}$ !

---

Bsp $f : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) := \frac{1}{x^2 - 2}$ stetig.

$\lim_{x \to \sqrt{2}+} f(x) = +\infty$. Setzen $\varepsilon_0 := 1$

Sei $\delta > 0$. Sei $x_1 \geq 0$, dass $\sqrt{2} < x_1 < \sqrt{2} + \delta$

$\exists$ $x_2$ finden mit $\sqrt{2} < x_2 < \sqrt{2} + \delta$ und $f(x_2) > f(x_1) + 1$.

Dann ist $|x_2 - x_1| < \delta$ und $|f(x_2) - f(x_1)| \geq 1 = \varepsilon_0$.

---

Bsp: Betrachte $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$

$x \mapsto x^2$ ist stetig auf $[0,1]$ $\Rightarrow$ $f$ gleichm. stetig auf $[0,1]$

$\Rightarrow$ $f$ ist gleichm. stetig auf $(0,1)$

(weil stetig auf $[0,1]$, also größeren Menge als $(0,1)$)

Def: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^s$, $f: M \to \mathbb{R}^r$, dann heißt $f$: LIPSCHITZ-stetig, falls $\exists\, C \in \mathbb{R}$ mit
$|f(x)-f(y)| \leq C\,|x-y|\ \forall x,y \in M$
($f$ erfüllt Lipschitz-Bedingung, $C$ ... Lipschitz Konstante)

OBdA: $C > 0$.

Prop: $f$ Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ $f$ gleichm. stetig

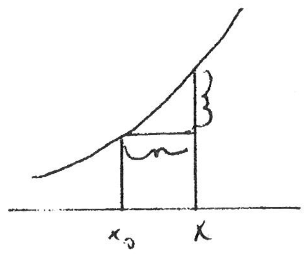
Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{C} > 0$. Seien $x, y$ so, dass $|x-y| < \delta$

$$|f(x)-f(y)| \leq C\,\underbrace{|x-y|}_{<\delta = \frac{\varepsilon}{C}} < \varepsilon \qquad \square$$

# IV DIFFERENZIERBARKEIT

## 1) Ableitung

Änderung der Funktion




$$a(x,x_0) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

<u>Def:</u> Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a,b)$. Dann heißt $f$ differenzierbar in $x_0$, falls $f'(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

Man nennt dann $f'(x_0)$ die Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$.

<u>Bemerk.</u> $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Tangente (an den Graph der Funktion):

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Tangente: $\exists$ lineare Funktion $df_{(x_0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)-df_{(x_0)}(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0$$

$$df_{(x_0)} = (f'(x_0))$$

[illegible]

<u>Bsp</u> $f(x) := x^2$ a der Stelle 5

$$f'(5) = \lim_{x\to 5} \underbrace{\frac{x^2-25}{x-5}}_{=x+5} = 10$$

<u>Bsp</u> $$c' = \lim_{y\to x} \frac{c-c}{y-x} = 0$$

$$x' = \lim_{y\to x} \frac{y-x}{y-x} = 1$$

Bsp $|x|$ an der Stelle 0

$|x|$ ist nicht differenzierbar, weil

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar $\forall x\in(a,b)$, dann

$f':(a,b)\to\mathbb{R}$

$f''=(f')'$, $\quad f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$

Schreibweisen: $f'$, $f'(x)$, $\dot{f}(t)$, $\dot{x}(t)$

wenn man nach t differenziert, dann wird ein Punkt gemacht, weil $x' = 1$

$f(x,y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$ partielle Ableitung nach x

$\frac{\partial f}{\partial y}$ partielle Abl nach y

$\Leftarrow$ ! kein Bruch, sondern Ableitung!

$f(x_1,\dots,x_n)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$

$\frac{df}{dx}$

höhere Ableitungen: $f''$, $f^{(n)}$, $\ddot{x}$, $x^{(n)}$

$\frac{d^2 f}{(dx)^2}$, bzw partielle Abl.: $\frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

hier wird zuerst nach x diff.

<u>Def</u>: (1) f heißt differenzierbar, falls f differenzierbar $\forall x\in(a,b)$

(2) f heißt stetig differenzierbar ($C^1$), falls $f'$ stetig

(3) f heißt n mal differenzierbar, falls $f^{(n)}$ $\exists$

(4) f heißt n mal stetig differenzierbar ($C^n$), falls $f^{(n)}$ stetig ist

(5) f heißt unendl. oft differenzierbar ($C^\infty$), falls $f^{(n)}$ $\exists\ \forall n\in\mathbb{N}$.

**Prop:** $f$ differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in $x_0$

**Bew** $\lim_{x \to x_0} \underbrace{\left(f(x) - f(x_0)\right)}$ $= 0$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \qquad \square$$

**Bemerk** $f$ $n$-mal diff.bar $\Rightarrow f \in C^{n-1}$

$f$ $C^\infty \Rightarrow f \in C^n \; \forall n$, $C^n \subseteq C^{n-1}$

**Bsp** $\operatorname{sgn} x$ an der Stelle $0$ nicht diff.bar, da nicht stetig

**Bsp** $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist nirgends diff.bar, weil nirgendwo stetig.

**Prop** $f, g$ diff.bar in $x_0$

(1) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}: \quad (\alpha_1 f + \alpha_2 g)'(x_0) = \alpha_1 f'(x_0) + \alpha_2 g'(x_0)$.

(nennt man Linearität der Abl.)

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$ (Produktregel)

(3) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g(x_0)^2}$

**Bew** (1) $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left( \alpha_1 \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} + \alpha_2 \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right) =$

$$= \alpha f'(x_0) + \alpha_2 g'(x_0).$$

(2) $(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0}}$ $= f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x) g(x_0)} \underbrace{\frac{f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x)}{x - x_0}}$

$$= \frac{f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x_0) + f(x_0) g(x_0) - f(x_0) g(x)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x) g(x_0)} \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right)$$

$$= \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$\square$

## Kettenregel

**Prop** Sei $g : (a,b) \to (c,d)$ diffbar in $x_0 \in (a,b)$,
$f : (c,d) \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0$
Dann ist $f \circ g$ diffbar in $x_0$ und
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

**1. Bew** Definiere $\varphi(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)}, & \text{falls } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)), & \text{falls } y = g(x_0). \end{cases}$

$$\lim_{y \to g(x_0)} \varphi(y) = \lim_{y \to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0)) = \varphi(g(x_0)).$$

Für $x \in (a,b)$ gilt $\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \varphi(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0}} = f'(g(x_0)) g'(x_0).$$

$$= \underbrace{\varphi(\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)})}_{\to \varphi(g(x_0)) = f'(g(x_0))} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

$\square$

Bew Sei $(a_n)$ Folge mit $a_n \to x_0$ und $a_n \neq x_0$ $\forall n$.

1. Fall: $\varphi(a_n) \neq \varphi(x_0)$ $\forall n$: $\frac{(f\circ\varphi)(a_n) - (f\circ\varphi)(x_0)}{a_n - x_0} =$

$$= \underbrace{\frac{f(\varphi(a_n)) - (f(\varphi(x_0))}{\varphi(a_n) - \varphi(x_0)}}_{\to f'(\varphi(x_0))} \underbrace{\frac{\varphi(a_n) - \varphi(x_0)}{a_n - x_0}}_{\to \varphi'(x_0)}$$

$$\to f'(\varphi(x_0))\,\varphi'(x_0).$$

2. Fall: $\varphi(a_n) = \varphi(x_0)$ $\forall n$: $\frac{(f\circ\varphi)(a_n) - (f\circ\varphi)(x_0)}{a_n - x_0} = 0 \to 0$

$$\frac{\varphi(a_n) - \varphi(x_0)}{a_n - x_0} = 0 \to 0$$

$$\frac{(f\circ\varphi)(a_n) - (f\circ\varphi)(x_0)}{a_n - x_0} \to 0 = f'(\varphi(x_0)) \cdot \underbrace{\varphi'(x_0)}_{=0}$$

3. Fall: $\varphi(a_n) \neq \varphi(x_0)$ für $\infty$ viele $n$ und $\varphi(a_n) = \varphi(x_0)$ für $\infty$ viele $n$.

zerlegen in 2 Teilfolgen, 1. und 2. Fall $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(f\circ\varphi)(a_n) - (f\circ\varphi)(x_0)}{a_n - x_0} \to f'(\varphi(x_0))\,\varphi'(x_0)$$

$\square$

Inversenregel:

falscher Bew: $\underbrace{(\underbrace{f^{-1}\circ f}_{=id})'(f^{-1}(x_0))}_{=1} = (f^{-1})'(x_0) \cdot f'(f^{-1}(x_0))$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

aber damit kann man die Inversenregel herleiten

falsch, weil nicht gezeigt wurde, dass die Funktion an $x_0$ diff bar ist

**Prop** Sei $f:(a,b)\to(c,d)$ eine Funktion, $x_0\in(c,d)$.
Es sei $f$ diff.bar in $f^{-1}(x_0)$, $f'(f^{-1}(x_0))\neq 0$
und $f^{-1}$ ist stetig in $x_0$.
Dann ist $f^{-1}$ diff.bar in $x_0$ und es gilt:
$$(f^{-1})'(x_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$
(alternativ $\Leftrightarrow$ $(f^{-1})'(f(y_0))=\frac{1}{f'(y_0)}$).

**Bew** Sei $\varepsilon>0$. Weil $x\mapsto\frac{1}{x}$ stetig ist: $\exists\, \eta_1>0$
$\forall y$ mit $|y-f'(f^{-1}(x_0))|<\eta_1$: $\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\right|<\varepsilon$.

