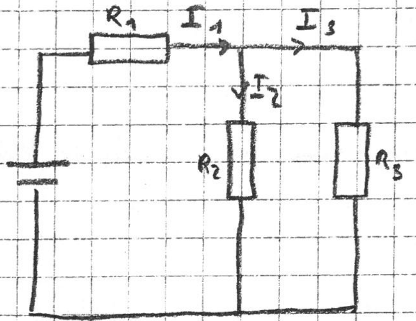
Einf. in. die Lineare Algebra & Geometrie

02.05.2012
(1. VO)

I. Lineare Gleichungssysteme

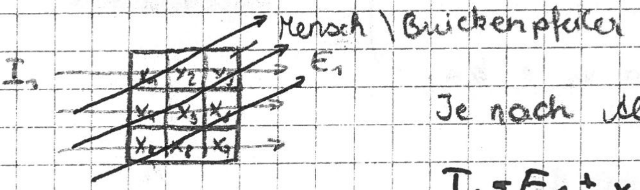
Verwendung:

- Stromkreis



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$U = I_1 R_1 + I_2 R_2$$
$$U = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

- Computertomographie bzw. Werkstoffprüfung



Je nach Absorbtion weiß man was es ist

$$I_1 = E_1 + x_1 + x_2 + x_3 \quad \dots$$

Bsp

$$x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 = -3$$

1. Methode: $x_2 = x_1 - 2$

in 2. Glg. einsetzen $x_1 - \underbrace{2(x_1 - 2)}_{-2x_1 + 4} = -3$

$\Leftrightarrow \quad -x_1 = -7$
$x_1 = 7$

$\Rightarrow \quad x_2 = 5$

$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$! IMMER SO !

2. Methode $\quad x_1 - x_2 = 2$

2Glg − 1Glg $\quad -x_2 = -5$
$\Leftrightarrow \quad x_2 = 5$

$x_1 - 5 = 2$
$\Leftrightarrow \quad x_1 = 7$

$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) Das Gauß-Verfahren

obiges Bgs wird in Matrixform beschrieben

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(\Leftrightarrow)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow x_2 = 5 \quad x_1 = 7$$

$$x = \binom{7}{5}$$

<u>Voraussetzungen:</u> $\underset{\neq 0}{a}x = b \Leftrightarrow \mid x = \frac{b}{a}$

Man braucht, dass $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m,n}, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_n \in$ Körper $(K, +, \cdot)$

allg. Gl.-System

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_2 = b_m, \end{array}\right\} \text{m Gl. mit n Unbekannten}$$

$\Rightarrow K$ meistens $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, manchmal $\mathbb{Q}$

Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Wie darf man das umformen?

- 2 Zeilen vertauschen
  (eher nicht 2 Spalten vertauschen) wenn nur wenn man x dazuschreibt
- lasse Zeile j gleich und addiere zu k $(\neq j)$ der Zeile ein Vielfaches der j-Zeile

Äquivalenzumformungen, weil: $\left.\begin{array}{l} a_{j,1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j \\ (a_{k,1} + c \cdot a_{j,1})x_1 + \dots + (a_{k,n} + c a_{j,n})x_n = b_k + c b_j \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \underbrace{(a_{k,1} + c a_{j,1} - c \cdot a_{j,1})}_{= a_{k,1}} x_1 + \dots + \underbrace{(a_{kn} + c a_{jn} - c a_{jn})}_{= a_{kn}} x_n = \underbrace{b_k + c b_j - c b_j}_{= b_k} \end{array}$$

- Man darf Gl. mit Zahl $\neq 0$ multiplizieren

z.B. $\quad 3 \quad 9 \mid 15 \quad \longrightarrow \quad 1 \quad 3 \mid 5$

- Man darf Zeilen der Form $\quad 0 \quad 0 \dots 0 \mid 0 \quad$ streichen

---

Kommt man auf Zeile der Form $\quad 0 \dots 0 \mid b \quad \neq 0$
dann besitzt das Gl-System keine Lsg. (also $L = \emptyset$)

Bsp

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow \; x_3 = 3 \;\longrightarrow\; x_2 - 3 = -1 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 2 \;\longrightarrow\; x_1 + 4 - 6 = 3 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 5$

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bei letzten Gleichungssystem:
[wieder raufrechnen]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bsp

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & 10 \\ 3 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -16 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

zunächst „freie Variablen" 0 setzen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ x_1 = 3 \end{array}, \text{ also } x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kochrezept:

Jetzt schreibt man auf die rechte Seite 0 (homogenes System) und setzt für die „freien Variablen" der Reihe nach $(1,0,0,\dots,0), (0,1,0\dots0), \dots, (0,\dots,0,1)$ erhält Lösungen $v_1, v_2, \dots, v_k$. Die allg. Lösung ist dann

$$\underbrace{x_s}_{\text{spezielle Lsg}} + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \quad , t_1 - t_k \in K$$

Bei uns:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad x_3 = 1 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad x_2 = 1 \quad x_1 = 2$$

$$x = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Lösung: $(x =) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

formal: $\underline{L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}}$

Bsp.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 5,$$
$$4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 9,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \emptyset$$

Bsp.

$$3x_1 - 4x_2 = 1$$
$$4x_1 - 5x_2 = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 12 & -15 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Verfahren kann man Gl-Systeme simultan lösen

Bsp.

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -7 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. Gl.: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Gl. $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bsp $x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$ | $x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$
$2x_1 - 4x_2 - x_3 = 7$ | $2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4$

03. Mai. 2012
(2. VO)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 7 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$
$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

zuerst $x_2 = 0$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$ 1. Gl. $x_s = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2. Gl. $x_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $x_2 = 1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Gl. $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2. Gl. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Matrizen

$n, m \in \mathbb{N}$, Körper $(K, +, \cdot)$. Weiters sei: $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots a_{2,n}, \dots$
$a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,n} \in K$. Dann heißt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$ eine $m \times n$ - Matrix über K

$A = (a_{j,k})_{j=1,\ k=1}^{m\quad\ n} = (a_{j,k})$

Die j-te Spalte von A ist $A_j = a_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \in K^m$ Spaltenvektor

Die jte Zeile von A ist $A^j = a^j = (a_{j,1} \dots a_{j,n})$ $(\in K^n)$ Zeilenvektor

$m \times n$ - Matrix hat m-Zeilen und n-Spalten

Def.: Falls $A = (a_{j,k})$ eine $m \times n$ - Matrix ist, dann nennt man

$A^t = (a_{k,j})$ die Transponierte von A

(${}^tA$, t so schreiben, dass es sich von $+$ unterscheidet)

$\Rightarrow A^t$ ist eine $n \times m$ - Matrix

, Zeilen von A^t sind die Spalten von A, Spalten von A^t sind die Zeilen von A

Proposition:
$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{j,k}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
* & * & \cdots & * & \times \\
* & * & \cdots & * & \times \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & \cdots & * & \times \\
\hline
\times & \times & \cdots & \times & 0
\end{array}$$

Beweis:
$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} = (a_{1,1} + \dots a_{1,n}) + (a_{2,1} + \dots + a_{2,m}) + \dots + (a_{m,1} + \dots + a_{m,n}$$
$$= (a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} + \dots + a_{m,1}) + \dots + (a_{1,n} + a_{2,n} + \dots + a_{m,n}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{jk}$$

$\square$

A: $n \times m$ - Matrix über K, $c \in K$; Dann ist

$c \cdot A = (c \cdot a_{j,k})$

A, B $n \times m$ - Matrizen $A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})$

Rechenregeln:

$(A+B)+C = A+(B+C)$, assoziativ
$A+B = B+A$ kommutativ
$0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $0 + A = A$ Nullelement
$(-A) + A = 0$ Inverses

bezügl. $+$ = abel'sche Gruppe

$c_1 \cdot (c_2 \cdot A) = (c_1 \cdot c_2) \cdot A$

$(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 \cdot A + c_2 \cdot A$ distributiv

$c \cdot (A+B) = c \cdot A + c \cdot B$ distributiv

(Zahl 0)

$1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = 0$, $(-1) \cdot A = -A$

Beweis für $c(A+B) = c\cdot A + cB$

$$(c(A+B))_{j,k} = c(a_{j,k} + b_{j,k}) = \underbrace{c\cdot a_{j,k}}_{(c\cdot A)_{j,k}} + \underbrace{c\cdot b_{j,k}}_{(cB)_{j,k}} =$$

$$= (c\cdot A + c\cdot B)_{j,k}$$

Def.: Sei $A = (a_{j,k})_{j=1,\ k=1}^{m\ \ \ \ r}$ eine $m\times r$ Matrix über K, $B = (b_{j,k})_{j=1,\ k=1}^{r\ \ \ \ n}$ eine $r\times n$-Matrix über K. Dann heißt

$$A\cdot B = \sum_{t=1}^{r} (a_{j,t} + b_{t,k})_{j=1\ \ k=1}^{m\ \ \ \ n}$$ das Produkt von A und B

$\Rightarrow A\cdot B$ ist eine $m\times n$-Matrix

Eigenschaften:

$$A\cdot(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)\cdot C = AC + BC$$
$$(c\cdot A)\cdot B = A\cdot(c\cdot B) = c\cdot(A\cdot B)$$

Nullmatrix $0\cdot A = 0$ (kann andere Dimension haben als erste 0)

Beweis für $\underbrace{\underbrace{(A+B)}_{m\times r}\cdot \underbrace{C}_{r\times n}}_{m\times n} = \underbrace{\underbrace{A\cdot C}_{m\times n} + \underbrace{B\cdot C}_{m\times n}}_{m\times n}$ (A, B $m\times r$-Matrix, C: $r\times n$-Matrix)

$$((A+B)\cdot C)_{j,k} = \sum_{t=1}^{r} \underbrace{(A+B)_{j,t}}_{= a_{j,t} + b_{j,t}} c_{t,k} = \sum_{t=1}^{r} (a_{j,t}\cdot c_{t,k} + b_{j,t}\cdot c_{t,k})$$

$$= \underbrace{\sum_{t=1}^{n} a_{j,t}\cdot c_{t,k}}_{(AC)_{j,k}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{r} b_{j,t}\cdot c_{t,k}}_{(BC)_{j,k}} = (AC + BC)_{j,k}$$

$\square$

$\Rightarrow$ Im Allgemeinen ist $AB \neq B\cdot A$

Proposition: Es seien A eine $m \times r_1$ - Matrix, und B eine $r_1 \times r_2$ - Matrix und C eine $r_2 \times n$ Matrix über K

Dann gilt: $A(BC) = (AB)C$

Beweis:

$$\underbrace{A}_{m\times r_1}\underbrace{(BC)}_{r_1\times n} \quad m\times n\text{- Matrix}, \quad \underbrace{(AB)}_{m\times r_2}\underbrace{C}_{r_2\times n} \quad m\times n\text{- Matrix}$$

Dimensionen stimmen ✓

Seien $j \in \{1,2,\dots,m\}$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$ beliebig

$$(A(BC))_{j,k} = \sum_{s=1}^{r_1} a_{j,s} \cdot \underbrace{(BC)_{s,k}}_{=\sum_{t=1}^{r_2} b_{s,t} \cdot c_{t,k}} = \sum_{s=1}^{r_1}\sum_{t=1}^{r_2} a_{j,s} \cdot b_{s,t} \cdot c_{t,k}$$

$$= \underbrace{\sum_{t=1}^{r_2}\sum_{s=1}^{r_1} a_{j,s} \cdot b_{s,t} \cdot c_{t,k}}_{=\underbrace{\left(\sum_{s=1}^{r_1} a_{j,s}\cdot b_{s,t}\right)}_{(AB)_{j,t}} \cdot c_{t,k}} = \sum_{t=1}^{r_2} (AB)_{j,t} \cdot c_{t,k} = ((AB)\cdot C)_{j,k}$$

$\Rightarrow$ Somit ist $A(BC) = (AB)\cdot C$ $\square$

Im allgemeinen ist $(AB)^t \neq A^t \cdot B^t$

Proposition: $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Beweis: $\underbrace{(\underbrace{A}_{m\times r}\underbrace{B}_{r\times n})}_{m\times n}^t \dots n\times m$ Matrix, $\underbrace{B^t}_{n\times r}\underbrace{A^t}_{r\times m} \dots n\times m$ - Matrix

Seien $j \in \{1,2,\dots,n\}$, $k \in \{1,2,\dots,m\}$ beliebig

$$((AB)^t)_{j,k} = (AB)_{k,j} = \sum_{t=1}^{r} \underbrace{a_{k,t}}_{(A^t)_{t,k}} \underbrace{b_{t,j}}_{(B^t)_{j,t}} = \sum_{t=1}^{r} (B^t)_{j,t}\,(A^t)_{t,k} = (B^t A^t)_{j,k}$$

$\square$

Für komplexe Matrizen (über $\mathbb{C}$) definiert man $A^* = \overline{A^t}$ (= konjugiert komplex)

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1+i & 2+3i \\ 4 & 3-2i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & 4 \\ 2-3i & 3+2i \end{pmatrix}$