$\exists\, \eta_2>0$ $\forall y$ mit $|y-f^{-1}(x_0)|<\eta_2$:
$$\left|\frac{f(y)-\overbrace{f(f^{-1}(x_0))}^{=x_0}}{y-f^{-1}(x_0)}-f'(f^{-1}(x_0))\right|<\eta_1$$

Weil $f^{-1}$ stetig in $x_0$ $\Rightarrow$ $\exists\,\delta>0$ $\forall x$ mit $|x-x_0|<\delta$:
$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)|<\eta_2.$$

Sei $x$ so, dass $0<|x-x_0|<\delta$.
$$\Rightarrow |f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)|<\eta_2 \Rightarrow \left|\frac{f(f^{-1}(x))-x_0}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}-f'(f^{-1}(x_0))\right|<\eta_1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}-\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\right|<\varepsilon.$$
Daher
$$(f^{-1})'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$
$\square$

## 2.) Abl. speziellen Funktionen

**Prop** $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $(e^x)' = e^x$

**Bew** $$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{e^{x+h} - e^x}{h}}_{= \frac{e^x e^h - e^x}{h}} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x \qquad \square$$

**Prop** $\forall x > 0: \ (\log x)' = \frac{1}{x}$

**Bew** log ist stetig. Inversenregel $\Rightarrow (\log x)' =$

$$= \frac{1}{(e^x)'(\log x)} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} \qquad \square$$

' an der Stelle $\log x$

**Prop** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. $\forall x > 0: (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

**Bew** $x^\alpha = (e^{\log x})^\alpha = e^{\alpha \log x}$. $(x^\alpha)' \overset{\text{Kettenregel}}{=}$

$$= \underbrace{e^{\alpha \log x}}_{= x^\alpha} \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad \square$$

**Bsp** $$(\underbrace{18^x}_{= e^{x \log 18}})' = e^{x \log 18} \log 18 = 18^x \log 18.$$

$$[\ (18^x)' = x\, 18^{x-1} \quad \text{UNSINN!}\ ]$$

**Bsp** $$(x^{\log x})' = (e^{(\log x)^2})' = \underbrace{e^{(\log x)^2}}_{= x^{\log x}} 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2 x^{\log x - 1} \log x$$

§. 6. 09

<u>Prop</u> $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $(\sin x)' = \cos x$ und
$(\cos x)' = -\sin x$

<u>Bew</u>: $$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} = \cos x \text{ und}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

$$= \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} - \sin x \underbrace{\lim \frac{\sin h}{h}}_{=1} = -\sin x.$$

$\square$

<u>Prop</u> $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

<u>Bew</u> $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} 1/\cos^2 x \\ 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x. \end{cases}$$

$\square$

Bsp. $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ $\quad (f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Für $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-1 \cdot \frac{1}{x^2}\right) =$
$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

Für $x = 0$: $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{|\sin\frac{1}{x}| \leq 1} = 0.$$

$f$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff.bar, aber $f$ ist nicht stetig diff.bar, weil:

[ZWS gilt für die erste Abl. immer, ~~da~~ auch wenn nicht stetig]

suche Folge

Wähle $a_n := \frac{1}{2\pi n} \to 0$

$$f'(a_n) = 2 a_n \underbrace{\sin 2\pi n}_{=0} - \underbrace{\cos 2\pi n}_{=1} = -1 \to -1 \neq 0 = f'(0)$$

# 3) EXTREMWERTE

<u>Lemma</u>: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ und $f$ sei diffbar in $x_0$

(1) Falls $f'(x_0)>0$, dann $\exists\,\delta>0$ sodass $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$

und $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$ und

$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)>f(x_0)$.

[ hat absolut nichts mit Monotonie zu tun ! ]

(2) Falls $f'(x_0)<0$, dann $\exists\,\delta>0$ mit $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$

und $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0)$ und

$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)<f(x_0)$.

<u>Bew</u> Es genügt (1) zu zeigen

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \exists\,\delta>0\ \forall x \text{ mit } 0<|x-x_0|<\delta:$$

$$f'(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Sei $x$ so, dass $x_0<x<x_0+\delta$ $\quad 0<\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}\Rightarrow 0<f(x)-f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0)<f(x)$

Sei $x$ so, dass $x_0-\delta<x<x_0$. $\quad 0<\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}\Rightarrow 0>f(x)-f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0)>f(x)$. $\square$

Dieses Lemma und nächste Prop gelten auch in $\mathbb{Q}$.

Satz danach nicht mehr.

**Prop:** Sei $x_0 \in (a,b)$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0$.
Falls $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$

**Bew:** Indirekt. Ang: $f'(x_0) \neq 0$. oBdA $f'(x_0) > 0$

aus Lemma folgt: $\exists\, \delta > 0: x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ und
$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Also $x_0$ ist kein lokales Extremum. Widerspruch!
Somit ist $f'(x_0) = 0$.

□

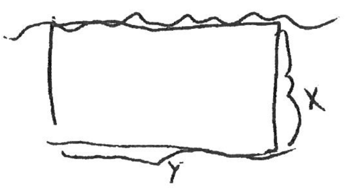
**Satz:** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $f$ sei diffbar auf $(a,b)$.
Dann besitzt $f$ ein Maximum $m_2$ und ein Minimum $m_1$
und es gilt $\{m_1, m_2\} \subseteq \{x : f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}$.

**Bew:** Nach Satz vom Minimum u. Maximum, besitzt $f$ ein Min und ein Max..

Sei $m \in \{m_1, m_2\}$. Falls $m \notin \{a,b\} \Rightarrow m \in (a,b)$
$\Rightarrow f'(m) = 0$

□

**Bsp:** Eine Bauer/in hat ein Grundstück an einem geradlinigen Fluss. Er möchte mit 400 m Zaun eine möglichst große rechteckige Weidefläche umzäunen. Welche Abmessungen hat diese Weidefläche und wie groß ist sie?



$A = x\,y$

$400 = 2x + y \Rightarrow y = 400 - 2x$

$f(x) = x\,y = x\,(400 - 2x) = 400x - 2x^2,$

$f: [0, 200] \to \mathbb{R}$

$0 = f'(x) = 400 - 4x \Rightarrow x = 100$

$\Rightarrow y = 200, \quad A = f(100) = 20\,000$

Kontrolle Randpunkt:

$f(0) = 2 \quad , f(200) = 0$

Also die max Weidefläche erhalten wir bei 100m Breite und 200m Länge, die Fläche ist 20 000 m².

---

Bsp $f: [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^4 - 24x^3 + 190x^2 - 504x + 137$

Maximum von f

$0 = f'(x) = 4x^3 - 72x^2 + 380x - 504$

$\Rightarrow \quad 0 = x^3 - 18x^2 + 95x - 126$

Zahlen probieren: da der Leitkoeffizient 1 ist, müssen die Lösungen ganzzahlig sein und Teiler von 126

Teiler von 126 probieren

Horner Schema

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −18 | 95 | −126 |
| 1 | 1 | −17 | 78 | −48 |
| $\boxed{2}$ | 1 | −16 | 63 | 0 |

$x^2 - 2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −2 |

$p(x) = (x^2 - 17x + 78)(x - 1) - 48$

$x^2 - 16x + 63 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \pm 1 = 7, 9$

Nullstellen 2, 7, 9

Zu berechnen: $f(0) = 137$

$f(2) = -287$

$f(7) = 88$

$f(8) = 73$

Maximum bei 0, Wert 137

[ Zu Extremwert Bsp: KEINE 2. Abl.! nötig ]

Prop Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine diff.bar Funktion, und es gelte:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Diese Funktion besitzt ein Minimum $m$ und es gilt $m \in \{x : f'(x) = 0\}$

Bew $\exists R \; \forall x$ mit $|x| \geq R$ gilt $f(x) > f(0) + 1$

Auf $[-R, R]$ besitzt $f$ ein Minimum $m$ und es gilt $m \in \{x : f'(x) = 0\} \cup \{-R, R\}$

$|x| \geq R \Rightarrow f(x) > \underbrace{f(0)}_{\geq f(m)} + 1 > f(m) \Rightarrow m \in (-R, R)$

und $f'(m) = 0$

□

# 4.) Der Mittelwertsatz

<u>Satz von Rolle</u>

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff.-bar auf $(a,b)$ und $(f(a) = f(b) = 0)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

<u>Bew:</u> nach Satz von Min. u. Max ~~hat~~ $\exists\, m_1, m_2 \in [a,b]$ mit
$$f(m_1) \leq f(x) \leq f(m_2) \quad \forall x \in [a,b].$$

1. Fall (beide am Rand): $\{m_1, m_2\} \subseteq \{a, b\}$
$\Rightarrow f = 0 \Rightarrow f' = 0$
Sei $\xi \in (a, b)$ beliebig $\Rightarrow f'(\xi) = 0$

2. Fall (mind. eines im Inneren): $m_1 \in (a,b)$ oder $m_2 \in (a,b)$.
o.B.d.A. $m_1 \in (a,b) \Rightarrow f'(m_1) = 0$. Setze $\xi := m_1$.
Dann ist $f'(\xi) = 0$. $\square$

## Gleichmäßige Stetigkeit

**Definition.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^s$ nichtleer und sei $f : A \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion. Dann heißt $f$ gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in M$ mit $|x - y| < \delta$ : $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Es hängt $\delta$ also nur von $f$ und $\varepsilon$ ab, während es bei der Stetigkeit noch zusätzlich von $x$ abhängt.

*Beispiel.* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$ ist gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{|a|+1}$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $|x - y| < \delta$. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a|\underbrace{|x - y|}_{<\delta} \leq \underbrace{\frac{|a|}{|a| + 1}}_{\leq 1}\varepsilon < \varepsilon.$$

*Beispiel.* Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$. Dann ist $f$ nicht gleichmäßig stetig.

Setze $\varepsilon_0 := 1$. Sei $\delta > 0$. Wähle $x := \frac{2}{\delta}$ und $y := \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Dann gelten $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|\underbrace{f(x)}_{=\frac{4}{\delta^2}} - \underbrace{f(y)}_{=\frac{4}{\delta^2}+2+\frac{\delta^2}{4}}| = 2 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon_0$.

*Beispiel.* Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ definiert. Dann ist $f$ nicht gleichmäßig stetig.

Setze $\varepsilon_0 := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ und $b_n := \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$. Dann gilt $a_n - b_n \to 0 - 0 = 0$. Sei $\delta > 0$. Es gibt dann ein $n$ mit $|a_n - b_n| < \delta$. Wegen $f(a_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$ und $f(b_n) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n) = -1$ ist $|f(a_n) - f(b_n)| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon_0$.