Wegen obiger Formel und $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ gilt

$$(AB)^* = \overline{(AB)^t} = \overline{B^t \cdot A^t} = \overline{B^t} \cdot \overline{A^t} = B^* \cdot A^*$$

daher $(AB)^* = B^* \cdot A^*$

SPEZIALFALL: $n \times n$ - Matrizen

→ $\text{id.} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ (I, id_n, I_n)

$$\text{id} \cdot A = A \cdot \text{id} = A$$

[Mathematika

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \{\{1,3,5\},\{1,8,6\}\}$

Matrixprodukt ma, mb ma . mb

MatrixForm [ma . mb]]

→ Inverse: A besitzt eine Inverse falls $\exists A^{-1}$, s.d.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \text{id}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat keine Inverse, weil $A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Wir werden später zeigen, dass: A ist invertierbar

$\Longleftrightarrow \exists B$ mit $AB = \text{id}$

$\Longleftrightarrow \exists B$ mit $B \cdot A = \text{id}$

Ubng.: A ist invertierbar $AB = \text{id} \Rightarrow B = A^{-1}$

(analog $B \cdot A = \text{id} \Rightarrow B = A^{-1}$)

Beweis: $AB = \text{id} \quad | A^{-1} \cdot \quad : \quad A^{-1} = A^{-1}(AB) = \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{\text{id}} B = B$

$\square$

Inverse berechnen: Gauß-Verfahren

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

kann auch statt 1 Fünfer haben $\Rightarrow$ r. S. durch 5 dividieren

07. Mai 2012
(3. VO)

A, $n \times n$ Matrix

Setze $A^0 := id$, für $k \in \mathbb{N}$ $A^k := A^{k-1} \cdot A$ $\quad (k \in \mathbb{N}_0)$

Falls A invertierbar, $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$: $A^k := (A^{-1})^{-k}$

Rechenregeln: $A^{k+m} = A^k \cdot A^m$

$(A^k)^m = A^{k \cdot m}$

Im Allg ist $(AB)^k \neq A^k \cdot B^k$ (gilt z.B. falls $AB = BA$)

für A, B invertierbar ist AB invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Warum? $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{BB^{-1}}_{id}A^{-1} = A \cdot A^{-1} = id$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\square$

$M_{m,n}(K)$ ... Menge aller $m \times n$ Matrizen über K

$M_n(K) := M_{n,n}(K)$

Matrizengleichungen: $AX = B$ oder $XA = B$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \underbrace{X}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 3 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -7 & -6 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -4 & 8 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{6} & \cancel{-3} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad X = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$X \cdot A = B$ $\quad \frac{A}{B}$ Spalten- statt Zeilenoperation

$A^t X^t = B^t$

Bsp $\quad X\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & -3\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{matrix}\right| \begin{matrix}-2 & 1\\ 6 & -3\end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{matrix}\right| \begin{matrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} \qquad \underset{\text{freie Var}}{x_2 = 0} : \; 1 \,|\, -2 \quad 1$$

homogen $\quad 1 \quad \underset{x_2=1}{-2} \;|\; 0 \quad \rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \; X^t = \left(\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$

$$X = \begin{pmatrix}-2+t_1 & t_1\\ 1+t_2 & t_2\end{pmatrix}$$

Komplexe Zahlen ($\mathbb{C}$): $a+bi \quad (i^2=-1)$

2. Darstellung: Vektoren im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1a_2 - b_1b_2\\ a_1b_2 + a_2b_1\end{pmatrix}$

3. Darstellung: Matrizen $(\in M_2(\mathbb{R}))$: $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

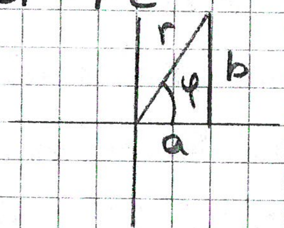
$$\begin{pmatrix}a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & -b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1a_2 - b_1b_2 & -a_2b_1 - a_1b_2\\ a_2b_1 + a_1b_2 & a_1a_2 - b_1b_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1a_2 - b_1b_2\\ a_2b_1 + a_1b_2\end{pmatrix}$$

4. Darstellung (Polardarstellung): $a+bi = re^{i\varphi}$

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$



Differenzengleichung $\qquad$ Populationsmodell (radioaktiver Zerfall)

Folge $(x_0, x_1, x_2, \dots)$

Bevölkerungszahl zu Zeit 0 $\qquad$ allg. $x_n \dots$ Bevölkerungszahl zu Zeit n

$x_n = a\, x_{n-1}$ für $x \geq 1$, $x_0 \dots$ gegeben

$(x_0, a x_0, a^2 x_0 \dots)$

formaler Beweis mit Induktion

$n=0 \quad a^0 \cdot x_0 = x_0$ ✓ $\qquad$ Sei $n \geq 1$: $x_n = a \underbrace{x_{n-1}}_{a^{n-1} \cdot x_0} = a^n x_0 \quad \square$

Fibonacci - Folge: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ für $n \geq 2$ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

(ital. Leonardo da Pisa ~1200)

Trick: $X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_n + x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$

$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X_{n-1}$ so stimmts?

allg. $x_0, x_1, \dots x_{k-1}$ gegeben

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}$$

$$X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \\ a_1 x_{n+k-2}, a_2 x_{n+k-3} + \dots + a_k x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & & & a_k \end{pmatrix} X_{n-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \end{pmatrix}$$

08. Mai 2012 (4. VO)

<u>Proposition:</u> $X_n = A^n X_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

<u>Beweis:</u> Induktion: $n = 0$ $A^0 X_0 = X_0$ ✓

Sei $n \geq 1$ $X_n = A \cdot \underbrace{X_{n-1}}_{= A^{n-1} X_0} = A^n \cdot X_0$ $\square$

Von der Lösung X_n interessiert uns nur die erste Komponente

Rang einer Matrix: A: Umformen wie bei Gauß

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & * & * & \dots & * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & * & * \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} r \text{ Zeilen} \qquad * \neq 0$$

$\operatorname{rg} A = r$ (Rang von A)

3) Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$ Koeffizientenmatrix

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_n \end{pmatrix}$$ erweiterte Koeffizientenmatrix

In Matrixform ist unser Gleichungssystem $Ax = b$

Man nennt das Gleichungssystem homogen, falls $b = 0$ ist.

Sonst inhomogen

Angenommen: x_s ist eine Lösung von $Ax = b$ (d.h.: $A \cdot x_s = b$)

(x_s.. spez. Lösung)

Sei x Lösung: $A \cdot x = b = A \cdot x_s \Rightarrow \overset{\text{homogenes System}}{0} = Ax - Ax_s =$

$= A \cdot (x - x_s) \Rightarrow x - x_s$ Lsg v. homogenen System,

also $x = x_s + \underbrace{(x - x_s)}_{\text{Lsg vom homogenen System}}$

Sei $x = x_s + \underbrace{x_h}_{\text{Lsg. v. hom. S.}} \Rightarrow Ax = A(x_s + x_h) = \underbrace{Ax_s}_{=b} + \underbrace{Ax_h}_{=0} = b$

Satz: Sei A eine $m \times n$ Matrix über K, $b \in K^m$

(1) Das Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ (= erweiterte Matrix)

(2) Ist x_s eine Lsg von $Ax = b$, dann ist x genau dann eine Lsg, wenn $x = x_s + x_h$ für eine Lsg x_h des homogenen Systems ist [BW: oben]

?

(3) Die Dimension des Lösungsraums des homogenen Systems ist: $n - \text{rg}\, A$ $\qquad$ n .. Anzahl d. Variablen

zu (1): Gauß

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
* & * & & * & & * & * \\
0 & * & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & * & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & * & * & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b^* \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} b^* = 0 \\ \\ b^* \neq 0 \end{array}$$

→ Lösungen vom homogenen System: Welche Eigenschaften?

x, y sind Lsg vom homogenen System ($Ax = 0$, $Ay = 0$)

$A(x+y) = 0$, also $x+y$ ist Lösung

$A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax = 0$, also $\lambda \cdot x$ ist Lösung

Das homogene System besitzt immer eine Lösung (nämlich 0), weil $A \cdot 0 = 0$

II. Vektorräume und lineare Abbildungen

1) Vektorräume

Def.: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und $V \neq \emptyset$

Dann heißt V ein Vektorraum über K falls:

$\forall v_1, v_2 \in V \quad \exists!\ v_1 + v_2 \in V$

$\forall v \in V \quad \forall \lambda \in K \quad \exists!\ \lambda v \in V$

echenregeln:

ddition
$$\begin{cases} \forall v_1, v_2, v_3 \in V \text{ gilt: } (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3), \\ \forall v_1, v_2 \in V \text{ gilt: } v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \\ \exists 0 \in V \quad \forall v \in V: \quad 0 + v = v \qquad (0 \dots \text{Nullvektor}) \\ \forall v \in V \quad \exists -v \in V \text{ mit } (-v) + v = 0 \qquad (v - w := v + (-w)) \end{cases}$$

ultiplikation
$$\begin{cases} \forall v \in V, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K: \quad \lambda_1 (\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot v \\ \forall v_1, v_2 \in V \quad \forall \lambda \in K: \quad \lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \\ \forall v \in V \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K: \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 v + \lambda_2 \cdot v \\ \forall v \in V: \quad 1 \cdot v = v \end{cases}$$

Bemerkung: • Der Nullvektor ist eindeutig bestimmt

$$0' = 0' + 0 = 0$$

• Für jedes $v \in V$ ist $-v$ eindeutig bestimmt, weil

$$v' = v' + \underbrace{0}_{= v + (-v)} = \underbrace{v' + v}_{= 0} + (-v) = -v$$

• $\forall v \in V$ ist $0 \cdot v = 0$ Zahl 0 (steht rechts)

$$0 \cdot v = 0 \cdot v + \underbrace{0}_{= 0v - 0v} = \underbrace{0v + 0v}_{(0+0)v = 0v} - 0v = 0v - 0v = 0$$

• $\forall \lambda \in K$ ist $\lambda 0 = 0$, weil Vektor bei beiden

$$\lambda 0 = \lambda 0 + \underbrace{0}_{= \lambda 0 - \lambda 0} = \underbrace{\lambda 0 + \lambda 0}_{\lambda(0+0) = \lambda 0} - \lambda 0 = \lambda 0 - \lambda 0 = 0$$

• $\forall \lambda \in K \ \forall v \in V$ ist $(-\lambda) v = -(\lambda v)$, weil

$$(-\lambda) \cdot v = (-\lambda) \cdot v + \underbrace{0}_{= \lambda v - (\lambda v)} = \underbrace{(-\lambda) v + \lambda v}_{\underbrace{(-\lambda + \lambda) \cdot v}_{= 0v}} - (\lambda v) = 0v - (\lambda v) = -(\lambda v)$$

• Insbesondere ist $(-1) v = -v$

Bemerkung: Gibt es auf V auch zusätzlich eine Multiplikation ($\forall v_1, v_2 \in V \ \exists! \ v_1 \cdot v_2 \in V$), die gewisse Eigenschaften erfüllt, dann nennt man das eine **Algebra**,

z.B.: $M_n(\mathbb{R})$ sind eine (nicht kommutative) Algebra über $\mathbb{R}$

V ist ein Vektorraum über K, L ist ein Teilkörper von K $\Rightarrow$ V ist Vektorraum über L: z.B.: $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, über $\mathbb{Q}$

$\mathbb{C}^7$ über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$, über $\mathbb{Q}$

$\underbrace{\mathbb{C}}_{= \mathbb{C}^1}$ über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$, über $\mathbb{Q}$

• Es ist stets $\underbrace{K}_{= K^1}$ ein Vektorraum über K

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K^n := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \in K \right\}$ ein Vektorraum über K

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix} ; \; \mu \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \lambda_1 \\ \vdots \\ \mu \lambda_n \end{pmatrix} \right]$$

V Vektorraum über K (interessant dabei auch stets der Fall $V = K$)

Falls $M \neq \emptyset$, dann $\mathcal{F}(M, V) := \{ f : M \to V \}$ ist ein Vektorraum über K

$\big((f+g)(x) = f(x) + g(x), \; (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \big)$

z.B.: $\mathcal{F}([0,2], \mathbb{R})$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \{ (v_1, v_2, \ldots) : v_n \in V \;\; \forall n \}$ ist auch ein Vektorraum über K
$\left(\overset{\shortparallel}{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, V) \right)$

auch $\{ (\ldots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \ldots) : v_n \in V \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$ ist Vektorraum über K
$(\mathcal{F}(\mathbb{Z}, V))$

Def.: Sei V ein Vektorraum über K, $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$

Dann heißt M ein Teilraum von V, falls

- $\forall v_1, v_2 \in M : v_1 + v_2 \in M$
- $\forall v \in M \;\; \forall \lambda \in K : \lambda v \in M$

Proposition: M ist Teilraum von $V \iff \forall v_1, v_2 \in V, \lambda \in K : v_1 + \lambda v_2 \in M$

Beweis: $(\Rightarrow)$ $\quad v_1 + \underbrace{\lambda v_2}_{\in M} \in M$

$(\Leftarrow)$ $\quad v_1 + \underbrace{1 \cdot v_2}_{= v_2} \in M, \quad \underbrace{0}_{\in M} + \lambda v \in M$

$$v \in M \Rightarrow v + (-1) v \in M \Rightarrow 0 \in M \qquad \square$$

[BW: null in jedem Teilraum drinnen]

Proposition: M Teilraum von $V \Rightarrow 0 \in M$

Beweis: Weil $M \neq \emptyset$ $\exists v \in M$

$-v = (-1) \cdot v \in M \Rightarrow 0 = v - v \in M \qquad \square$

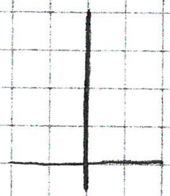
Nullvektor stets im Teilraum!