**Proposition 1.** *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^s$ nichtleer, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}^r$ seien gleichmäßig stetige Funktionen, und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_1(x) - f_1(y)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + 1} \quad \text{und} \quad |f_2(x) - f_2(y)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + 1}$$

für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gelten. Seien $x, y \in A$ so, dass $|x - y| < \delta$. Dann gilt

$$|(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(y)| \leq$$
$$\leq |\alpha_1|\underbrace{|f_1(x) - f_1(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1}} + |\alpha_2|\underbrace{|f_2(x) - f_2(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1}} \leq \underbrace{\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + 1}}_{<1}\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Deshalb ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ gleichmäßig stetig. □

**Proposition 2.** *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^{s_1}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^{s_2}$. Weiters seien $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbb{R}^{s_3}$ gleichmäßig stetig. Dann ist $g \circ f$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\eta > 0$, sodass für $u_1, u_2 \in B$ mit $|u_1 - u_2| < \eta$ die Eigenschaft $|g(u_1) - g(u_2)| < \varepsilon$ gilt. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(v_1) - f(v_2)| < \eta$ für alle $v_1, v_2 \in A$ mit $|v_1 - v_2| < \eta$ gilt. Seien $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$. Dann ist $|f(x) - f(y)| < \eta$. Deshalb ist $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. □

**Proposition 3.** *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle mit $I \cap J \neq \emptyset$. Weiters sei $f : I \cup J \to \mathbb{R}^s$ eine Funktion. Wenn $f\big|_I$ und $f\big|_J$ gleichmäßig stetig sind, dann ist $f$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta_1$ und $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in J$ mit $|x - y| < \delta_2$ gelten. Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Seien $x, y \in I \cup J$ so, dass $|x - y| < \delta$.

1. *Fall:* $x, y \in I$. Dann ist $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
2. *Fall:* $x, y \in J$. Dann ist $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
3. *Fall:* $x \in I$ und $y \in J$, bzw. $x \in J$ und $y \in I$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \in I$, $y \in J$ und $x \leq y$ annehmen. Dann gibt es ein $u \in I \cap J$ mit $x \leq u \leq y$. Es ist $x, u \in I$, $|x - u| \leq |x - y| < \delta$, und daher $|f(x) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso ist $u, y \in I$, $|u - y| \leq |x - y| < \delta$, und deshalb $|f(u) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist $|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(u)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(u) - f(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$. □

Mittelwertsatz (gilt nicht in $\mathbb{Q}$)

<u>Satz</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $(a,b)$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

<u>Bew</u>: Betrachte $g(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $(a,b)$ und
$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\forall x\in(a,b)$. Weiters gelten $g(a)=0$ und $g(b)=0$. Nach dem Satz von Rolle $\exists\,\xi\in(a,b)$ mit $0=g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Daher
$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. $\square$

<u>Def</u>: Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist $I=[a,b]$ oder $I=(a,b)$ oder $I=[a,b)$ oder $I=(a,b]$. Setze $I^\circ:=(a,b)$.

<u>Prop</u>: Sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $I^\circ$, wobei $I$ ein Intervall ist. Falls $f'(x)=0$ $\forall x\in I^\circ$, dann $\exists\, c\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=c$ $\forall x\in I$.

<u>Bew</u>: Sei $x_0\in I^\circ$. Setze $c:=f(x_0)$. Sei $x\in I$.
Nach dem Mittelwertsatz $\exists\,\xi\in I^\circ$: $f(x)-\underbrace{c}_{=f(x_0)}=\underbrace{f'(\xi)}_{=0}(x-x_0)=0$

$\Rightarrow f(x)=c$. $\square$

<u>Gegenbsp in $\mathbb{Q}$</u>: $f:[0,2]\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$

$f(x):=\begin{cases}0, & \text{falls } x<\sqrt{2},\\ 1, & \text{falls } x>\sqrt{2}.\end{cases}$ $\quad f'(x)=0$ $\forall x\in[0,2]\cap\mathbb{Q}$

Aber $f$ ist nicht konstant, weil $f(0)=0\neq1=f(2)$.

$f,g:I\to\mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $I^\circ$, $f'=g'\Rightarrow\exists\,c: f=g+c$
Betrachte $f-g$

**Prop:** Sei $I$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $I^\circ$

(1) Falls $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I^\circ$, dann ist $f$ streng monoton wachsend auf
(2) Falls $f'(x) \geq 0$ $\qquad$ $f$ monoton wachsend
(3) Falls $f'(x) < 0$ $\qquad$ $f$ streng monoton fallend
(4) Falls $f'(x) \leq 0$ $\qquad$ $f$ monoton fallend

**Bew:** Es genügt (4) zu zeigen.

Seien $x < y \in I$. Nach dem Mittelwertsatz $\exists\, \xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\leq 0}\underbrace{(y-x)}_{>0} \leq 0 \implies f(x) \geq f(y)$$

Also ist $f$ monoton fallend.

**Prop:** $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $I$ Intervall, $f$ differenzierbar auf $I^\circ$.

(1) $f$ ist monoton wachsend auf $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^\circ$

(2) $f$ ist streng monoton wachsend auf $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^\circ$ und $\forall x < y \in I \;\exists\, u \in (x,y)$ mit $f'(u) > 0$.

**Bew:** (1) $(\Leftarrow)$ ✓

$(\Rightarrow)$ angenommen $\exists\, x_0 \in I^\circ$ mit $f'(x_0) < 0 \overset{\text{Lemma}}{\implies} \exists\, \delta > 0$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, $x_0 - \delta < x < x_0 : f(x) > f(x_0)$,
$x_0 < x < x_0 + \delta : f(x) < f(x_0)$ Widerspruch zu $f$ monoton wachsend

Also $\forall x \in I^\circ : f'(x) \geq 0$.

(2) $(\Rightarrow)$ $f$ streng monoton wachsend $\implies f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^\circ$

Ang. $\exists\, x_0 < y_0 \in I$ mit $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0, y_0)$

$\implies \exists\, c : f(x) = c \quad \forall x \in [x_0, y_0]$

$c = f(x_0) < f(y_0) = c$ – Widerspruch

Somit $\forall x < y \in I \quad \exists\, u \in (x,y)$ mit $f'(u) > 0$.

$(\Leftarrow)$ $f' \geq 0 \implies f$ monoton wachsend

Ang. $f$ wäre nicht streng monoton wachsend.

$\exists\, x < y$ mit $f(x) = f(y)$ Somit $f|_{[x,y]}$ ist konstant

$\implies f'(u) = 0 \quad \forall u \in (x,y)$. – Widerspruch gilt nicht in $\mathbb{Q}$

**Prop.:** Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. $f$ sei zweimal differenzierbar in $x_0$

(1) Falls $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$, dann hat $f$ in $x_0$ ein (striktes) lokales Maxim

(2) Falls $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$, dann hat $f$ in $x_0$ ein (striktes) lokales Minimum.

**Bew:** ~~$f''(x_0)>0$~~ Es genügt (2) zu zeigen.

(2) $f''(x_0)>0 \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta>0$ mit $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(a,b)$ und

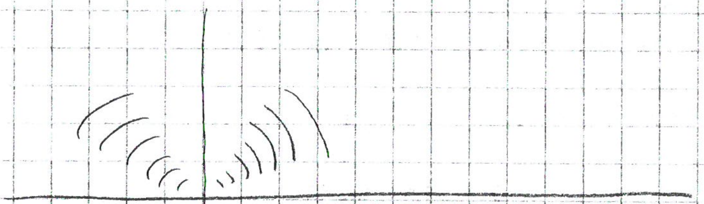
$x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend auf $(x_0-\delta, x_0]$

$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f'(x)>f'(x_0)=0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf $[x_0, x_0+\delta$

Daher ist $x_0$ ein striktes lokales Minimum von $f$. □

**Gegenbsp. in $\mathbb{Q}$.** Definiere $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ durch

$$f(x):=\begin{cases} 0, & \text{falls } x=0,\\ \frac{4}{(n+1)^2}-x^2, & \text{falls } \frac{\sqrt{2}}{n+1}<|x|<\frac{\sqrt{2}}{n} \text{ für } n\in\mathbb{N}, n\geq 3,\\ 3-x^2, & \text{falls } \frac{\sqrt{2}}{3}<|x|<\sqrt{2},\\ 3(n+1)^2-x^2, & \text{falls } n\sqrt{2}<|x|<(n+1)\sqrt{2} \text{ für ein } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$



Es gilt $f'(x)=-2x \quad \forall\, x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

Wenn wir $f'(0)=0$ beweisen, dann gilt $f'(x)=-2x \quad \forall x\in\mathbb{Q}$ und daher $f''(x)=-2 \quad \forall x\in\mathbb{Q}$. Insbesondere $f'(0)=0$ und $f''(0)<0$.

**Lemma:** $f'(0)=0$

**Bew:** $0=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

Sei $\varepsilon>0$. $\exists\, N\geq 3$. Sodass $\frac{\sqrt{2}}{N}<\frac{\varepsilon}{3}$. Setze $\delta=\frac{\sqrt{2}}{N}>0$

Sei $x$ so, dass $|x|<\delta$ und $x\neq 0$. $\exists\, n(\geq N)$: $\frac{\sqrt{2}}{n+1}<|x|<\frac{\sqrt{2}}{n}$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-0\right| = \left|\frac{\frac{4}{(n+1)^2}-x^2}{x}\right| = \left|\frac{\frac{4}{(n+1)^2}}{x}-x\right| \leq \left|\frac{\frac{4}{(n+1)^2}}{x}\right| + |x| =$$

$$2\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{n+1}}_{<|x|<\frac{\varepsilon}{3}}\underbrace{\frac{\frac{\sqrt{2}}{n+1}}{|x|}}_{<1} + \underbrace{|x|}_{<\delta=\frac{\sqrt{2}}{N}<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon. \qquad \square$$

$f$ hat in $0$ kein lokales Maximum, $f$ hat sogar in $0$ ein striktes globales Minimum.