• „Triviale Teilräume": $\{0\}$, V ! Teilräume von $\mathbb{R}^2$ geometrisch: Geraden durch 0

K hat nur die trivialen Teilräume (als Vektorraum über K)

Bsp: $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$: $x = \binom{x_1}{x_2}$

•) $M = \{x : x_1 = 0\}$: $x, y \in M :\Rightarrow x_1 = 0$, $y_1 = 0$



$\Rightarrow x_1 + y_1 = 0$, also ist $x+y \in M$,

weiters $\lambda \cdot x_1 = 0$ somit $\lambda \cdot x \in M$

$\Rightarrow$ Daher: M ist Teilraum

•) $M = \{x : x_1 = 1\}$: kein Teilraum weil $0 \notin M$

•) $M = \{x : x_2 \geq 3\}$, kein Teilraum weil $0 \notin M$

•) $M = \{x : x_2 \geq 0\}$ kein Teilraum, weil $\binom{0}{1} \in M$

aber $(-1)\binom{0}{1} = \binom{0}{-1} \notin M$

Bsp: • $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$

? •) $M = \{f : f(3) = 0\}$

$(f+g)(3) = 0$, $(\lambda f)(3) = 0$

•) $C([0,1], \mathbb{R})$ ist Teilraum, weil mit f, g sind stetige Fkt. auch $f+g$, λf stetig

Proposition: V Vr, M Tr, $v \in M \Rightarrow -v \in M$ 10. Mai 2012 (6. VO)

Beweis: $-v = (-1) \cdot v \in M$ $\square$

$C^n((a,b),\mathbb{R})$ n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $(a,b) \to \mathbb{R}$

$C^0 = C$ stetige Funktion

C^∞ ... unendlich oft differenzierbaren Funktionen

Proposition Sei V ein Vektorraum über K und $(M_j)_{j \in J}$ eine (beliebige) Familie von Teilräumen von V

Dann ist auch $\bigcap_{j \in J} M_j$ ein Teilraum von V

Beweis: $M := \bigcap_{j \in J} M_j$ $\quad 0 \in M_j \quad \forall j \Rightarrow 0 \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

$v_1, v_2 \in M$: Sei $j \in J$ $\quad v_1, v_2 \in M_j \Rightarrow v_1 + v_2 \in M_j$

Weil j beliebig war, ist $v_1 + v_2 \in M_j \quad \forall j \Rightarrow v_1 + v_2 \in M$

Sei $v \in M$, $\lambda \in K$: Sei $j \in J \Rightarrow v \in M_j \Rightarrow \lambda v \in M_j$

$\Rightarrow \lambda v \in M$ Daher ist M ein Teilraum $\square$

→ Insbesondere ist für Teilräume M_1, M_2 auch $M_1 \cap M_2$ ein Teilraum

Im Allg. ist $M_1 \cup M_2$ kein Teilraum, z.B.

in $\mathbb{R}^2$: $M_1 = \{x_2 = 0\}$; $M_2 = \{x_1 = 0\}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in M_1 \cup M_2$, aber $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin M_1 \cup M_2$

$\Rightarrow M_1 \cup M_2$ kein Teilraum

Def.: V Vektorraum, M_1, M_2 Teilräume

Dann nennt man $M_1 + M_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in M_1, v_2 \in M_2\}$ die "Summe" von M_1 und M_2

Bemerkung: $M_1 + M_2$ ist Teilraum, weil: $v, w \in M_1 + M_2 \Rightarrow$

Beweis: $v = \underset{\in M_1}{v_1} + \underset{\in M_2}{v_2}$, $w = \underset{\in M_1}{w_1} + \underset{\in M_2}{w_2}$ $\Rightarrow v + w = \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in M_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in M_2} \in M_1 + M_2$

und $\lambda v = \underbrace{\lambda v_1}_{\in M_1} + \underbrace{\lambda v_2}_{\in M_2} \in M_1 + M_2$ $\square$

- $M_1 + M_2$ ist der kleinste Teilraum, der $M_1 \cup M_2$ enthält z.B. $\mathbb{R}^3$, $M_1 = \{x_3 = 0\}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \{x_1 = 0\}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$M_1 + M_2 = \mathbb{R}^3, \text{ weil } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in M_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\in M_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in M_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\in M_2}$$

$$M_1 \cap M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Def: V Vektorraum, M_1, M_2 Teilräume. Falls $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ dann nennt man $M_1 + M_2$ die direkte Summe von M_1 und M_2 und man schreibt $M_1 \oplus M_2$

Proposition: V Vektorraum, M_1, M_2 Teilräume. Dann gibt es zu jedem $v \in M_1 \oplus M_2$ eindeutig bestimmte $v_1 \in M_1$ und $v_2 \in M_2$ mit $v = v_1 + v_2$

Beweis: Existenz $v \in M_1 \oplus M_1 = M_1 + M_2 \Rightarrow \exists\, v_1 \in M_1,\ v_2 \in M_2$ mit $v = v_1 + v_2$

Eindeutigkeit: $v \in M_1 \oplus M_2$, $v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$ mit $v_1, w_1 \in M_1$, $v_2, w_2 \in M_2$: $\Rightarrow \underbrace{v_1 - w_1}_{\in M_1} = \underbrace{w_2 - v_2}_{\in M_2} \in M_1 \cap M_2 = \{0\}$ Nullvektor

$\Rightarrow v_1 - w_1 = w_2 - v_2 = \vec{0}$ (Nullvektor) $\Rightarrow v_1 = w_1$ und $w_2 = v_2$ $\square$

2) Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme

Def: Sei V ein Vektorraum über K und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dann heißt $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig (l.u.), falls aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

(Es gibt keine nichttriviale Darstellung des Nullvektors)

Bemerkung: Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nicht l.u. ist, dann nennt man sie linear abhängig (l.a.)
(d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors)

Bsp: P... Polynome über $\mathbb{R}$

$\{1+x,\ 1+x^2,\ 1+x+x^2\}$

$$0 = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x^2) + \lambda_3(1+x+x^2) =$$
$$= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (\lambda_1+\lambda_3)\cdot x + (\lambda_2+\lambda_3)\,x^2$$

→ Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

also $\{1+x,\ 1+x^2 + 1+x+x^2\}$ l.u.

Bsp: $\{x+1,\ x^2+1,\ x^2-x\}$

14. Mai 2012
(7. VO)

$$0 = \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) + \lambda_3(x^2-x) =$$
$$= (\lambda_2+\lambda_3)x^2 + (\lambda_1-\lambda_3)x + (\lambda_1+\lambda_2)$$

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} \lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1-\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}: \underbrace{1}_{\neq 0}(x+1) + (-1)(x^2+1) + 1\cdot(x^2-x) = 0$$

$\{x+1,\ x^2+1,\ x^2-x\}$ ist l.a.

→ $v_1,\dots,v_n \in V$, $\lambda_1\dots\lambda_n \in K$, das nennt man

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$ Linearkombination von $v_1 \dots v_n$

- $\{v_1, \dots v_n\}$ l.u $\Rightarrow 0 \notin \{v_1 \dots v_n\}$, weil

falls $0 \in \{v_1 \dots v_n\}$ O.B.d.A $v_1 = 0$

$\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$ Widerspruch $\square$

Proposition: $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.u. $M \subseteq \{v_1 \dots v_n\} \Rightarrow M$ l.u.

(Jede Teilmenge einer l.u. Menge ist l.u)

Beweis: OBdA: $M = \{v_1, \dots, v_k\}$

$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \dots + 0 v_n$

$(v_1, \dots v_n)$ l.u.

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ $\square$

Verallgemeinerung von l.u. für beliebige Mengen

Def.: V Vektorraum über K, $M \subseteq V$: Dann heißt M linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von M. l.u. ist

Def.: Sei V ein Vektorraum über K und $M \subseteq V$

Falls $M = \emptyset$, setze $[\emptyset] = \{0\}$ = Nullvektor

Sonst sei $[M] = \bigcap_{\substack{W \subseteq V \\ W \text{ Teilraum} \\ M \subseteq W}} W$. Man nennt $[M]$ den von M erzeugten Teilraum.

$[M]$ ist der kleinste Teilraum, der M enthält

Proposition: $[M] = \{v : \exists v_1, \dots, v_n \in M, \lambda_1, \dots \lambda_n \in K, \text{s.d. } v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\}$

Beweis: $\tilde{M} := \{v : \exists v_1, \dots v_n \in M, \lambda_1, \dots \lambda_n \in K, \text{s.d. } v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\}$

($\subseteq$) $\tilde{M}$ ist Vektorraum, weil $v, w \in \tilde{M} \Rightarrow$

$\exists v_1, \dots v_n \in M, \lambda_1, \dots \lambda_n \in K, \mu_1, \dots \mu_n \in K$ mit

$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ und $w = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$

$v + w = \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) v_j \in \tilde{M}$. $\lambda v = \sum_{j=1}^n \lambda \lambda_j \cdot v_j \in \tilde{M}$

Sei $v \in M$ $\quad v = \underbrace{1}_{\in K} \cdot \underbrace{v}_{\in M} \in \tilde{M}$

$\Rightarrow [M] \subseteq \tilde{M}$

$(\supseteq)$ $\quad v \in \tilde{M} \Rightarrow v = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\underbrace{v_j}_{\in M}}_{\in [M]}}_{\in [M]} \in [M]$

also $\tilde{M} \subseteq [M]$ und somit $[M] = \tilde{M}$ $\square$

Def.: V Vektorraum über K : $M \subseteq V$. Dann heißt M Erzeugendensystem falls $[M] = V$

Proposition: P_2 ... Polynome vom Grad ≤ 2

$\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x^2) + \lambda_3(x+x^2)$

Koeffizientenvergleich $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & a_0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_1 - a_0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 2 & a_2 + a_1 - a_0 \end{array}\right) \Rightarrow$ lösbar $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$ ist Erzeugendensystem

Bsp.: $\{1+x, 1+x^2, x^2-x\}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x^2) + \lambda_3(x^2-x)$

$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a_0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - a_0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 + a_1 - a_0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ nicht lösbar, also $\{1+x, 1+x^2, x^2-x\}$ ist kein Erzeugendensystem

Def.: Sei V ein Vektorraum über K, $B \subseteq V$ sei linear unabhängig und ein Erzeugendensystem.

Dann nennt man B eine Basis von V

Man kann sagen, dass jeder Vektorraum eine Basis hat

K^n: $\quad B := \{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_n} \}$ Standardbasis von K^n

Das ist wirklich eine Basis, weil:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad \text{also l.u.}$$

Erzeugendensystem: Sei $v \in K^n \Rightarrow v = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$ $\square$

<u>Proposition:</u> Sei V ein Vektorraum über K, $M \subseteq V$.

(1) Falls M eine maximale l.u. Teilmenge ist
$(M \subseteq \tilde{M},\ M \neq \tilde{M} \Rightarrow \tilde{M}$ l.a$)$, dann ist M eine Basis

(2) Falls M ein minimales Erzeugendensystem ist
$(\tilde{M} \subseteq M,\ \tilde{M} \neq M \Rightarrow \tilde{M}$ kein Erzeugendensystem$)$, dann ist M eine Basis

<u>Beweis:</u> M max l.u.   Sei $v \in V$ falls ein Element dazu nicht l.u.

15. Mai 2012
(8. VO)

(1) $v \in M$ ✓ passt   Falls $v \notin M$, dann $M \cup \{v\}$ ist nicht. l.u.