**Lemma:** $f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

**Bew.:** $\exists\, n \geq 3$ mit $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < |x| < \frac{\sqrt{2}}{n}$

$$f(x) = \frac{4}{(n+1)^2} - \underbrace{x^2}_{< \frac{2}{n^2}} > \frac{4}{(n+1)^2} - \frac{2}{n^2} = \frac{4n^2 - 2(n+1)^2}{(n+1)^2 n^2} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2 n^2} \cdot (\underbrace{4n^2 - 2n^2 - 4n - 2}_{= 2n^2 - 4n - 2 \,=\, 2(\underbrace{n^2 - 2n - 1}_{= (n-1)^2 - 2})}) = \underbrace{\frac{2}{(n+1)^2 n^2}}_{>0} \cdot \underbrace{(\underbrace{\underbrace{(n-1)}_{\geq 2 \text{ weil } n \geq 3}{}^2}_{\geq 4} - 2)}_{\geq 2 > 0} > 0.$$

Falls $\frac{\sqrt{2}}{3} < |x| < \sqrt{2}$: $f(x) = 3 - \underbrace{x^2}_{<2} > 1 > 0$

Wenn $n\sqrt{2} < |x| < (n+1)\sqrt{2}$ für ein $n$: $f(x) = 3(n+1)^2 - \underbrace{x^2}_{< (n+1)^2 2} > (n+1)^2 >$

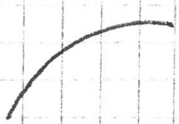
$\square$

**Def.:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion

(1) $f$ heißt konvex, falls $\forall x < y \in M: \forall t \in [0,1]$
$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y)$

(2) strikt konvex $\quad \forall t \in (0,1)$
... $<$ ...

(3) konkav $\quad \forall t \in [0,1]$
... $\geq$ ...



(4) strikt konkav $\quad \forall t \in (0,1)$
... $>$ ...

Merksatz: konve$\overset{x}{\,}$

**Prop:** $I$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $2\times$ differenzierbar auf $\overset{\circ}{I}$

(1) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I} \Rightarrow f$ strikt konvex

(2) $f''(x) \geq 0$ konvex

(3) $f''(x) < 0$ strikt konkav

(4) $f''(x) \leq 0$ konkav

**Bew:** Es genügt (1) zu zeigen:

Seien $x < y \in I$. Betrachte $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f((1-t)x + ty) - ((1-t)f(x) + tf(y))$.

$g$ ist stetig. Für $t \in (0,1)$ gilt:

$\dot{g}(t) = f'((1-t)x + ty)(-x+y) + f(x) - f(y)$

$\ddot{g}(t) = (y-x) f''((1-t)x+ty)(y-x) = \underbrace{(y-x)^2}_{>0} \underbrace{f''((1-t)x+ty)}_{>0} > 0$

$\Rightarrow \dot{g}$ ist streng monoton wachsend

$g(1) = g(0) = 0$ Nach dem MWS $\exists\, \xi \in (0,1)$ mit $\dot{g}(\xi) = 0$

Sei $t \in [0,1]$, $t \leq \xi$, $\dot{g}(t) < \dot{g}(\xi) = 0$ falls $t < \xi$

$\Rightarrow g$ streng monoton fallend auf $[0, \xi] \Rightarrow g(t) < g(0) = 0$

Für $t > \xi$, $\dot{g}(t) > \dot{g}(\xi) = 0 \Rightarrow g$ streng monoton steigend auf $[\xi, 1]$

$\Rightarrow g(t) < g(1) = 0$

Für $t \in (0,1)$ ist $0 > g(t) = f((1-t)x+ty) - ((1-t)f(x) + tf(y))$

Daher ist $f$ strikt konvex. $\square$

ohne Beweis:

(1) $f$ konvex $\iff f'' \geq 0$

(2) $f$ strikt konvex $\iff f'' \geq 0$ und $\forall x < y\ \exists\, u \in (x,y): f''(u) > 0$.

**Def.:** Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in \mathring{I}$. ($I$ Intervall)

(1) $x_0$ heißt Wendepunkt von $f$, falls $\exists\, \delta > 0$ sodass $f|_{[x_0-\delta, x_0]}$ konvex und $f|_{[x_0, x_0+\delta]}$ konkav oder umgekehrt

(2) $x_0$ heißt strikter Wendepunkt von $f$, ... strikt konvex

strikt konkav oder umgekehrt.

**Prop:** Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $f$ $(n+1)$-mal differenzierbar in $x_0$

Es gelte $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0$ und $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$

(1) Falls $n$ ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0)<0 \Rightarrow f$ in $x_0$ striktes lokales Maxi

(2) – " – $f^{(n+1)}(x_0)>0 \Rightarrow f$ in $x_0$ striktes lokales Minim

(3) Falls $n$ gerade ist ~~und~~ $\Rightarrow f$ in $x_0$ einen strikten Wendepunkt

**Bew:** $f^{(n+1)}(x_0)>0 \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \exists\,\delta_0>0: x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f^{(n)}(x)<f^{(n)}(x_0)=0$

$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f^{(n)}(x)>f^{(n)}(x_0)=0$

$\Rightarrow x_0-\delta_0<x<x_0 \Rightarrow f^{(n+1)}(x)>0$

$x_0<x<x_0+\delta_0 \Rightarrow f^{(n+1)}(x)>0$

Induktionsbeweis, ... $\square$

**Prop:** Sei $I$ ein Intervall, $f: I\to\mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $\mathring{I}$

Es gebe ein $C\in\mathbb{R}$ mit $|f'(x)|\leq C$ $\forall x\in\mathring{I}$. Dann ist $f$ Lipschitz-stetig, und daher gleichmäßig stetig.

**Bew:** Sei $x<y\in I$. Nach MWS $\exists\,\xi\in(x,y)$ mit $f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$

Daher $|f(y)-f(x)|=\underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq C}|y-x| \leq C|y-x|$.

Somit ist $f$ gleichmäßig stetig.

**Bsp.:** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{f'(x)}_{=\frac{-\frac{2}{x^3}}{(1+\frac{1}{x^2})^2}}=0$

$\Rightarrow \exists R$, sodass $\forall x$ mit $|x|\geq R: |f'(x)|\leq 1$ (1 frei gewählt)

auf $[-R,R]$. Satz von Minimum und Maximum: $\exists\,C$ mit $|f'(x)|\leq C$ $\forall x$

$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig

Bsp: $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$

auf $[1, +\infty)$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $[1, +\infty)$.

auf $[0,1]$ ist $f$ stetig $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $[0,1]$

$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $[0, +\infty)$.

Satz über die inverse Funktion

d.h. 1. Ableitung auch stetig

Satz: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$ Falls $f'(x_0) \neq 0$, dann gibt es $(a_1, b_1) \subseteq (a,b)$, $(c_1, d_1) \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in (a_1, b_1)$, $f(x_0) \in (c_1, d_1)$

$f: (a_1, b_1) \to (c_1, d_1)$ ist bijektiv. ($f$ ist lokal bei $x_0$ invertierbar).

Weiters ist $f^{-1}: (c_1, d_1) \to (a_1, b_1)$ stetig differenzierbar und es gibt

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \forall x \in (c_1, d_1)$.

Bew: O.B.d.A. $f'(x_0) > 0$. Weil $f'$ stetig ist $\exists\, \delta_0 > 0$

$[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subseteq (a,b)$ mit $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

$\Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$.

Setze $a_1 := x_1 - \delta_0$, $b_1 := x_0 + \delta_0$, $c_1 := f(a_1)$, $d_1 := f(b_1) > f(a_1) = c_1$

$f: (a_1, b_1) \to (c_1, d_1)$ injektiv. Sei $y \in (c_1, d_1)$ $f(a_1) < y < f(b_1)$

$\overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists x \in (a_1, b_1)$ mit $f(x) = y$ Also $f$ surjektiv $\Rightarrow f$ bijektiv.

Somit ist $f^{-1}: (c_1, d_1) \to (a_1, b_1)$ stetig

Sei $x \in (c_1, d_1)$: Inversenregel: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Daher ist $(f^{-1})'$ stetig, also $(f^{-1})'$ stetig differenzierbar. □

16.06.2009

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} &, \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 &, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 1 + 4x \cdot \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$$

Im Fall $x = 0$ ist $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} (1 + \underbrace{\underbrace{2x}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{|\,| \leq 1}}_{\to 0}) = 1.$

$f'(0) = 1 \neq 0$

Ang. $f$ wäre um $0$ lokal invertierbar $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, sodass $f|_{(-\delta, \delta)}$ injektiv

$f$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ stetig $\Rightarrow$ $f$ streng monoton auf $(-\delta, \delta)$

Wegen $f'(0) = 1 > 0$ muss $f$ streng monoton wachsend auf $(-\delta, \delta)$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$

$a_n := \frac{1}{2\pi n} \to 0 \Rightarrow \exists\, n$, sodass $a_n \in (-\delta, \delta) \Rightarrow f'(a_n) \geq 0$

$0 \leq f'(a_n) = 1 + 4 a_n \underbrace{\sin 2\pi n}_{= 0} - 2 \cdot \underbrace{\cos 2\pi n}_{= 1} = -1$ – Widerspruch

Daher ist $f$ nicht lokal invertierbar bei $0$.