$\exists v_1, \dots, v_n \in M$, $\underbrace{\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\text{nicht alle} = 0} \in K$ $0 = \lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n$

Ang $\lambda = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ Widerspruch zu M max l.u

Somit $\lambda \neq 0 \Rightarrow v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 + \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n \in [M]$ ✓

Daher ist M ein Erzeugendensystem

(2) M min Erzeugendensystem   falls ein Element weg kein ES

Ang M wäre nicht l.u. $\Rightarrow \exists v_1 \dots v_n \in V$, $\exists \underset{\neq 0}{\lambda_1} \dots \lambda_n \in K$

mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

$\Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 + \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$

zeigen, dass $M \setminus \{v_1\}$ Erzeugendensystem

Sei $v \in V \Rightarrow \exists w_1, \dots w_k \in M$, $\exists \alpha_1, \dots \alpha_k \in K$

$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j$

1. Fall $v_1 \notin \{w_1 \dots w_k\} \Rightarrow v \in [M \setminus \{v_1\}]$.

2. Fall $v_1 \in \{w_1 \dots w_k\}$ O. B. d. A. $v_1 = w_1$ irgendeines gleich

$$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j w_j = -\frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \dots - \frac{\alpha_1 \lambda_n}{\lambda_1} v_n + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j w_j$$

$$= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_n \quad \text{irgendeines } v_1 \quad \in [M \setminus \{v_1\}]$$

Daher $M \setminus \{v_1\}$ Erzeugendensystem – Widerspruch zu M min Erz. syst.

Somit ist M l.u. $\square$

- Koeffizientenvergleich: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x^n \cdot e^{ax}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$

$x^n \cdot e^{ax} \cos bx$, $x^n e^{ax} \sin bx$ $n \in \mathbb{N}_0$ $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$ $b > 0$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z^n \cdot e^{az}$ $n \in \mathbb{N}_0$ $a \in \mathbb{C}$

Austauschsatz von Steinitz

Satz: Sei V ein Vektorraum über K, sei $n \in \mathbb{N}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ die linear unabhängig ist und $M \subseteq V$; Weiters gelte $\{v_1 \dots v_n\} \subseteq [M]$. Dann gibt es eine n-elementige Teilmenge $\{w_1 \dots w_n\}$ von $M \setminus \{0\}$ (Insbesondere muss M mindestens n Elemente haben), sodass $[(M \setminus \{w_1, w_2, \dots w_n\}) \cup \{v_1, v_2, \dots v_n\}] = [M]$

Beweis: 1. Schritt: Behauptung (einfacher Austauschsatz) nur ein Element

V Vektorraum, $v \in V$ $v \neq 0$

$M \subseteq V$, $v \in [M]$ Weiters gäbe es $w, w_1, \dots, w_k \in M$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in K$ $\lambda \neq 0$, sodass $v = \lambda w + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j$ Dann ist $[(M \setminus \{w\}) \cup \{v\}] = [M]$

Beweis der Behauptung: $v \in [M]$

$(\subseteq)$ $\underbrace{(M \setminus \{w\})}_{\subseteq [M]} \cup \underbrace{\{v\}}_{\in [M]} \subseteq [M] \Rightarrow [(M \setminus \{w\}) \cup \{v\}] \subseteq [M]$

$(\supseteq)$ Sei $u \in [M] \Rightarrow \exists x_1, \dots x_r \in M$, $\alpha_1, \dots \alpha_r \in K$ mit $u = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j$

1. Fall: $w \notin \{x_1 \dots x_p\}$ $\quad \{x_1, \dots x_p\} \subseteq M \setminus \{w\} \subseteq (M\setminus\{w\}) \cup \{v\}$

$\Rightarrow u \in [(M\setminus\{w\}) \cup \{v\}]$

2. Fall: $w \in \{x_1 \dots x_p\}$ $\quad$ OBdA $\quad w = x_1$

$$w = \frac{1}{\lambda} v - \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} w_j$$

$$u = \underbrace{\alpha_1 \underbrace{x_1}_{=w}}_{= \frac{1}{\lambda} v - \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} w_j} + \sum_{j=2}^{p} \alpha_j x_j = \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot v - \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_1 \lambda_j}{\lambda} \underbrace{w_j}_{\in M\setminus\{w\}} + \sum_{j=2}^{p} \alpha_j \underbrace{x_j}_{\in M\setminus\{w\}}$$

Daher $u \in [(M\setminus\{w\}) \cup \{v\}]$

Insgesamt $[M\setminus\{w\} \cup \{v\}] = [M]$ $\quad \Diamond$ (Ende von BW der BH)

2. Schritt: Induktion nach n

I.A $\quad n = 1 \quad \{v_1\}$ l.u. $\Rightarrow v_1 \neq 0$ (=Nullvektor) $\quad v_1 \in [M] \Rightarrow$

$\exists\, u_1 \dots u_k \in M \quad \lambda_1 \dots \lambda_k \in K$ mit $v_1 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$

Wollen zeigen, dass u_j und $\lambda_j \neq 0$

Ang.: $\forall j$ ist $u_j = 0$ oder $\lambda_j = 0 \Rightarrow v_1 = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\lambda_j u_j}_{0} = 0$ - Widerspruch

Also $\exists j$ mit $u_j \neq 0$ und $\lambda_j \neq 0$ $\qquad$ Setze $w_1 = u_j$

Nach dem 1. Schritt: $[(M\setminus\{w_1\}) \cup \{v_1\}] = [M]$

I.S $\quad$ Sei $n > 1 \quad \{v_1, \dots v_n\}$ l.u. $\Rightarrow \{v_1, \dots v_{n-1}\}$ ist l.u.

I.V $\Rightarrow \exists$ $n-1$-elementige Teilmenge $\{w_1, \dots w_{n-1}\}$ von M mit

$$[\underbrace{(M\setminus\{w_1 \dots w_{n-1}\}) \cup \{v_1 \dots v_{n-1}\}}_{\tilde{M}}] = [M]$$

$v_n \in [M] = [\tilde{M}]$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1} \in K,\ \exists\, u_1, \dots u_k \in M\setminus\{w_1 \dots w_{n-1}\}$

$\exists\, \beta_1 \dots \beta_k \in K$ mit $v_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j u_j$ $\quad$ ($k=0$ ist zugelassen)

Behauptung: $k \geq 1$ und $\exists j$ mit $u_j \neq 0$ und $\beta_j \neq 0$

Beweis d. Behauptung: $\forall j: u_j = 0$ oder $\beta_j = 0$

$$\Rightarrow v_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\beta_j u_j}_{=0} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_n = 0$$ – Widerspruch zu $\{v_1, \dots v_n\}$ l.u.

Sei j so, dass $\beta_j \neq 0$, $u_j \neq 0$

Setze $w_n = u_j$. Nach dem 1. Schritt

$[(\tilde{M} \setminus \{w_n\} \cup \{v_n\}] = [\tilde{M}] = [M]$

$w_n \in (M \setminus \{0\}) \setminus \{w_1, \dots w_{n-1}\}$ $\quad w_n \notin \{v_1, \dots v_{n-1}\}$

$\tilde{M} \setminus \{w_n\} = (M \setminus \{w_1, \dots w_n\} \cup \{v_1, \dots v_{n-1}\}$

$\{w_1, \dots w_n\}$ hat n Elemente und ist Teilmenge von $M \setminus \{0\}$

$(\tilde{M} \setminus \{w_n\}) \cup \{v_n\} = (M \setminus \{w_1, \dots w_n\}) \cup \{v_1, \dots, v_n\}$

$[(M \setminus \{w_1, \dots w_n\}) \cup \{v_1, \dots v_n\}] = [M]$

$\square$

Bemerkung: Man kann zeigen

V Vektorraum über K, $A \subseteq V$ l.u., $B \subseteq V$, $A \subseteq [B]$

Dann gibt es eine injektive Fkt. $f: A \to B \setminus \{0\}$ und

$[(B \setminus f(A)) \cup A] = [B]$

Korrolar: Sei V Vektorraum über K, $n, m \in \mathbb{N}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.u.

$\{v_1, \dots v_n\} \subseteq [\{w_1, \dots, w_m\}]$ Damit $n \leq m$ und man kann n Elemente von $\{w_1, \dots, w_m\}$ gegen $\{v_1, \dots, v_n\}$ austauschen, das heißt:

$\exists\, 1 \leq j_{n+1} < j_{n+2} < \dots < j_m \leq m$ mit

$[\{v_1, \dots v_n, w_{j_{n+1}}, w_{j_{n+2}}, \dots, w_{j_m}\}] = [\{w_1, \dots w_m\}]$

Korrolar: Sei V Vektorraum über K, $n \in \mathbb{N}$, und V besitze eine Basis von n-Elementen. Dann gelten:

(1) Jede Basis von V besitzt n Elemente

(2) Sind $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.u., dann ist $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis

(3) Bildet $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis

Bemerkung (1) gilt auch für unendliche Basen, (2), (3) nicht

Beweis: $B = \{u_1, \dots u_n\}$ ist Basis von V

(1) Sei $\tilde{B}$ eine Basis von V

Ang: $\underbrace{\text{card } \tilde{B}}_{\#\tilde{B}, |\tilde{B}|}$ (= Kardinalität, Anzahl der Elemente) $> n$

$\Rightarrow \exists \{u_1, \dots u_m\}$ l.u. $\subseteq \tilde{B}$, $m > n$

$\{v_1, \dots v_m\} \subseteq [\{u_1, \dots, u_n\}] = V \xRightarrow{\text{Austauschsatz}} m \leq n$ – Wiederspruch

also card $\tilde{B} \leq n$ Somit $\tilde{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\{u_1, \dots u_n\}$ ist l.u. , $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq [\{v_1, \dots v_m\}] \xRightarrow{\text{Austauschsatz}} n \leq m$

Daher $m = n$

(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist l.u. , $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq [\{u_1, \dots u_n\}]$

$\xRightarrow{\text{Austauschsatz}}$ $[\{v_1, \dots, v_n\}] = [\{u_1, \dots, u_n\}] = V$

Somit ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem, deshalb eine Basis

[Bei ∞ kann ich zwar ∞ viele gegen ∞ viele austauschen, aber dadurch weiß ich nicht ob das wirklich alle waren]

(3) Ang: $\{v_1, \dots, v_n\}$ wäre nicht l.u. Dann gibt es aber $m < n$,

$j_1, \dots, j_m$ mit $\{v_{j_1}, \dots v_{j_m}\}$ ist l.u. und $[\{v_{j_1}, \dots v_{j_m}\}] = V$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ ist l.u. $\{u_1, \dots u_n\} \subseteq [\{v_{j_1}, \dots v_{j_m}\}] \xRightarrow{\text{Austauschsatz}}$

$\Rightarrow n \leq m \rightarrow$ Wiederspruch. Daher ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.u.

und daher eine Basis

$\square$

Def: Sei V ein Vektorraum über K; Falls $V = \{0\}$ oder falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass V eine Basis aus n-Elementen besitzt, dann nennt man V endlichdimensional. Weiters heißt

$\dim_K V$ $(= \dim V) = n$ die DIMENSION von V

Ist V nicht endlichdimensional, dann heißt V unendlichdimensional

$(\dim_K V = \dim V = \infty)$

Satz: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis (im algebraischen Sinn)

Satz: Sei V ein Vektorraum über K, $A \subseteq V$ eine l.u. Teilmenge

Dann lässt sich A zu einer Basis von V ergänzen ($\exists B \supseteq A$, sodass B Basis von V ist)

Spezialfall für V endlichdimensional: Beweis im Proseminar

$\dim \mathbb{R}^6 = 6$, $\dim M_{5,3}(\mathbb{R}) = 15$, $\dim C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$,

$\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, $\dim \mathbb{C} = 1$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

22.05.2012 (10VO)

Proposition: Sei V ein Vektorraum über K und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$

Beweis: $[B] = V$ Sei $v \in V$ $v \in [B] \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ (Existenz)

Eindeutigkeit

Sei $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \Rightarrow$

$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) v_j \xRightarrow{B \text{ l.u.}}$

$\Rightarrow \forall_j \quad \lambda_j - \mu_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = \mu_j \quad \forall_j$ $\square$

Proposition: Sei V ein Vektorraum (möglicherweise unendlichdimensional) über K und B eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eine eindeutig best. Familie $(\nu_b)_{b \in B}$ und $\nu_b \in K$ $\forall b \in B$ und höchstens endlich viele $\nu_b \neq 0$

$$v = \sum_{b \in B} \nu_b b$$

Beweis: Sei $v \in V$: $V = [B] \Rightarrow \exists v_1, \dots v_n \in B$ und $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ und $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$. Für $j \in \{1 \dots n\}$ setze $\nu_{v_j} = \lambda_j$ und für $b \in B \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ setze $\nu_b = 0$

$$\sum_{b \in B} \nu_b b = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\nu_{v_j}}_{\lambda_j} v_j = v$$

Eindeutigkeit

Jetzt sei $v = \sum_{b \in B} v_b b = \sum_{b \in B} \lambda_b b$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{b \in B} v_b b - \sum_{b \in B} \lambda_b b = \underbrace{\sum_{b \in B} (v_b - \lambda_b) \cdot b}_{\text{endliche Summe}}$$

$\overset{\text{B.l.u.}}{\Longrightarrow}$ $\forall b$ ist $v_b - \lambda_b = 0 \Rightarrow \forall b \quad v_b = \lambda_b$ $\square$

Def.: Sei V ein Vektorraum über K und B eine Basis von V. Weiter sei $v \in V$. Man kann daher $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ in eindeutiger Weise schreiben.

Man nennt dann $v_B := (\lambda_b)_{b \in B}$ den Koordinatenvektor von v bezügl. B (Darstellung von V bezügl. B)

Spezialfall: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$; $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$: $v_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Proposition: V Vektorraum über K, B Basis von V, $v_1, v_2 \in V$ $\lambda \in K$

Dann gelten $(v_1 + v_2)_B = (v_1)_B + (v_2)_B$ und $(\lambda v_1)_B = \lambda (v_1)_B$

Beweis: $(v_1)_B = (\lambda_b)$ $(v_2)_B = (\mu_b) \Rightarrow v_1 = \sum_{b \in B} \lambda_b b$, $v_2 = \sum_{b \in B} \mu_b b$

$v_1 + v_2 = \sum_{b \in B} (\lambda_b + \mu_b) b \Rightarrow (v_1 + v_2)_B = (\lambda_b + \mu_b) = (\lambda_b) + (\mu_b) = (v_1)_B + (v_2)_B$

$\lambda v_1 = \sum_{b \in B} \lambda \lambda_b b \Rightarrow (\lambda v_1)_B = (\lambda \lambda_b) = \lambda (\lambda_b) = \lambda (v_1)_B$ $\square$

BSP $V := \{a_1 + a_2 x + a_3 e^{5x} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ als Vr über $\mathbb{R}$

$B := \{x + 2, e^{5x} + 2x, e^{5x} + 3x + 7\}$

$f(x) := 6e^{5x} + 9x + 4$ Darstellung von f bezügl. B = Gesucht

$$6e^{5x} + 9x + 4 = \lambda_1 (x + 2) + \lambda_2 (e^{5x} + 2x) + \lambda_3 (e^{5x} + 3x + 7) =$$
$$= (\lambda_2 + \lambda_3) e^{5x} + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) x + (2\lambda_1 + 7\lambda_3)$$

Koeffizientenvergl.: $\lambda_2 + \lambda_3 = 6$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 9$

$2\lambda_1 + 7\lambda_3 = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & -14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

$\lambda_3 = 2 \qquad \lambda_2 = 4 \qquad \lambda_1 = -5$

$$f_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proposition: V Vektorraum über K; W_1, W_2 endlichdimensionale Teilräume von V. Dann gilt:

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Beweis: Sei $n_1 = \dim W_1$, $\dim W_2 = n_2$, $\dim W_1 \cap W_2 = k$

Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$.

$\exists \{w_1, \dots, w_r\}$ s.d. $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r\}$ Basis von W_1 ist $\Rightarrow k + r = n_1$

$\exists \{u_1, \dots, u_s\}$ s.d. $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s\}$ Basis von W_2 ist $\Rightarrow k + s = n_2$

$B := \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s\}$ ist Basis von $W_1 + W_2$ ist (hat $k+r+s$ Elemente)

B. l. u. weil $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{-\beta_1 u_1 + \dots - \beta_s u_s}_{\in W_2} = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r}_{\in W_1}$$

$\Rightarrow \underbrace{-\beta_1 u_1 + \dots - \beta_s u_s}_{} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \exists \mu_1, \dots, \mu_k$ s.d.

weil ~~da~~ Basis ist gibt es eindeutig bestimmte Darstellung

$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k - \beta_1 u_1 + \dots - \beta_s u_s = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_s$

weil das gleich ist müssen Koeffizienten von v_1 gleich sein $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_k = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ also B. l. u.

Sei $v \in W_1 + W_2 \Rightarrow \exists x \in W_1, y \in W_2$ mit $v = x + y$

$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$

$y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s$

$v = x + y = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots (\lambda_k + \mu_k) v_k + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s$

$\Rightarrow B$ Erzeugendensystem, somit Basis $\Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = k + r + s$

$$\underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{= k+r+s} + \underbrace{\dim(W_1 \cap W_2)}_{= k} = \underbrace{(k+r)}_{= n_1} + \underbrace{(k+s)}_{= n_2} = \dim W_1 + \dim W_2$$

$\square$

Proposition: V Vr über K, endlich dimensional, W Teilraum von V

(1) $\dim W \leq \dim V$

(2) Falls $\dim W = \dim V$, dann ist $W = V$

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Sei $\{w_1, \dots, w_k\}$ eine Basis von W

(1) $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq [\{v_1, \dots, v_n\}] \xRightarrow{\text{Steinitz}} k \leq n$

(2) $k = n$: $\underbrace{\{w_1, \dots, w_n\}}_{\text{l.u.}} \subseteq [\{v_1, \dots, v_n\}] = V \xRightarrow{\text{Steinitz}}$

$[\{w_1, \dots, w_n\}] = [\{v_1, \dots, v_n\}] = V \Rightarrow W = [\{w_1, \dots, w_n\}] = V$ □

Def.: Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine $m \times n$ Matrix über K. Dann heißt die Maximalanzahl l.u. Spaltenvektoren der Rang von A, geschrieben $rg(A)$.

Eigentlich Spaltenrang, Zeilenrang wäre die Maximalanzahl l.u. Zeilenvektoren

Proposition: Sei A eine $m \times n$ Matrix über K. Dann ist der Zeilenrang von A gleich dem Spaltenrang von A

Beweis: $r(A)$ ... Spaltenrang ; $z(A)$ ... Zeilenrang

$r = r(A) \Rightarrow \exists\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$, s.d. $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\}$ l.u.

Für $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ $\exists\ \lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,r} \in K$ mit

$$a_j = \sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t}\, a_{j_t}$$

Betrachte:
$$\begin{pmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_r} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \dots & a_{2,j_r} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m,j_1} & a_{m,j_2} & \dots & a_{m,j_r} \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

Sei s die Maximalanzahl l.u. Zeilenvektoren von $\tilde{A}$

Es ist $s \leq r$

$\exists\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq m$ mit $\{\tilde{A}^{(k_1)}, \dots, \tilde{A}^{(k_s)}\}$ ist l.u.

Für $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_1, \dots, k_s\}$ $\exists\ \mu_{k,1}, \dots, \mu_{k,s}$ mit

$$\tilde{A}^{(k)} = \sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u}\, \tilde{A}^{(k_u)}$$

$\{a^{(k_1)}, \dots, a^{(k_s)}\}$ l.u.

Sei $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_1, \dots, k_s\}$

$\sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \, a^{(k_u)}$: Sei $j \in \{1, \dots, n\}$

<u>1. Fall</u> $j \in \{j_1, \dots, j_r\}$:

$$\left(\sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \, a^{(k_u)}\right)_j = \sum_{u=1}^{j} \mu_{k,u} \underbrace{a^{(k_u)}_j}_{=(\tilde{A}^{(k_u)})_j} = \left(\sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \, (\tilde{A}^{(k_u)}\right)_j$$

$$= (\tilde{A}^{(k)})_j = a_{k,j} = a^{(k)}_j$$

<u>2. Fall:</u> $j \notin \{j_1, \dots, j_r\} \Longrightarrow a_j = \sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t} \, a_{j_t}$

$$\left(\sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \, a^{(k_u)}\right)_j = \sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \underbrace{(a^{(k_u)})_j}_{a_{k_u,j} = (a_j)_{k_u}} = \sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \, (\underbrace{a_j}_{\sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t} a_{j_t}})_{k_u}$$

$$= \sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t} \underbrace{(a_{j_t})_{k_u}}_{=a_{k_u,j_t}} = \sum_{t=1}^{r} \sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \lambda_{j,t} \cdot \underbrace{a_{k_u,j_t}}_{(a^{(k_u)})_{j_t}}$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t} \sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \cdot \underbrace{(a^{(k_u)})_{j_t}}_{=\tilde{A}^{(k_u)}} = \underbrace{\sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t} \left(\underbrace{\sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \tilde{A}^{(k_u)}}_{=\tilde{A}^{(k)}}\right)_{j_t}}_{a_{k,j_t} = (a_{j_t})_k}$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_{t=1}^{r} \lambda_{j,t} \cdot a_{j_t}}_{=a_j}\Big)_k = a_{k,j} = (a^{(k)})_j$$

Somit ist $\sum_{u=1}^{s} \mu_{k,u} \, a^{(k_u)} = a^{(k)}$. Daher ist $z(A) = s \leq r = r(A)$

$\Longrightarrow r(A) = z(A^t) \leq r(A^t) = z(A) \Longrightarrow z(A) = r(A)$

$\square$

3) Lineare Abbildungen

Def.: Seien V, W Vektorräume über K. Eine Funktion $\varphi: V \to W$ heißt <u>lineare Abbildung</u>, falls:

(1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

(2) $\forall v \in V, \forall \lambda \in K: \quad \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Proposition: φ ist genau dann linear, wenn $\forall v_1, v_2 \in V \quad \forall \lambda \in K$

$$\varphi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$

<u>Beweis:</u> $(\Rightarrow)$ $\varphi(\lambda v_1 + v_2) = \underbrace{\varphi(\lambda v_1)}_{\lambda \varphi(v_1)} + \varphi(v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

$(\Leftarrow)$ $\varphi(\underbrace{v_1}_{=1 \cdot v_1} + v_2) = \varphi(1 \cdot v_1 + v_2) = 1 \cdot \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

$$\varphi(\underbrace{\lambda v}_{=\lambda v + 0}) = \lambda \varphi(v) + \varphi(0) = \lambda \varphi(v) + \underbrace{1 \cdot \varphi(0) + \varphi(0)}_{\varphi(\underbrace{1 \cdot 0 + 0}_{=0})} - \varphi(0) =$$

$$= \lambda \varphi(v) + \varphi(0) - \varphi(0) = \lambda \varphi(v)$$

$\square$

Proposition: Sei $\varphi: V \to W$ linear. Dann gelten

(1) $\varphi(0) = 0$

(2) $\forall v \in V: \quad \varphi(-v) = -\varphi(v)$

(3) Sind $v_1, \dots, v_n \in V$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann ist $\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(v_j)$

<u>Beweis:</u> (1) $\varphi(\underbrace{0}_{0 \cdot 0}) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$

(2) $\varphi(\underbrace{-v}_{(-1)v}) = (-1) \cdot \varphi(v) = -\varphi(v)$

(3) $\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \varphi(v_j)$ $\square$

Bsp

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, also φ ist nicht linear

(11. VO)
24.05.2012

(Bsp) $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1\\0\\5x_2\end{pmatrix}$ ist linear

Proposition: Seien V, W Vektorräume über K, $\varphi: V \to W$ eine bijektive lineare Abb. Dann ist φ^{-1} linear

Beweis: $\varphi^{-1}: W \to V$ Seien $w_1, w_2 \in W$

$$\varphi^{-1}(\underbrace{w_1}_{=\varphi(\varphi^{-1}(w_1))} + \underbrace{w_2}_{=\varphi(\varphi^{-1}(w_2))}) = \varphi^{-1}(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(w_2))}_{=\varphi(\varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2))}) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$$

Seien $w \in W$ und $\lambda \in K$

$$\varphi^{-1}(\lambda \underbrace{w}_{=\varphi(\varphi^{-1}(w))}) = \varphi^{-1}(\underbrace{\lambda\varphi(\varphi^{-1}(w))}_{\varphi(\lambda\varphi^{-1}(w))}) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(w))) = \lambda\varphi^{-1}(w) \qquad \square$$

Definition: Seien V, W Vektorräume über K. Dann heißt eine bijektive lineare Funktion $\varphi: V \to W$ ein Isomorphismus.

Falls es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$ gibt, dann nennt man V und W isomorph und schreibt: $V \cong W$

(Als Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$)

Ein Isomorphismus $\varphi: V \to V$ heißt Automorphismus.

z.B.: $1, I$

Proposition: Seien V, W Vektorräume über K, $\varphi: V \to W$ linear

(1) Falls φ injektiv ist und $M \subseteq V$ l.u., dann ist $\varphi(M)$ l.u.