## 5.) Inverse Winkelfunktionen

sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, sin stetig

für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\sin' x = \cos x > 0 \Rightarrow$ sin ist streng monoton steigend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, insbesondere injektiv

Sei $y \in [-1, 1] \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists x$ mit $\sin x = y$. Also $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ bijektiv, besitzt also Umkehrfunktion ($\arcsin x$).

cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$, stetig, $\cos' x = -\sin x < 0$ für $x \in (0, \pi)$

$\Rightarrow$ cos streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ $\Rightarrow$ injektiv, $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$

ZWS $\Rightarrow$ surjektiv, also bijektiv ($f^{-1} = \arccos$)

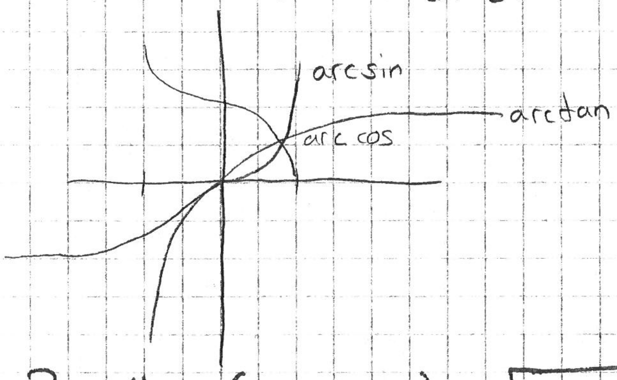
tan : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, stetig, $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0 \Rightarrow$ tan ist streng monoton steigend, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$,

ZWS $\Rightarrow$ tan surjektiv, also bijektiv ($f^{-1} = \arctan$)

**Def.:** (1) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ (ist stetig laut Satz)

(2) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

(3) $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$




**Prop:** (1) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

(2) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

**Bew:** (2) Setze $y = \arccos x \in [0, \pi] \Rightarrow \sin y \geq 0$

$1 = \cos^2 y + \sin^2 y = (\underbrace{\cos(\arccos x)}_{= x})^2 + \sin^2 y = x^2 + \sin^2 y$

$\sqrt{1-x^2} = \sin y = $ (weil $\sin y \geq 0$, sonst $|\sin y|$)

$= \sin(\arccos x)$

**Prop:** (1) arc sin ist stetig, differenzierbar auf $(-1,1)$ und

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) arc cos ist stetig, differenzierbar auf $(-1,1)$ und $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) arc tan ist stetig, differenzierbar (auf $\mathbb{R}$), $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$,

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ ①}, \quad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ ①}.$$

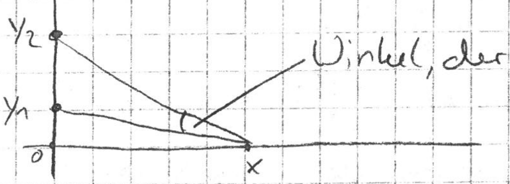
**Bew:** (1) Inversenregel $\Rightarrow \arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arc\,\cancel{\cos}\overset{\sin}{} x)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) $$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $$\arctan' x = \frac{1}{\underbrace{\tan'}_{=1+\tan^2}(\arctan x)} = \frac{1}{1+(\underbrace{\tan(\arctan x)}_{=x})^2} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \square$$

**Bsp:** Seien $0<y_1<y_2$. Gesucht ist $x\geq 0$ so, dass der Winkel unter dem die Strecke von $\begin{pmatrix}0\\y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}$ von Punkt $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ aus gesehen maximal wird.




$$f(x) = \arctan\frac{y_2}{x} - \arctan\frac{y_1}{x}$$

$f: (0,+\infty) \to \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0-0=0$ Nach dem Satz von Min und Max besitzt $f$ ein Maximum $x$ und es muss $f'(x)=0$

$$0 = f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{y_2}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y_2}{x^2}\right)}_{= -\frac{y_2}{x^2+y_2^2}} - \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{y_1}{x}\right)^2}\left(-\frac{y_1}{x^2}\right)}_{\frac{y_1}{x^2+y_1^2}} = ⊛$$

$$⊛ = -\frac{y_2}{x^2+y_2^2} + \frac{y_1}{x^2+y_1^2} = \frac{y_1 x^2 + y_1 y_2^2 - y_2 x^2 - y_1^2 y_2}{(x^2+y_1^2)\cdot(x^2+y_2^2)} =$$

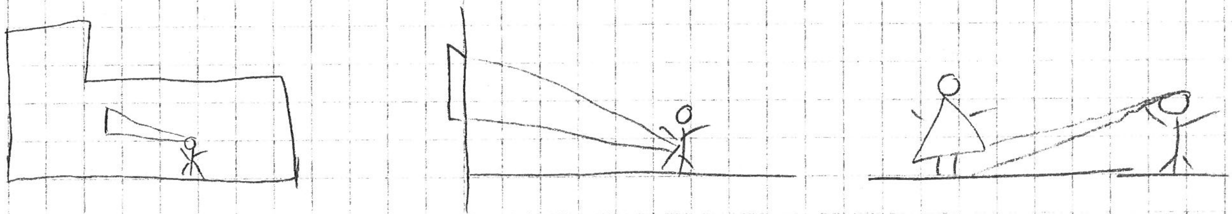
$$= \frac{x^2(y_1-y_2) + y_1y_2(y_2-y_1)}{(x^2+y_1^2)(x^2+y_2^2)} = \frac{y_1-y_2}{(x^2+y_1^2)(x^2+y_2^2)}(x^2-y_1y_2)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y_1y_2}$$

① Folgt aus Eigenschaft voriger Seite

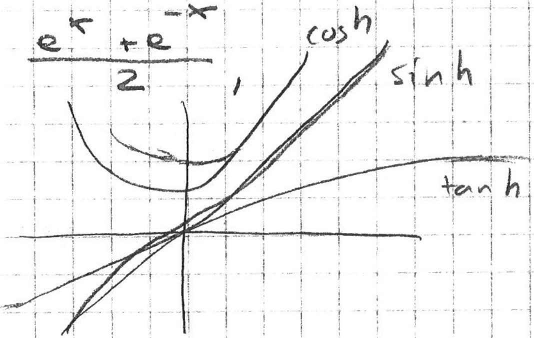
Der Winkel wird bei $x = \sqrt{y_1 y_2}$ maximal, der Winkel ist dann

$\arctan \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} - \arctan \sqrt{\frac{y_1}{y_2}}$



## 6.) Hyperbolische Funktionen

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$




**Def.:** $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

**Prop:** $\cosh x \geq 1$.

**Bew:** $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\cosh x}_{= \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = +\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$

$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; (= \sinh x) = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff e^{2x} = 1$

$\iff 2x = 0 \iff x = 0$ Minimum

Daher $\cosh x \geq \cosh 0 = 1$ $\square$.

**Prop:** $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh' x = \sinh x$, $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

**Bew:** $\sinh' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ $\tanh'$ später. $\square$

$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\sinh x}_{= \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$,

$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\tanh x}_{= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}} = -1$, $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\tanh x}_{= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}} = 1$

$\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\tanh 0 = 0$

Prop: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Bew: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2\underbrace{e^{x-x}}_{=1} - \left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$ $\square$

Prop: (1) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

(2) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(3) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$

Bew: (1) $\sinh(x+y) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{x+y}}_{e^x e^y} - \underbrace{e^{-x-y}}_{e^{-x}e^{-y}}\right)$

$\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}} - e^{-x-y} + e^{x+y} + \cancel{e^{-x+y}} - \cancel{e^{x-y}} - e^{-x-y}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right) = \sinh(x+y)$

(2) Proseminar

(3) $\tanh(x+y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \ldots$ (Nachrechnen selbst.) $\square$

Bew. für $\tanh' x$:

$\tanh' x = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2 x} \\ 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \end{cases}$

Korollar: $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$,

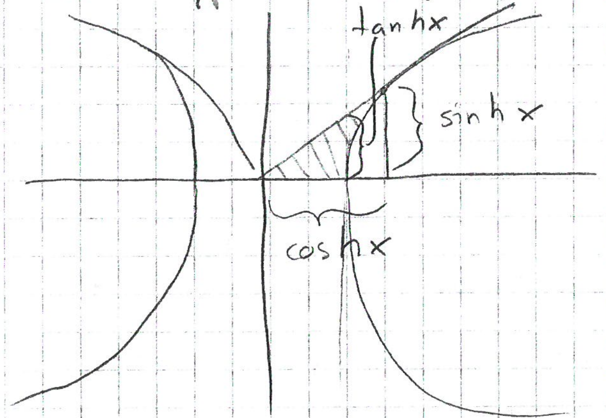
$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$.

$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend, bijektiv (stetige Umkehrfunktion: $\operatorname{arcsinh} x$)

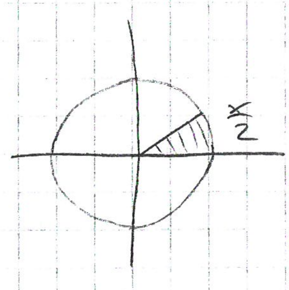
$\cosh: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ —"— (—"—: $\operatorname{arccosh} x$)

$\tanh: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ stetig, streng monoton wachsend, bijektiv ($\operatorname{arctanh} x$)

Einheitshyperbel: $x_1^2 - x_2^2 = 1$




Fläche = $\frac{x}{2}$




22.06.2009

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\sinh x$$

Def: $\operatorname{arcsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\operatorname{arccosh}: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ —"— $\cosh: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$

$\operatorname{arctanh}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ —"— $\tanh: \mathbb{R} \to (-1, 1)$

Diese Funktionen sind stetig, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcsinh} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcsinh} x = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccosh} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \operatorname{arctanh} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{artanh} x = +\infty$

Prop: (1) $\cosh(\operatorname{arcsinh} x) = \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\sinh(\operatorname{arccosh} x) = \sqrt{x^2-1} \quad \forall x \in [1, +\infty)$

Bew: (2) ((1) analog): Setze $y = \operatorname{arccosh} x$, $y \geq 0$

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \sinh y = \sqrt{-1 + \underbrace{\cosh^2 y}_{= x^2}}$, weil $\sinh y \geq 0$

$\sinh(\operatorname{arccosh} x) = \sqrt{x^2 - 1}$ □

Prop: (1) $(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(3) $(\operatorname{ar}\cancel{\text{cdanh}}\, x)' = \frac{1}{x^2-1}$

Bew: Inversenregel: (1) $(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\underbrace{\sinh'}_{=\cosh}(\operatorname{arcsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\underbrace{\cosh'}_{=\sinh}(\operatorname{arccosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

7) Die Differenzialgleichungen $f'=f$ und $f''=-f$

gesucht Funktion $f$ mit $f'(x)=f(x) \quad \forall x$

Üblich: $\dot{x}(t)=x(t)$ (kurz: $\dot{x}=x$)

Satz: Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt eine differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann $\dot{x}(t)=ax(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$, wenn $\exists c \in \mathbb{R}$, sodass $x(t)=ce^{at} \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Bew: $(\Leftarrow)$ $x(t)=ce^{at}$. $\dot{x}(t) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{ce^{at}}_{=x(t)} \cdot a = ax(t)$.

$(\Rightarrow)$ Es gilt: $\dot{x}(t)=ax(t)$

Setze $y(t)=x(t)\cdot e^{-at}$ $\quad \dot{y}(t)=\dot{x}(t)e^{-at}+x(t)e^{-at}(-a)=$

$=e^{-at}\underbrace{(\dot{x}(t)-\underbrace{ax(t)}_{=\dot{x}(t)})}_{=0}=0 \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists c$ mit $\underbrace{y(t)}_{=x(t)e^{-at}}=c \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Somit ist $x(t)=ce^{at}$. $\square$

Bsp: radioaktiver Zerfall. $\dot{x}=-kx \quad k>0 \quad x(t)\ldots$ Menge zum Zeitpunkt $(t)$

$x(t)=ce^{-kt}$, $x_0\ldots$ Anfangsmenge $x_0=x(0)=c$,

also $x(t)=x_0e^{-kt}$

Bsp: Luftdruck: $p(h)\ldots$ Luftdruck in Höhe $h$.

$p'(h)=-ap(h)$, $p(h)=ce^{-ah}$.

Satz: Eine 2-mal differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $\ddot{x}(t)=-x(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x(t)=c_1\cos t + c_2 \sin t \ \forall t \in \mathbb{R}$ gilt.

Bew: $(\Leftarrow)$ $x(t)=c_1\cos t + c_2\sin t \Rightarrow \dot{x}(t)=-c_1\sin t + c_2\cos t \Rightarrow$

$\ddot{x}(t)=-c_1\cos t - c_2\sin t = -x(t)$.

$(\Rightarrow)$ Setze $c_1:=x(0)$ und $c_2:=\dot{x}(0)$. Definiere ~~y(t) = x(t)~~

$y(t):=x(t)-(c_1\cos t + c_2\sin t)$

$y(0)=0$, $\dot{y}(t)=\dot{x}(t)-(-c_1\sin t + c_2\cos t)$, $\dot{y}(0)=0$,

$\ddot{y}(t)=\underbrace{\ddot{x}(t)}_{=-x(t)}-(-c_1\cos t - c_2\sin t)=-y(t)$

Definiere: $u(t) = y(t)^2 + (\dot{y}(t))^2$

$\dot{u}(t) = 2y(t)\,\dot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t)\,\underbrace{(\ddot{y}(t))}_{=-y(t)} = 0 \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}$

$\exists\, c$ mit $u(t) = c \quad \forall t \in \mathbb{R}$. $\quad c = u(0) = \underbrace{y(0)^2}_{=0} + \underbrace{(\dot{y}(0))^2}_{=0} = 0$

$\Rightarrow 0 = u(t) = y(t)^2 + \underbrace{\dot{y}(t)^2}_{\geq 0} \geq y(t)^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Also $0 = y(t) = x(t) - (c_1 \cos t + c_2 \sin t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Daher ist $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$. $\square$.

$\boxed{x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0}$ $\quad$ $(n)$ ... Ableitung

eindimensionale gewöhnlich homogen lineare Differenzialgleichung n-der Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

eindimensional: $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ s-dimensional: $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s$

gewöhnlich: nur Ableitung nach $t$ $\quad$ partiell: $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$

linear: $\dot{x} = \sin t$ wäre linear $\quad$ nicht linear: z.B.: $\dot{x} = x^2$, $\dot{x} = \sin x$

homogen: $\ldots = 0$ $\quad$ inhomogen: $\ldots = \sin t$

erste Ordnung: $\dot{x} = f(x,t)$ $\quad$ zweite Ordnung: $\ddot{x} + 3\dot{x} - 5x = 0$

konstante Koeffizienten: $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, sonst: $\alpha_{n-1}(t), \ldots, \alpha_0(t)$.

Man nennt $p(x) = x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ das charakteristisches Polynom von $x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 \dot{x} + x\,\alpha_0 = 0$

z.B.: $\dot{x} = ax \iff \dot{x} - ax = 0 \quad p(x) = x - a \quad$ Nullstelle: $a$

$\ddot{x} = -x \iff \ddot{x} + x = 0 \quad p(x) = x^2 + 1 \quad$ Nullstellen: $\pm i$

Ab jetzt: $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$

$p(x) = x^2 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0 \quad$ Nullstellen: $-\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0}$

1. Fall: $\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0 < 0$ : Nullstellen: $a \pm bi$, $b > 0$

   Es ist $\alpha_1 = -2a$ und $\alpha_0 = a^2 + b^2$.

2. Fall: $\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0 > 0$ : Nullstellen: $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 \neq a_2$,

   $\alpha_1 = -(a_1 + a_2)$, $\alpha_0 = a_1 \cdot a_2$

3.Fall: $\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0 = 0$ Nullstelle: a ist zweifache Nullstelle

$\alpha_1 = -2a, \quad \alpha_0 = a^2$

Satz: Seien $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$; und sei $p(x) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ das charakteristische Polynom von $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$. Dann gelten:

(1) Falls die Nullstellen von p gleich $a \pm bi$ mit $b > 0$ sind, dann erfüllt eine 2-mal differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann,
$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x(t) = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt \quad \forall t \in \mathbb{R}$ gilt.

(2) Falls $a_1 \neq a_2 \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p sind, dann erfüllt eine 2×differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann
$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = 0$, wenn $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit
$x(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(3) Falls $a \in \mathbb{R}$ zweifache Nullstelle von p ist, dann erfüllt eine 2×differenzierbare Funktion $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$, wenn $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $x(t) = \underbrace{(c_1 t + c_2) e^{at}}_{= c_1 t e^{at} + c_2 e^{at}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Bew: (1) ($\Leftarrow$) $x = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt$

$\dot{x} = (a c_1 + b c_2) e^{at} \cos bt + (-b c_1 + a c_2) e^{at} \sin bt$

$\ddot{x} = ((a^2 - b^2) c_1 + 2ab c_2) e^{at} \cos bt + (-2ab c_1 + (a^2 - b^2) c_2) e^{at} \sin bt$

$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = \Big( \underbrace{c_1 (a^2 - b^2 + \underbrace{\alpha_1}_{=-2a} a + \underbrace{\alpha_0}_{=a^2+b^2})}_{=0} + c_2 \underbrace{(2ab + \underbrace{\alpha_1}_{=-2a} b)}_{=0} \Big) e^{at} \cos bt + ⊛$

$⊛ + \big( c_1 \underbrace{(-2ab + \cancel{\phantom{xx}} - \alpha_1 b)}_{=0} + c_2 \underbrace{(a^2 - b^2 + \alpha_1 a + \alpha_0)}_{=0} \big) e^{at} \sin bt = 0$

($\Rightarrow$) Setze $y(t) := e^{-\frac{a}{b}t} x\left(\frac{t}{b}\right)$

Ersetzt man $t$ durch $bt$ ($t=bs$): $y(bt) = e^{-at} x(t) \Rightarrow x(t) = e^{at} y(bt)$.

$\cancel{\dot{y}(t) = -\frac{a}{b} e^{-\frac{a}{b}t} x\left(\frac{t}{b}\right) \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} e^{-\frac{a}{b}t}}$

$\dot{y}(t) = -\frac{a}{b} e^{-\frac{a}{b}t} x\left(\frac{t}{b}\right) + e^{-\frac{a}{b}t} \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} e^{-\frac{a}{b}t} \left(\dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - a x\left(\frac{t}{b}\right)\right)$

$\ddot{y}(t) = \frac{1}{b}\left(-\frac{a}{b}\right) e^{-\frac{a}{b}t} \left(\dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - a x\left(\frac{t}{b}\right)\right) + \frac{1}{b} e^{-\frac{a}{b}t} \left(\ddot{x}\left(\frac{t}{b}\right) \cdot \frac{1}{b} - a \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}\right) =$

$= \frac{1}{b^2} e^{-\frac{a}{b}t} \left(\underbrace{\ddot{x}\left(\frac{t}{b}\right)}_{= -\underbrace{\alpha_1}_{=2a} \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) - \underbrace{\alpha_0}_{=a^2+b^2} x\left(\frac{t}{b}\right)} - 2a \dot{x}\left(\frac{t}{b}\right) + a^2 x\left(\frac{t}{b}\right)\right) =$

$= \frac{1}{b^2} e^{-\frac{a}{b}t} \left(\underbrace{0 \ddot{x}\left(\frac{t}{b}\right)}_{=0} - b^2 x\left(\frac{t}{b}\right)\right) = -\underbrace{e^{-\frac{a}{b}t} x\left(\frac{t}{b}\right)}_{=y(t)} = -y(t)$

$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt$

(2) ($\Leftarrow$) $x = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t}$

$\dot{x} = c_1 a_1 e^{a_1 t} + c_2 a_2 e^{a_2 t}$

$\ddot{x} = c_1 a_1^2 e^{a_1 t} + c_2 a_2^2 e^{a_2 t} \Rightarrow \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x =$

$c_1 \underbrace{(a_1^2 + \underbrace{\alpha_1}_{=-(a_1+a_2)} a_1 + \underbrace{\alpha_0}_{=a_1 a_2})}_{=0} e^{a_1 t} + c_2 \underbrace{(a_2^2 + \alpha_1 a_2 + \alpha_0)}_{=0} e^{a_2 t} = 0.$

($\Rightarrow$) Setze $y_1(t) := \dot{x}(t) - a_2 x(t)$ und $y_2(t) := \dot{x}(t) - a_1 x(t)$

$y_1 - y_2 = (a_1 - a_2) x \Rightarrow x(t) = \frac{1}{a_1 - a_2} (y_1(t) - y_2(t))$

$\dot{y}_1(t) = \underbrace{\ddot{x}(t)}_{= -\underbrace{\alpha_1}_{=-(a_1+a_2)} \dot{x}(t) - \underbrace{\alpha_0}_{=a_1 \cdot a_2} x(t)} - a_2 \dot{x}(t) = a_1 \dot{x}(t) - a_1 a_2 x(t) = a_1 (\underbrace{\dot{x}(t) - a_2 x(t)}_{=y_1(t)})$

$\Rightarrow \exists d_1 : y_1(t) = d_1 e^{a_1 t}$ Analog:

$\dot{y}_2 = a_2 y_2 \Rightarrow \exists d_2 : y_2(t) = d_2 e^{a_2 t}$

$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\frac{d_1}{a_1 - a_2}}_{=c_1} e^{a_1 t} + \underbrace{\frac{-d_2}{a_1 - a_2}}_{=c_2} e^{a_2 t}$.