(2) Falls φ surjektiv ist und $M \subseteq V$ ein Erzeugendensystem ist, dann ist $\varphi(M)$ ein Erzeugendensystem

(3) Wenn φ ein Isomorphismus ist (= bijektiv) und B eine Basis von V, dann ist $\varphi(B)$ eine Basis von W

Beweis: (1) und (2) Proseminar ✓

(3) B. l.u. $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\varphi(B)$ l.u
B. E.S $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\varphi(B)$ E.S } also $\varphi(B)$ Basis $\square$

__Proposition:__ Seien V, W Vektorräume über K und sei B eine Basis von V. Weiters sei $\tilde{\varphi}: B \to W$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abb. $\varphi: V \to W$ mit $\varphi(v) = \tilde{\varphi}(v) \quad \forall v \in B$
(Eine lineare Abb. ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis)

__Beweis:__ $v \in V$, $v_B = (\lambda_b)_{b\in B}$ $\quad (v = \sum_{b\in B} \lambda_b \cdot b)$ Linearität nachrechnen

Existenz & Eindeutigkeit

Setze $\varphi(v) = \sum_{b\in B} \lambda_b \cdot \tilde{\varphi}(b)$

Sei $w \in V$, $w_B = (\mu_b)_{b\in B}$, wählen $c \in K$

$\varphi(v+w)$: $(v+w)_B = v_B + w_B = (\lambda_b + \mu_b)_{b\in B}$

$$\varphi(v+w) = \sum_{b\in B} \underbrace{(\lambda_b + \mu_b)\cdot \tilde{\varphi}(b)}_{= \lambda_b \tilde{\varphi}(b) + \mu_b \tilde{\varphi}(b)} = \underbrace{\sum_{b\in B} \lambda_b \tilde{\varphi}(b)}_{=\varphi(v)} + \underbrace{\sum_{b\in B} \mu_b \tilde{\varphi}(b)}_{=\varphi(w)} =$$

$$= \varphi(v) + \varphi(w)$$

$$\varphi(\underbrace{c\cdot v}_{=(cv)_B = (c\cdot\lambda_b)_{b\in B}}) = \sum_{b\in B} \underbrace{(c\lambda_b)\tilde{\varphi}(b)}_{c\cdot(\lambda_b \tilde{\varphi}(b))} = c \cdot \underbrace{\sum_{b\in B} \lambda_b \tilde{\varphi}(b)}_{=\varphi(v)} = c \cdot \varphi(v)$$

Daher ist φ linear

Sei $v \in B$ $\quad v_B = (\lambda_b)_{b\in B}$, wobei $\lambda_b = \begin{cases} 1 & \text{falls } b = v \\ 0 & \text{falls } b \neq v \end{cases}$

$$\sum_{b\in B} = \lambda_b \cdot b = v \Rightarrow \varphi(v) = \sum_{b\in B} \lambda_b \tilde{\varphi}(b) = \tilde{\varphi}(v)$$

__Eindeutigkeit:__

Sei ψ $V \to W$ linear mit $\psi(v) = \tilde{\varphi}(v) \quad \forall v \in B$

Sei $v \in V$ beliebig $\quad v_B = (\lambda_b)_{b\in B} \Rightarrow v = \sum_{b\in B} \lambda_b b$

$$\psi(v) = \psi\left(\sum_{b\in B} \lambda_b \cdot b\right) \underset{\psi \text{ linear}}{=} \sum_{b\in B} \lambda_b \underbrace{(\psi(b))}_{\tilde{\varphi}(b)} = \sum_{b\in B} \lambda_b \tilde{\varphi}(b) = \varphi(v) \quad \square$$

nicht gesagt

Wichtiger Spezialfall:

$m, n \in \mathbb{N}$, K Körper, A $m \times n$ Matrix über K

Definiere $\varphi: K^n \to K^m$ durch $\varphi(x) = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{x}_{n \times 1} = m \times 1$

Diese Abb ist linear, weil:

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = \underbrace{A \cdot x}_{\varphi(x)} + \underbrace{A \cdot y}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{und}$$

$$\varphi(\lambda x) = A \cdot (\lambda x) = \lambda (\underbrace{A \cdot x}_{\varphi(x)}) = \lambda \varphi(x)$$ ($\Rightarrow$ Multiplikation von Matrizen = lineare Abb)

Diese Abbildung φ werden wir einfach A nennen.

Bei einer Matrix A ist meistens die lineare Abb. $x \longmapsto A \cdot x$ gemeint

Proposition: Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\varphi: K^n \to K^m$ linear. Dann gibt es (eine eindeutig bestimmte) $m \times n$ Matrix A mit $\varphi(x) = A \cdot x$

Beweis: $S := \{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis von K^n.

Für $j \in \{1, \dots, n\}$ setze $a_j := \varphi(e_j) \in K^m$

$$\begin{array}{l} e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Setze $A = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n)$

$$v \in K^n \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Rightarrow \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\varphi(e_j)}_{= a_j} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= A \cdot v \qquad \square$$

- $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear. ergibt 1×1-Matrix (a)

  $\varphi(x) = ax$

- Matrixdarstellung bezügl. einer Basis

V, W endlichdimensionale Vektorräume über K; $\varphi: V \to W$ linear und $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis V, $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ und setze $a_j = (\varphi(v_j))_{B_2} \in K^m$

Setze $A := \{a_1, a_2 \; \ldots \; a_n\}$ eine $m \times n$ Matrix über K

$\varphi_{B_2,B_1} = A$ ist eine Matrixdarstellung von φ bezügl. B_1 und B_2

$$\underbrace{\varphi_{B_2,B_1}}_{=A} \cdot \underbrace{v_{B_1}}_{=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}, \text{ d.h. } v=\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j} = (a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n) \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{a_j}_{(\varphi(v_j))_{B_2}} = \underbrace{\sum_{j=1}^n \underbrace{\lambda_j \left(\varphi(v_j)\right)_{B_2}}_{=(\lambda_j \varphi(v_j))_{B_2}}}_{\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(v_j)\right)_{B_2}} =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(v_j)\right)_{B_2}}_{=\varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right)_{B_2}} = \left(\varphi\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j}_{v}\Big)\right)_{B_2} = \left(\varphi(v)\right)_{B_2}$$

$$\boxed{\left(\varphi(v)\right)_{B_2} = \varphi_{B_2,B_1} \cdot v_{B_1}}$$

Sei jetzt V Vektorraum über K, $\varphi: V \to V$ linear, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Setze $\varphi_B := \varphi_{B,B}$

$$\boxed{\left(\varphi(v)\right)_B = \varphi_B \cdot v_B}$$

Bsp $V = \{a_1 x e^{4x} + a_2 e^{4x} + a_3 \; : \; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$B := \{e^{4x} + 1, \; x \cdot e^{4x} - 2, \; x \cdot e^{4x} + 3e^{4x} + 2\}$

$\varphi : V \to V$ durch $\varphi(f) := f' + 6f$ $\quad (f \mapsto f' + 6f)$

$$\varphi(v_j) = \lambda_1(e^{4x}+1) + \lambda_2(xe^{4x}-2) + \lambda_3(xe^{4x}+3e^{4x}+2) =$$

$$= (\lambda_2 + \lambda_3)\, xe^{4x} + (\lambda_1 + 3\lambda_3)\, e^{4x} + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3)$$

$$\varphi(e^{4x}+1) = \underbrace{(e^{4x}+1)'}_{=4e^{4x}} + 6(e^{4x}+1) = 10e^{4x}+6$$

Koeff. vergleich: $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$\lambda_1 + 3\lambda_3 = 10$
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 6$

$$\varphi(xe^{4x}-2) = e^{4x} + 4xe^{4x} + 6(xe^{4x}-2) = 10xe^{4x} + e^{4x} - 12$$

Koeff. vergleich: $\lambda_2 + \lambda_3 = 10$
$\lambda_1 + 3\lambda_3 = 1$
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = -12$

$$\varphi(xe^{4x}+3e^{4x}+2) = e^{4x}+4xe^{4x}+12e^{4x} + 6(xe^{4x}+3e^{4x}+2) =$$
$$= 10xe^{4x} + 31e^{4x} + 12$$

$\lambda_2 + \lambda_3 = 10$
$\lambda_1 + 3\lambda_3 = 31$
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 12$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 10 & 1 & 31 \\ 1 & -2 & 2 & 6 & -12 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & +3 & 10 & 1 & 31 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -13 & -19 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 10 & 1 & 31 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -20 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \varphi_B = \begin{pmatrix} 22 & -20 & 28 \\ 4 & 3 & 9 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp $\mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ bezügl. B

b) $A = \begin{pmatrix} -13 & 4 & -6 \\ -27 & 11 & -10 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ bezügl. B darstellen

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 4 & 9 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 14 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -5 & -16 & 4 & -4 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 4 & 9 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & -2 & -10 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 4 & 9 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & -6 & -6 & 27 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 0 & 21 & 6 & 6 & -34 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

a) $\varphi_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ b) $v_B = \begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$

31.05.2012 (12. VO)

- V_1, V_2, V_3 endlich $\varphi_1 : V_1 \to V_2$; $\varphi_2 : V_2 \to V_3$
  $B_1 \; B_2 \; B_3$

$\varphi_2 \circ \varphi_1 \quad V_1 \to V_3$

$(\varphi_2 \circ \varphi_1)_{B_3, B_1}$ Sei $v \in V_1$ beliebig

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)_{B_3,B_1} \cdot v_{B_1} = \Big(\underbrace{(\varphi_2 \circ \varphi_1)(v)}_{= \varphi_2(\varphi_1(v))}\Big)_{B_3} = (\varphi_2)_{B_3,B_2} \underbrace{(\varphi_1(v))_{B_2}}_{= (\varphi_1)_{B_2,B_1} v_{B_1}}$$

$$(\varphi_2)_{B_3,B_2} \left((\varphi_1)_{B_2,B_1} v_{B_1}\right) = \left((\varphi_2)_{B_3,B_2} \cdot (\varphi_1)_{B_2,B_1}\right) v_{B_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\varphi_2 \circ \varphi_1)_{B_3,B_1} = (\varphi_2)_{B_3,B_2} \cdot (\varphi_1)_{B_2,B_1}}$$

Zusammensetzung von Funktionen wird als Multiplikation von Matrizen dargestellt

- Spezialfall: $B \circ A = B \cdot A$ Matrizen

- V Vektorraum, endlich dim, B Basis von V $\underbrace{\varphi_1 : V \to V \quad \varphi_2 : V \to V}_{\text{linear}}$

$$\boxed{(\varphi_2 \circ \varphi_1)_B = (\varphi_2)_B \cdot (\varphi_1)_B}$$

$\varphi : V \to V$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi^n = (\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi)$ ($\varphi^0 = id$,
für $n \geq 1$ $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$)

$\Rightarrow (\varphi^0)_B = (id)_B = id = (\varphi_B)^0$

$n \geq 1$ $(\varphi^n)_B = (\varphi^{n-1} \circ \varphi)_B = \underbrace{(\varphi^{n-1})_B}_{(\varphi_B)^{n-1}} \cdot \varphi_B = (\varphi_B)^n$

also: $\Rightarrow (\varphi^n)_B = (\varphi_B)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ang.: φ invertierbar : $(\varphi^{-1})_B \cdot \varphi_B = (\underbrace{\varphi^{-1} \circ \varphi}_{=id})_B = id$

$$\Rightarrow (\varphi^{-1})_B = (\varphi_B)^{-1}$$

$$(\varphi^n)_B = (\varphi_B)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{(wenn invertierbar)}$$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ bez $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ bez. B

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad A v_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A v_2 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 25 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 20 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A wurde also diagonalisiert (Bei Diagonalenmatrix wird diagonal potenziert)

$$(A^n)_B = (A_B)^n = \underbrace{(A_B)^{n-1}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{(A_B)}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

weil invertierbar

✓

Bsp (30) b)) $\quad x_n = 6x_{n-1} - 5x_{n-2}, \quad x_0 = 3 \quad x_1 = 7$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow X_n = A \cdot X_{n-1} \Rightarrow X_n = A^n \cdot \underbrace{X_0}_{= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

$X_n = A^n \cdot v \quad$ bez B

$$(X_n)_B = (A_B)^n \cdot v_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5^n \end{pmatrix}$$

✓

$$\Rightarrow X_n = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5^n \\ 2 + 5 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = 2 + 5^n$$

- **BASISTRANSFORMATION**

V endlichdimensional $\quad B_1=\{v_1,\dots,v_n\} \quad B_2=\{w_1,\dots,w_n\}$

Sei $j\in\{1,\dots,n\}$, stellen v_j bez B_2 dar, also $(v_j)_{B_2}=s_j$

Definieren: $S_{B_1,B_2}=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ heißt die Matrix zur Basistransformation von B_1 auf B_2

Proposition: (1) $S_{B_2,B_1}\; v_{B_1} = v_{B_2}$

(2) S_{B_2,B_1} ist invertierbar und $(S_{B_2,B_1})^{-1}=S_{B_1,B_2}$

Beweis: (1) $v_{B_1}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$, also $v=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j$

$$S_{B_2,B_1}\; v_{B_1}=(s_1,\dots,s_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1 s_1+\dots+\lambda_n s_n=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \underbrace{s_j}_{=(v_j)_{B_2}}=$$

$$=\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j}_{v}\Big)_{B_2}=v_{B_2}$$

(2) $S_{B_2B_1}\cdot S_{B_1B_2}$

Sei $v\in V$ beliebig

$$(S_{B_2B_1}\cdot S_{B_1B_2})\,v_{B_2}=$$

$$=S_{B_2B_1}\cdot\big(\underbrace{S_{B_1B_2}\cdot v_{B_2}}_{v_{B_1}}\big)\overset{(1)}{=}v_{B_2}=id\cdot v_{B_2}$$

$\Longrightarrow S_{B_2B_1}\cdot S_{B_1B_2}=id \Longrightarrow S_{B_2B_1}$ ist invertierbar und

$(S_{B_2B_1})^{-1}=S_{B_1B_2}$

- V,W endl. Vr. $\quad\varphi: V\to W$ linear.