(3) ($\Leftarrow$) $x = c_1 t e^{at} + c_2 e^{at} \Rightarrow \dot{x} = a c_1 t e^{at} + (c_1 + a c_2) e^{at} \Rightarrow$

$\ddot{x} = a^2 c_1 t e^{at} + (2ac_1 + a^2 c_2) e^{at}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = \underbrace{c_1(a^2 + \underbrace{\alpha_1}_{=-2a} a + \underbrace{\alpha_0}_{=a^2})}_{=0} t e^{at} + (\underbrace{c_1(2a + \underbrace{\alpha_1}_{=-2a})}_{=0} + c_2 \underbrace{(a^2 + \alpha_1 a + \alpha_0)}_{=0}) e^{at}$$

$= 0$

($\Rightarrow$) Setze $y(t) := e^{-at} x(t)$

$\dot{y} = -a e^{-at} \cdot x + e^{-at} \cdot \dot{x} = e^{-at}(\dot{x} - ax) \Rightarrow$

$$\ddot{y} = -a e^{-at}(\dot{x} - ax) + e^{-at}(\ddot{x} - a\dot{x}) = e^{-at} \underbrace{(\ddot{x} \underbrace{-2a}_{=\alpha_1} \dot{x} + \underbrace{a^2}_{=\alpha_0} x)}_{= \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0} = 0$$

$(\dot{y})^{\cdot} = 0 \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists\, c_1$ mit $\dot{y}(t) = c_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Setze $u(t) := y(t) - c_1 t \Rightarrow \dot{u}(t) = \underbrace{\dot{y}(t)}_{=c_1} - c_1 = 0$

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists\, c_2$ mit $c_2 = u(t) = y(t) - c_1 t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 t + c_2$

Somit ist $x(t) = e^{at} y(t) = (c_1 t + c_2) e^{at} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. $\square$

__Satz__: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt eine differenzierbare Funktion $x : (-1,1) \to \mathbb{R}$ genau dann $(1+t)\dot{x}(t) = \alpha x(t) \ \forall t \in (-1,1)$, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x(t) = c(1+t)^\alpha \quad \forall t \in (-1,1)$ gilt.

__Bew__: $t \in (-1,1) \Rightarrow 1+t > 0 \Rightarrow (1+t)^\beta > 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) $x(t) = c(1+t)^\alpha$, $\dot{x}(t) = \alpha c (1+t)^{\alpha-1}$

$\Rightarrow (1+t)\dot{x} = \alpha \underbrace{c(1+t)^\alpha}_{=x} = \alpha x \qquad \left[(1+t) \cdot \alpha c (1+t)^{\alpha-1}\right]$

($\Rightarrow$) Setze $y(t) := x(t) \cdot (1+t)^{-\alpha} \Rightarrow$

$\dot{y} = \dot{x}(1+t)^{-\alpha} + x(1+t)^{-\alpha-1}(-\alpha) = (1+t)^{-\alpha-1} \underbrace{((1+t)\dot{x} - \alpha x)}_{=0} = 0$

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists\, c \in \mathbb{R} : c = y(t) = x(t) \cdot (1+t)^{-\alpha} \quad \forall t \in (-1,1)$

Somit ist $x(t) = c \cdot (1+t)^\alpha \qquad \forall t \in (-1,1)$ $\square$

Bsp: $\dot{x} = 7x \qquad p(x) = x - 7 = 0 \implies 7$ Nullstelle

$x(t) = c\, e^{7t}$

$x(0) = 5 : \quad 5 = x(0) = c$, also $x(t) = 5 e^{7t}$

---

$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 \qquad p(x) = x^2 - 2x + 2 = 0 \implies x = 1 \pm i$

$x(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$

---

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0 \qquad p(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1, 3$

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$

---

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 7$

$1 = c_1 + c_2 \qquad \dot{x} = c_1 e^t + 3 c_2 e^{3t}$

$7 = c_1 + 3c_2$

$\left\{\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right\} \to \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \implies c_2 = 3, c_1 = -2$

$x(t) = -2e^t + 3e^{3t}$

---

$\ddot{x} - 8\dot{x} + 16x = 0 \qquad p(x) = x^2 - 8x + 16 = 0 \implies x = 4$ (2fache Nullstelle)

$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{4t} = c_1 t e^{4t} + c_2 e^{4t}$

---

$(1+t)\dot{x} = 23x$

$x(t) = (1+t)^{23} \cdot c$

## 8) Die Regel von de l'Hospital

Verallgemeineder Mittelwertsatz (2. Mittelwertsatz)

Prop: Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf $(a,b)$ differenzierbar sind. Weiters gelte $g(b) \neq g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Bew: Setze $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

$h: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $(a,b)$, weil

$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$

$h(a) = 0$ und $h(b) = 0$

Nach dem Satz von Rolle $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$

$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ $\square$

23.06.2009

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{0}{0}" \text{ oder } \underbrace{„\frac{\infty}{\infty}"}_{„\frac{-\infty}{\infty}"} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Hier heißt $\lim_{x\to x_0} h(x)$ existiert, dass $\lim_{x\to x_0} h(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$

Regel von de l'Hospital

Prop: Seien $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ differenzierbare Funktionen
Weiters gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

(1) Falls $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ und $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) Falls $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$, und $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt
$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Bew: Wenn $\lim_{x \to a^+} h(x) = \infty$, dann ist er $+\infty$ oder $-\infty$. Wir nehmen dann o.B.d.A $\lim_{x \to a^+} h(x) = +\infty$ an. Setze $\alpha = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(1) 1. Fall: $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ sodass $\forall x \in (a, a+\delta)$:
$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| < \varepsilon$. Definiere $F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ 0, & x = a, \end{cases}$ und
$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (a,b), \\ 0, & x = a. \end{cases}$

$F, G : [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig

Sei $x$ so, dass $a < x < a+\delta$. Nach dem Verallgemeinerten Mittelwertsatz $\exists\ \xi \in (a,x) \subseteq (a, a+\delta)$ mit $\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Bigg| \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}} - \alpha \Bigg| < \varepsilon \qquad \text{Somit ist } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

2. Fall: $\alpha = +\infty$. Sei $r \in \mathbb{R}$. $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (a, a+\delta)$: $\frac{f'(x)}{g'(x)} > r$
Analog wie zuvor, für $a < x < a+\delta$: $\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}} > r$, also

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty = \alpha$$

(2) 1. Fall: $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 >$, sodass $\forall x \in (a, a+\delta_1)$
$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $x$ so, dass $a < x < a+\delta$
Wähle $\delta_2 > 0$ so, dass $a + \delta_2 < x$, $g(y) > g(x)$, $g(y) > 0$ $\forall y \in (a, a+\delta_2)$
Für $y \in (a, a+\delta_2)$: $\frac{g(y) - g(x)}{g(y)} > 0$.
Nach dem Verallgemeinerten MWS $\exists\ \xi \in (y,x) \subseteq (a, a+\delta_2)$ mit
$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$
$\lim_{y \to a^+} \frac{g(y) - g(x)}{g(y)} = \lim_{y \to a^+} \frac{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}{1} = 1$

$$(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) \frac{g(y)-g(x)}{g(y)} < \underbrace{\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \cdot \frac{g(y)-g(x)}{g(y)}}_{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}} < (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) \cdot \frac{g(y)-g(x)}{g(y)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) \frac{g(y)-g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}}_{\xrightarrow{y \to a^+} \alpha - \frac{\varepsilon}{2} > \alpha - \varepsilon} < \frac{f(y)}{g(y)} < \underbrace{(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{g(y)-g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}}_{\xrightarrow{y \to a^+} \alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \alpha + \varepsilon}$$

$\exists\, \delta > 0$ so, dass $\forall\, y \in (a; a+\delta)$: $\alpha - \varepsilon < \frac{f(y)}{g(y)} < \alpha + \varepsilon$

Daher $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

(x u. y zu 1. Fall vertauscht)

2. Fall: $\alpha = +\infty$: Sei $r \in \mathbb{R}$. $\exists\, \delta_1 > 0\ \forall x \in (a, a+\delta_1)$: $\frac{f'(x)}{g'(x)} > r+1$. Wähle $y \in (a, a+\delta_1)$ und $\delta_2 > 0$ so, dass $a + \delta_2 < y$, $g(x) > 0$, $g(x) > g(y)$ $\forall x \in (a, a+\delta_2)$.

$a < x < a + \delta_2$: $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > r+1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} > (r+1) \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \underbrace{(r+1) \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x \to a^+} r+1 > r}$$

$\exists\, \delta > 0\ (\delta \leq \delta_2)\ \forall x \in (a, a+\delta)$: $\frac{f(x)}{g(x)} > r$

Somit $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty = \alpha$. $\square$

Lemma: (1) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(b-x)$.

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x)$

Bew: Zeige (2), Rest ist analog: Sei $\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$

$\exists\, r\ \forall x > r$: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ O.B.d.A: $r > 0$. Setze $\delta := \frac{1}{r}$.