$B_1,\tilde{B}_1$ Basis von V $\quad B_2,\tilde{B}_2$ Basis von W

$(S_{B_2\tilde{B}_2})^{-1}\,\varphi_{B_2B_1}\,S_{B_1,\tilde{B}_1}$

Sei $v \in V$: $\Big(\underbrace{(S_{B_2,\tilde{B}_2})^{-1}}_{= S_{\tilde{B}_2 B_2}} \varphi_{B_2,B_1} \cdot S_{B_1,\tilde{B}_1} \Big) v_{\tilde{B}_1} =$

$$= \underbrace{S_{\tilde{B}_2 B_2} \cdot \underbrace{\varphi_{B_2 B_1} \cdot \underbrace{S_{B_1 \tilde{B}_1} \cdot v_{\tilde{B}_1}}_{= v_{B_1}}}_{= \varphi(v)_{B_2}}} = (\varphi(v))_{\tilde{B}_2} =$$

$$= \varphi_{\tilde{B}_2,\tilde{B}_1} \; v_{\tilde{B}_1} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{\tilde{B}_2,\tilde{B}_1} &= (S_{B_2 \tilde{B}_2})^{-1} \varphi_{B_2,B_1} \cdot S_{B_1 \tilde{B}_1} = \\ &= S_{\tilde{B}_2 B_2} \cdot \varphi_{B_2,B_1} (S_{\tilde{B}_1,B_1})^{-1} \end{aligned}}$$

Spezialfall: $\varphi: V \to V$ $\quad B, \tilde{B}$ Basis von V

$$\boxed{\varphi_{\tilde{B}} = (S_{B,\tilde{B}})^{-1} \varphi_B \, S_{B,\tilde{B}} = S_{\tilde{B}B} \cdot \varphi_B (S_{\tilde{B},B})^{-1}}$$

$$(\varphi^n)_{\tilde{B}} = S_{\tilde{B}B} (\varphi_B)^n \cdot (S_{\tilde{B},B})^{-1}$$

$$(\varphi^n)_{\tilde{B}} = (\varphi_{\tilde{B}})^n = (\varphi_{\tilde{B}})^{n-1} \varphi_{\tilde{B}} = \underset{\substack{\parallel \\ S_{\tilde{B}B}}}{S} \cdot (\varphi_B)^{n-1} S^{-1} S \varphi_B S^{-1} =$$

$$= S (\varphi_B)^n \cdot S^{-1}$$

$V = K^n$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{S}$ ... Standardbasis

$$\overset{!}{} S_{\mathcal{S},B} = (v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n)$$

4) Kern und Bild linearer Abbildungen

Def.: Seien V, W Vektorräume über K und $\varphi: V \to W$ linear

(1) $\operatorname{im} \varphi := \{ w \in W : \exists v \in V \text{ mit } \varphi(v) = w \}$ heißt BILD von φ

(2) $\ker \varphi := \{ v \in V : \varphi(v) = 0 \}$ heißt der KERN von φ

Bemerkungen: $\operatorname{im} \varphi \ \{\varphi(v) : v \in V\} = \varphi(V)$

Wie schreibt man es in Analysis

$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$

Proposition: (1) $\operatorname{im} \varphi$ ist ein Teilraum von W

(2) $\ker \varphi$ — " — von V

Beweis: (1) Seien $w_1, w_2 \in \operatorname{im} \varphi$, $\lambda \in K \Longrightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_1) = w_1$ mit $\varphi(v_2) = w_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow v_1 + \lambda v_2 \in V \Rightarrow \varphi(v_1 + \lambda v_2) \in \operatorname{im} \varphi$

$\varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda\, \varphi(v_2) = w_1 + \lambda w_2 \in \operatorname{im} \varphi$

(2) Seien $v_1, v_2 \in \ker \varphi$ und $\lambda \in K \Rightarrow \varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 0$

$\varphi(v_1 + \lambda v_2) = \underbrace{\varphi(v_1)}_{=0} + \lambda \underbrace{\varphi(v_2)}_{=0} = 0 \Rightarrow v_1 + \lambda v_2 \in \ker \varphi$ $\square$

Offensichtlich ist φ genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{im} \varphi = W$.

Proposition: φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$

Beweis: ($\Longrightarrow$) Sei $v \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(v) = 0 = \varphi(0) \xRightarrow{\varphi \text{ inj}} v = 0$

($\Longleftarrow$) Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Longrightarrow$

$0 = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \varphi(v_1 - v_2)$

$\Longrightarrow v_1 - v_2 \in \ker \varphi = \{0\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$

$\Rightarrow v_1 = v_2$, somit ist φ injektiv

$\square$

Bsp $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} x_1 = 0 \text{ und } x_3 = 0 \right\}$

$\ker \varphi = \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Dimensionsformel:

Satz: Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K und sei $\varphi: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\dim_K \ker \varphi + \dim_K \operatorname{im} \varphi = \dim_K V$$

Beweis: $n := \dim V$, $r = \dim \operatorname{im} \varphi$, $s := \dim \ker \varphi$

Es gibt eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ von $\ker \varphi$. Wir können $\{v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ Basis von V ergänzen ($\exists\, v_{s+1}, \dots, v_n$, s.d. $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V ist)

Behauptung: $\{\underbrace{\varphi(v_{s+1}), \dots, \varphi(v_n)}_{n-\text{Elemente}}\}$ ist eine Basis von $\operatorname{im} \varphi$

BW der Behauptung: Sei $w \in \operatorname{im} \varphi \Rightarrow \exists\, v \in V$ mit $\varphi(v) = w$

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \Rightarrow$

$$w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(v_j) =$$

$$= \lambda_1 \cdot \underbrace{\varphi(v_1)}_{=0 \text{ weil } \in \ker\varphi} + \dots + \lambda_s \cdot \underbrace{\varphi(v_s)}_{=0} + \lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n)$$

$=$

$= \lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n)$, also $\{\varphi(v_{s+1}), \dots, \varphi(v_n)\}$ ist Erzeugendensystem von $\operatorname{im} \varphi$

Seien $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n \in K$ so dass $\lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) = 0$

$0 = \lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) = \varphi(\lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_n v_n)$

$\Rightarrow \lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \ker \varphi$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots \lambda_s \in K$ mit $\lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s \Rightarrow$

$\Rightarrow -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 + \dots - \lambda_s v_s + \lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0$

($\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis, daher l.u)

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_s = \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n = 0$ Daher ist $\{\varphi(v_{s+1}), \dots, \varphi(v_n)\}$ l.u $\diamond$

$r = n - s \Rightarrow r + s = n$ $\square$

Proposition: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $\varphi: V \to V$ linear: Dann sind äquivalent: 06.06.2012 (13. VO)

(1) φ ist bijektiv (Isomorphismus)

(2) φ ist injektiv

(3) φ ist surjektiv

Beweis: n: $\dim V$

(1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (3) φ inj $\Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$ $\quad n = \dim V = \underbrace{\dim\ker\varphi}_{=0} + \dim \operatorname{im}\varphi$

$\Rightarrow \operatorname{im}\varphi = V$, d.h. φ = surjektiv

(3) $\Rightarrow$ (1) φ surj. $\Rightarrow \operatorname{im}\varphi = V \Rightarrow n = \dim V = \dim\ker\varphi + \underbrace{\dim \operatorname{im}\varphi}_{=n}$

$\Rightarrow \dim\ker\varphi = 0$

$\Rightarrow \ker\varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ injektiv, daher bijektiv $\square$

Für eine $n\times n$ Matrix A ist $\varphi(x) = A\cdot x$ genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist, und es ist dann $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$

$\operatorname{rg} \underset{=(a_1,\dots,a_n)}{A}$ ist Maximalanzahl l.u. Spaltenvektoren

$\varphi: V \to W$ linear, kann man auch als $\varphi: V \to \operatorname{im}\varphi$ auffassen, diese ist dann surj., wenn jede Basis von V auf ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}\varphi$ abgebildet wird.

$A = (a_1, \dots, a_n) = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$A e_j = (a_1, \dots, a_n) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \dots j \\ \\ \\ \end{array} = a_j$$

Daher ist $\{a_1, \dots, a_n\}$ ein Erzeugendensystem im A: $\dim \operatorname{im} A$ ist die Maximalanzahl l.u. Vektoren in $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\boxed{\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} A}$$

5) Lineare Gleichungssysteme

Satz: Sei A eine $m \times n$ - Matrix, $b \in K^m$

(1) Es gibt genau dann ein $x \in K^n$ mit $A \cdot x = B$ wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$

(2) Falls $x_s \in K^n$ die Gl. $Ax_s = b$ erfüllt, dann gilt für $x \in K^n$ die Gl. $Ax = b$ genau dann, wenn es ein $y \in K^n$ mit $Ay = 0$ gibt, so dass $x = x_s + y$

(3) $\dim \{y \in K^n : Ay = 0\} = n - \operatorname{rg} A$

Beweis: (1) ($\Rightarrow$) $\exists x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $\underbrace{A}_{=(a_1, \dots, a_n)} \cdot x = b$

erweiterte Matrix

$\Rightarrow b = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$

($\Leftarrow$) $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A = r$

$\Rightarrow \{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\}$ l.u. $\Rightarrow b \in [\{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\}] \Rightarrow \exists x_{j_1}, \dots, x_{j_r} \in K$ mit

$b = \sum_{t=1}^{r} x_{j_t} a_{j_t}$. Setze $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, s.d. $x_j = \begin{cases} \text{falls } j = j_t : & x_{j_t} \\ \text{sonst} : & 0 \end{cases}$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = \sum_{t=1}^{r} x_{j_t} a_{j_t} = b$$

(2) ($\Rightarrow$) $Ax = b = Ax_s \Rightarrow A = (x - x_s) = Ax - Ax_s = 0$ Setze $y = x - x_s$

$\Rightarrow Ay = 0$ und $x = x_s + y$

($\Leftarrow$) $x = x_s + y$ wobei $Ay = 0$

$Ax = A(x_s + y) = \underbrace{Ax_s}_{=b} + \underbrace{Ay}_{=0} = b$

(3) $\{y \in K^n : Ay = 0\} = \ker A$

$n = \dim K^n = \dim \ker A + \underbrace{\dim \operatorname{im} A}_{= \operatorname{rg} A} \Rightarrow \dim \ker A = n - \operatorname{rg} A$ $\square$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$: Für $A \in M_n(K)$ sind äquivalent

(1) A ist invertierbar ($\exists A^{-1} \in M_n(K)$ mit $A^{-1} A = A \cdot A^{-1} = id$)

(2) $\operatorname{rg} A = n$

(3) $\exists B \in M_n(K)$ mit $AB = id$

(4) $\exists B \in M_n(K)$ mit $B \cdot A = id$

Beweis: Wir zeigen: (1) $\to$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1), (1) $\to$ (4), (4) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (3) und (4): $\exists B: \underset{(4)}{B \cdot A} = \underset{(3)}{A \cdot B} = id$

(3) $\Rightarrow$ (2): $\exists B$ mit $AB = id$

Ind. ang. $r := \underbrace{rg A}_{\dim \operatorname{im} A} \neq n \Rightarrow r < n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \in K^n \setminus \operatorname{im} A$, somit kann es keine Lsg von $Ax = y$ geben

$A(By) = \underbrace{AB}_{=id} \cdot y = y$ also By wäre Lsg: ↯ Widerspruch

Daher ist $rg A = n$

(2) $\Rightarrow$ (1): $\underbrace{rg A}_{\dim \operatorname{im} A} = n \Rightarrow \operatorname{im} A = K^n \Rightarrow A$ surj $\Rightarrow A$ bijektiv, also invertierbar

(4) $\Rightarrow$ (1): $BA = id \Rightarrow A^t B^t = id \Rightarrow rg A = rg A^t = n \overset{(2)}{\Longrightarrow} A$ invertierbar $\square$

Proposition: V, W Vektorräume über K, $\varphi: V \to W$ linear, $b \in W$

(1) $\exists x \in V$ mit $\varphi(x) = b \iff b \in \operatorname{im} \varphi$

(2) Falls $x_s \in V$ mit $\varphi(x_s) = b$, dann:

$x \in V$ mit $\varphi(x) = b \iff \exists y \in V$ mit $\varphi(y) = 0$ und $x = x_s + y$

$\iff \exists y \in \ker \varphi$

Kapitel 6) Quotientenräume, 7) Dualräume $\longrightarrow$ SPÄTER

III. Determinanten

1) Multilineare Abbildungen

Def.: V, W Vektorräume über K, $k \in \mathbb{N}$. $\varphi: V^k \to W$ $(\varphi(\underset{\in V}{v_1}, \underset{\in V}{v_2}, \dots, \underset{\in V}{v_k}))$ heißt

k-linear falls $\forall j \in \{1, \dots, k\}, \forall v, w \in V, \lambda \in K, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k \in V$:

$\varphi(v_1, \dots, v_{j-1}, v + \lambda w, v_{j+1}, \dots, v_k) =$

$= \varphi(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k) + \lambda \varphi(v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_k)$

Für ein $\varphi: M_{m,n}(K) \to W$ sagen wir φ ist multilinear, wenn sie

n-linear als Fkt. $\varphi(a_1\ a_2 \dots a_n)$ in den Spaltenvektoren ist.