Sei $x$ so, dass $0 < x < \delta = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{x} > r \Rightarrow \left|f(\frac{1}{x}) - \alpha\right| < \varepsilon$,

also $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \alpha$. $\square$

**Korollar:** (i) $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad (b\in\mathbb{R})$ differenzierbar

(1) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0=\lim\limits_{x\to b^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \exists \Rightarrow \lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'}{g'}$

(2) $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty$, $\quad$ , — || — $\qquad$ — || —

(ii) $f,g:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ differenzierbar

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \exists \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f}{g}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ $\quad$ , — || — $\qquad$ — || —

(iii) $f,g:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \exists \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ $\quad$ , — || — $\qquad$ — || —

**Bew:** (i) $$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(b-x)}{g(b-x)}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{-f'(b-x)}{-g'(b-x)}}_{=\frac{f'(b-x)}{g'(b-x)}}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})}}_{=\frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(iii) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{g(-x)}\overset{(ii)}{=}\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{-f'(-x)}{-g'(-x)}}_{=\frac{f'(-x)}{g'(-x)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ $\square$

**Korollar:** (i) $x_0\in(a,b)$, $f,g:(a,b)\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ differenzierbar

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \exists \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\quad$ , — || — $\qquad$ — || —

(ii) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \exists \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ $\quad$ , — || — $\qquad$ — || —

Bew: (i) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, analog:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Somit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Sonderfall: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$

| $x \to x_0^-$ | $x \to x_0^+$ | |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | ✓ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | ✓ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | ✓ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | ✓ |

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

Bsp: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\log(1+x)} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x \to 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$(a^x)' = (e^{x \log a})' = a^x \log a$ Vorsicht auf Zirkelschlüsse: (z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$)

$\left( \sin' 0 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}_{\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \to 1} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^x}_{e^{x \log x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x} \underset{\text{weil } x \mapsto e^x \text{ stetig}}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}_{= -x} = 0,$$

also $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x} = e^0 = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin x - e^x + 1} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^x + x^2 e^x}{\cos x - e^x} = „\frac{0}{0}" =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x + 4xe^x + x^2e^x}{-\sin x - e^x} = \frac{2}{-1} = -2$$

Definiere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

29.06.2009

<u>Lemma:</u> Für $n \in \mathbb{N}_0$ $\exists$ Polynom $p_n$, sodass für $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

<u>Bew:</u> Induktion: $n=0$: Setze $p_0(x) = 1$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{p_0(x)}{x^{3\cdot 0}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Sei $n > 0$. $f^{(n-1)}(x) = p_{n-1}(x) \cdot x^{-3n+3} e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$f^{(n)}(x) = p_{n-1}'(x) \cdot x^{-3n+3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + (-3n+3)\, p_{n-1}(x) \cdot x^{-3n+2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} +$$

$$\underbrace{+ p_{n-1}(x) \cdot x^{-3n+3} e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-2 \frac{1}{x^3}\right)}_{= -2 p_{n-1}(x)\, x^{-3n}\, e^{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^{3n}} \Big( \underbrace{x^3 \cdot p_{n-1}'(x) + (-3n+3)x^2 p_{n-1}(x) - 2 p_{n-1}(x)}_{=: p_n(x) \quad (\text{Polynom})} \Big)$$

<u>Lemma:</u> $\forall n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} x^n \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ $\quad \left( \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \right)$

<u>Bew:</u> $n=0$: $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$n > 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^n}_{\to 0} \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to 0} = 0$

für $n < 0$: $x^n \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^{-n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^{-n}}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to 0} x^n \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^{-n}}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(= „\frac{\infty}{\infty}"\right) = \lim_{x\to 0} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$-\frac{n}{2} \lim_{x\to 0} x^{n+2} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

(Induktionsanfang in den Fällen $n=0$ und $n>0$ bereits gezeigt)

(Induktion, Induktionsanfang für $n=0$ und $n=1$)

Prop: Diese Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt:

(1) $f$ ist unendlich oft differenzierbar $(C^\infty)$ in vorigem Lemma gezeigt

(2) $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

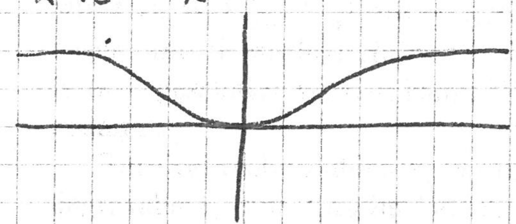
(3) $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad (e^x \ \forall x \in \mathbb{R} > 0)$

Bew: zu zeigen ist nur noch (2)

Induktion nach $n$: $n=0$: $f^{(0)}(0) = 0$

Sei $n > 0$: $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - \overbrace{f^{(n-1)}(0)}^{=0}}{x - 0} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{p_{n-1}(x)}{x^{3n-2}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = p_{n-1}(0) \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n-2}}}_{=0} = 0. \qquad \square$$

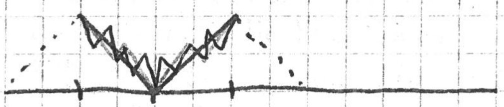


9.) Der Satz von Taylor

Falls $R_n(x, x_0) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, dann $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 0}_{=0} + \lim_{n \to \infty} R_n(x, 0)$$

Es gibt Funktionen, die stetig sind, aber nirgends differenzierbar sind.



Ergänzung zu 6.)

Formeln für die Umkehrfunktionen hyperbolischer Funktionen:

arccosh: Sei $x \in [1, +\infty)$. Setze $y := \operatorname{arccosh} x \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow$

$e^y - 2x + e^{-y} = 0 \Rightarrow e^{2y} - 2x e^y + 1 = 0$

Setze $u := e^y \in [1, +\infty) \qquad u^2 - 2xu + 1 = 0$

$\Rightarrow \underbrace{u}_{\geq 1} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow \qquad e^y = u = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$\Rightarrow y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\underline{\operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$

Prop: Diese Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt:

(1) $f$ ist unendlich oft differenzierbar $(C^\infty)$ in vorigem Lemma gezeigt

(2) $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

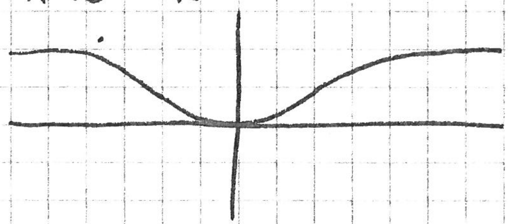
(3) $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ $\quad (e^x \;\; \forall x \in \mathbb{R} > 0)$

<u>Bew:</u> zu zeigen ist nur noch (2)

Induktion nach $n$: $n=0$: $f^{(0)}(0) = 0$

Sei $n>0$: $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - \overbrace{f^{(n-1)}(0)}^{=0}}{x-0} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{p_{n-1}(x)}{x^{3n-2}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = p_{n-1}(0) \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n-2}}}_{=0} = 0. \qquad \square$$

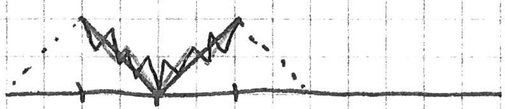


9.) Der Satz von Taylor

Falls $R_n(x,x_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, dann $\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 0}_{=0} + \lim_{n\to\infty} R_n(x,0)$$

<u>Es gibt Funktionen, die stetig sind, aber nirgends differenzierbar sind.</u>



Ergänzung zu 6.)

Formeln für die Umkehrfunktionen hyperbolischer Funktionen:

arccosh: Sei $x \in [1, +\infty)$. Setze $y := \operatorname{arccosh} x \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow$

$e^y - 2x + e^{-y} = 0 \Rightarrow e^{2y} - 2x e^y + 1 = 0$

Setze $u := e^y \in [1, +\infty) \quad u^2 - 2xu + 1 = 0$

$\Rightarrow \underbrace{u}_{\geq 1} = x \pm \sqrt{x^2-1} \Rightarrow \quad e^y = u = x + \sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

<u>$\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$</u>

arctan h : Sei $x \in (-1,1)$. Setze $y = \operatorname{arctan} h\, x$ $(\in \mathbb{R})$

$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Rightarrow x e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Rightarrow$

$e^{2y} \cdot (1-x) = 1+x \Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \underbrace{2y}_{= \operatorname{arctanh} x} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\operatorname{arctan} h\, x = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}}$

## Der Satz von Taylor

Wir wollen eine Funktion $f$ durch ein Polynom $p$ „approximieren". Dabei sollen an der Stelle $x_0$ der Funktionswert, sowie alle Ableitungen bis zur $n$-ten mit denjenigen der Funktion übereinstimmen. Man kann sich überlegen, dass $p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ gelten muss. Den entstehenden Fehler definieren wir als $R_n(x, x_0) := f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$, und daher erhalten wir $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + R_n(x, x_0)$. Es ist jetzt wichtig für dieses sogenannte Restglied $R_n(x, x_0)$ eine Darstellung anzugeben, mit deren Hilfe es abgeschätzt werden kann. Diese Resultate werden der Satz von Taylor genannt.

Für drei reelle Zahlen $x_1$, $x_2$ und $y$ sagen wir, dass $y$ zwischen $x_1$ und $x_2$ liegt, falls $x_1 < y < x_2$ im Fall $x_1 < x_2$, $x_2 < y < x - 1$ im Fall $x_2 < x_1$ und $y = x_1 = x_2$ im Fall $x_1 = x_2$ gilt.

**Proposition 1.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es für jedes $x \in (a, b)$ ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$, sodass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

*gilt (also $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$).*

*Beweis.* Für $x = x_0$ ist die behauptete Formel offensichtlich richtig. Deshalb nehmen wir im Folgenden $x \neq x_0$ an. Fixiere $x \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$. Definiere für $y \in (a, b)$ die Funktionen $g$ und $h$ durch $g(y) := R_n(x, y) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x - y)^j$ und $h(y) := (x - y)^{n+1}$. Die Funktionen $g$ und $h$ sind stetig. Es gelten $g(x_0) = R_n(x, x_0)$ und $g(x) = 0$. Weiters ist

$$g'(y) = -\frac{f'(y)}{0!} - \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x - y)^j + \underbrace{\frac{f^{(j)}(y)}{j!} j (x - y)^{j-1}(-1)}_{= -\frac{f^{(j)}(y)}{(j-1)!}(x-y)^{j-1}} \right) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x - y)^j - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x - y)^n + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{(j-1)!}(x - y)^{j-1}}_{= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x-y)^j} =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x - y)^n.$$

Außerdem gelten $h(x_0) = (x - x_0)^{n+1} \neq 0$, $h(x) = 0$ und $h'(y) = (n+1)(x-y)^n(-1) = -(n+1)(x-y)^n \neq 0$ für alle $y \neq x$. Nach dem Verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ mit $\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$. Es ist

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \frac{0 - R_n(x,x_0)}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

und

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

Daraus erhalten wir $R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. □

Eine andere Darstellung des restgliedes erhält man mit Integralen. Wir formulieren und beweisen dieses Resultat der Vollständigkeit halber an dieser Stelle, obwohl Integrale eigentlich erst später besprochen werden.

**Proposition 2.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$, sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in (a,b)$. Für jedes $x \in (a,b)$ gilt dann, dass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

*(also $R_n(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$).*

*Beweis.* Wir beweisen dieses Resultat durch Induktion nach $n$. Im Fall $n = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, dass

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \dot f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\dot f(t)}{0!}(x-t)^0\,dt\,,$$

womit die gewünschte Formel in diesem Fall gezeigt ist.

Jetzt sei $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt\,.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\underbrace{(x-t)^{n-1}}_{\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right)^{\cdot}}\,dt = -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt =$$

$$= 0 - \left(-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt\,.$$

Somit ist $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$. □