BSP $\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{13}$

Körper K: Charakteristik von K ($\operatorname{char} K$) ist kleinste $n \in \mathbb{N}$

mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}} = 0$ falls das nie passiert ist $\operatorname{char} K = 0$

BSP $\operatorname{char} \mathbb{Z}_5 = 5$ $\quad 1+1+1+1+1$

$\operatorname{char} K \neq 2 \iff 1+1 \neq 0$

Def.: Eine k-lineare Abb heißt alternierend, falls

$\varphi(a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_{r-1}, a, a_{r+1}, \ldots, a_k) = 0$

Proposition: (1) φ alternierend $\Rightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_r, a_{j+1}, \ldots, a_{r-1}, a_j, a_{r+1}, \ldots, a_k) =$
$= -\varphi(a_1, \ldots, a_k)$

(2) Falls $\operatorname{char} K \neq 2$ und $\varphi(a_1, \ldots, a_k) = -\varphi(a_1, \ldots, a_k) \Rightarrow \varphi$ alternierend

Beweis: (1) $\varphi(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + a_r, a_{j+1}, \ldots, a_{r-1}, a_j + a_r, a_{r+1}, \ldots, a_k) =$

$= \underbrace{\varphi(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_k)}_{=0} + \varphi(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_r, \ldots, a_k) +$

$+ \varphi(a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_j, \ldots, a_k) + \underbrace{\varphi(a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_r, \ldots, a_k)}_{=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_j, \ldots, a_k) = -\varphi(a_1, \ldots, a_k)$

(2) $\varphi(a_1, \ldots, \underset{j}{a}, \ldots, \underset{r}{a}, \ldots, a_k) = -\varphi(a_1, \ldots, \underset{j}{a}, \ldots, \underset{r}{a}, \ldots, a_k)$

$\Rightarrow 2\varphi(\ldots) = 0 \Rightarrow \varphi(\ldots) = 0$ $\square$

BSP $\varphi: M_2(\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, $\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{12}$

$\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{12}\, a_{11} = \varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = -\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

aber $\varphi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Bemerkung: alternierende multilineare Abb sind WICHTIG!

2) Determinante

Wir wollen von $n\times n$-Matrizen die Determinante definieren:

Def.: K Körper, $n \in \mathbb{N}$

- Für $n=1$ setze für $(a_{11}) \in M_1(K)$ $\det A = a_{11}$

• Für $n>1$ und $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ definiere

$$\det A := a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{3} \\ \hline & \\ & \end{array}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{pmatrix}$$

$\det : M_n(K) \to K$

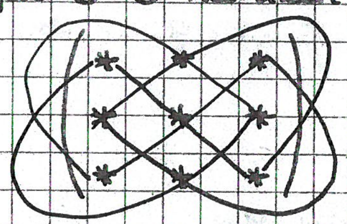
Bsp •) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

•) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$

$$= a_{11} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}} - a_{12} \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}} + a_{13} \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22})$$

für 3×3 Matrizen $\Longrightarrow$ Regel von SARRUS



positiv
negativ

18.06.2012
(14. VO)

Nachtrag zu Proposition (13. VO)

im unendlichdimensionalen falsch

$V = \{ \underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}_{(a_0,a_1,a_2\ldots)} : a_n \in K, (W)\}$

$\varphi((a_0,a_1,\ldots)) = (a_1,a_2\ldots)$ Shift, links-Shift (σ)

φ linear, surjektiv, weil $(b_0,b_1,\ldots) = \varphi(0,b_0,b_1,\ldots)$.

$\ker\varphi = \{(c,0,0,\ldots)\} \neq \{0\}$ also φ nicht bijektiv

Rechts Shift: $\tau(a_0,a_1,\ldots) = (0,a_0,a_1\ldots)$

T linear, $\ker T = \{0\}$ also T injektiv, aber $\nexists (a_0, a_1, \ldots) \in V$ mit

$T(a_0, a_1, \ldots) = (1, 0, 0, \ldots)$ somit nicht bijektiv

$\varphi \circ T = id$

$(\varphi \circ T)(a_0, a_1, \ldots) = (a_0, a_1, \ldots)$

$(T \circ \varphi)(a_0 a_1, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\det : M_n(K) \to K$

__Proposition:__ det ist multilinear und alternierend ($\forall j : \det(a_1, \ldots, a_j + \lambda b_j, \ldots, a_n) =$
$= \det(a_1, \ldots, a_n) + \lambda \det(a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_n)$ und $\det(a_1, \ldots, a, \ldots, a, \ldots, a_n) = 0$)

$$\det(a_1, \ldots, a_{j-1} + \lambda b_j, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \underbrace{\det(\tilde{a}_1, \ldots \tilde{a}_{k-1}, \ldots, \tilde{a}_j + \lambda \tilde{b}_j, \ldots, \tilde{a}_n)}_{\substack{= \det(\tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_{k-1}, \tilde{a}_{k+1}, \ldots \tilde{a}_n) + \\ + \lambda \det(\tilde{a}_1, \ldots \tilde{a}_{k-1}, a_{k+1} \ldots \tilde{b}_j \ldots \tilde{a}_n)}}$$

$$+ (-1)^{j-1} (a_{1j} + \lambda b_{1j}) \det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{j-1}, \tilde{a}_{j+1}, \ldots, \tilde{a}_n) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det(\tilde{a}_1, \ldots \tilde{a}_{k-1}, \tilde{a}_{k+1}, \ldots \tilde{a}_n) + (-1)^{j-n} a_{1j} \det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{j-1}, a_{j+1}, \ldots \tilde{a}_n) \right)}_{= \det(a_1 \ldots a_n)} +$$

$$+ \lambda \underbrace{\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{k-1}, \tilde{a}_{k+1}, \ldots b_j \ldots \tilde{a}_n) + (-1)^{j-1} b_{1j} \det(\tilde{a}_1, \ldots a_{j-1}, a, a_{j+1} \ldots \tilde{a}_n) \right)}_{\det(a_1 \ldots a_{j-1}, b_j\, a_{j+1} \ldots a_n)}$$

$= \det(a_1 \ldots a_n) + \lambda \det(a_1 \ldots a_{j-1}, b_j, a_{j+1} \ldots a_n)$ für $n > 1$

$n = 1$: $\det(a + \lambda b) = a + \lambda b = \det(a) + \lambda \det(b)$ = Ind. Anfang

$n = 1$ alternierende

$n > 1$: $j < k$ $\det(a_1 \ldots \underset{(j)}{a} \ldots \underset{(k)}{a} \ldots a_n) = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k,j}}^{n} (-1)^{r-1} a_{1r} \underbrace{\det(\tilde{a}_1 \ldots \underset{(j)}{\hat{a}} \ldots \underset{(k)}{\hat{a}} \ldots \tilde{a}_n)}_{=0} +$ r fehlt

in Klammer weil $r < | \geq 0$ sein ki

$$+ (-1)^{j-1} a_1 \det(\tilde{a}_1, \ldots \underset{(k-1)}{\hat{a}} \ldots \tilde{a}_n) + (-1)^{k-1} a_1 \det(\tilde{a}_1, \ldots, \underset{(j)}{\hat{a}}, \ldots \tilde{a}_n) =$$

$$= a_1 \Big((-1)^{j-1} \underbrace{\det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{j-1}, \tilde{a}_{j+1}, \ldots, \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}_n)}_{(-1)^{k-j-1} \det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{j-1}, \tilde{a}, \ldots)} + (-1)^{k-1} \det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{j-1}, \underset{(j)}{\hat{a}}, \tilde{a}_{j+1}, \ldots \tilde{a}_n) =$$ k fehlt

$$= a_1 \det(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{j-1}, \tilde{a}, \ldots \tilde{a}_n) \underbrace{\left((-1)^{k-2} + (-1)^{k-1} \right)}_{= (-1)^{k-2}(1-1) = 0} = 0 \qquad \square$$

Proposition $A = (a_1, \dots, a_n)$ und $\{a_1, \dots, a_n\}$ linear abhängig, dann ist $\det A = 0$

Beweis: $\exists \lambda_1, \dots \lambda_n$ nicht alle 0 mit $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$

$\exists j$ mit $\lambda_j \neq 0 \Rightarrow a_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} a_1 + \dots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} a_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} a_{j+1} + \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_j} a_n$

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1 \dots a_j \dots a_n) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_j} \underbrace{\det(a_1, \dots \underset{j}{a_k}, \dots a_n)}_{=0} \Big) =$$

$$= \det(a_1, \dots, \underset{j}{\overbrace{a_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} a_k}^{=0}}, \dots a_n) =$$

$$= \underbrace{\det(a_1, \dots, \underset{j}{0}, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots \underset{j}{0}, \dots a_n)}_{\det(a_1, \dots, \underset{j}{0} \dots a_n)} - \det(a_1, \dots \underset{j}{0}, \dots a_n) = 0$$

Eine $n \times m$ Matrix heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Einser steht und sonst nur Nuller

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S = (s_{j,k})$ für festes k $\exists! j$ mit $s_{j,k} = 1$

Definiere $\sigma(k) = j$

Erhalte: $\sigma : \{1 \dots n\} \to \{1, \dots, n\}$

Falls $\sigma(j) = \sigma(k) \Rightarrow s_{\sigma(j), j} = 1 = s_{\underbrace{\sigma(k)}_{=\sigma(j)}, k} \Rightarrow j = k$ also σ injektiv

Sei k beliebig $\Rightarrow \exists j$ mit $s_{k,j} = 1 \Rightarrow \sigma(j) = k$ also σ = surjektiv

Somit ist σ bijektiv, also eine Permutation

Sei σ Permutation auf $\{1, \dots, n\}$ (S_n ist Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$)

def. $S_\sigma = (s_{j,k})$, wobei $s_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \sigma(k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

S_σ ist Permutationsmatrix

$S_\sigma = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots e_{\sigma(n)})$

$$\boxed{S_{\sigma \circ \tau} = S_\sigma \cdot S_\tau}$$

j-te Spalte von $S_{\sigma\circ\tau}$ ist $\overset{S_{\sigma\circ\tau} e_j}{\overset{\parallel}{e_{(\sigma\circ\tau)(j)}}} = e_{\sigma(\tau(j))} = S_\sigma e_{\tau(j)} = S_\sigma \underbrace{e_{\tau(j)}}_{S_\tau e_j} =$

$(S_\sigma e_j = e_{\sigma(j)})$

$= S_\sigma S_\tau e_j \quad \Rightarrow S_{\sigma\circ\tau} = S_\sigma \cdot S_\tau$

$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ auf S_n ist bijektiv

Def Für $\sigma \in S_n$ ist $\overset{\text{signum}}{\operatorname{sgn}} \sigma := \det S_\sigma$

Bemerkung $\det id = 1$ weil $n=1$ $\det(1)=1$ für $n>1$ ist

$$\det id = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & id_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\det \cdot id_{n-1}}_{=1} + 0(\dots) = 1 \quad \square$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} \sigma = \det S_\sigma = \det(e_{\sigma(1)}, \dots e_{\sigma(n)}) = \pm \det(id) = \pm 1$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} \sigma \in \{1, -1\}$. Weiters ist $\frac{1}{\operatorname{sgn}\sigma} = \operatorname{sgn}\sigma$

Falls f eine multilineare, alternierende Abbildung $M_n(K) \to K$,

dann ist $f(S_\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma\, f(id)$ weil $f(S_\sigma) = f(e_{\sigma(1)}, \dots e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma\, f(id)$

3) Eindeutigkeitssatz

Satz: Sei f $M_n(K) \to K$ multilinear und alternierend

Dann gibt es ein $\lambda \in K$, sodass $f(A) = \lambda \det A$ $\forall A \in M_n(K)$ gilt

Weiters gilt $\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(0,2)} \cdots a_{\sigma(n)n}$

Beweis: Setze $\lambda = f(id)$

Behauptung: $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ $f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{j_1 j_2 \dots j_k = 1 \\ \operatorname{card}\{j_1 \cdot j_2 \dots j_k\} = k}}^{n} a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdots a_{j_k,k} \cdot f(e_{j_1} \dots e_{j_k}, a_{k+1} \dots$

Bew. Beh: $k=0$ ✓
(Induktion)

Sei $k>0$ $f(a_1 \dots a_n) = \sum_{\substack{j_1 j_2 \dots j_{k-1} = 1 \\ \operatorname{card}\{j_1 \dots j_{k-1}\} = k-1}}^{n} a_{j_1} \cdots a_{k-1,k-1} \cdot f(e_1 \dots e_{k-1}, \underset{\smile}{a_k} \dots a_n) =$ (*)

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk}\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{j,k}\, e_j$$

$$= \sum_{*}^{n} a_{j_1 1} \cdots a_{k-1,k-1} \cdot \Big(\sum_{j=1} \underbrace{f(e_{j_1} \dots e_{j_{k-1}}, e_j, a_{k+1}, \dots, a_n)}_{\text{falls } j \in \{j_1, \dots, j_{k-1}\} = 0} \cdot a_{j,k}\Big) =$$

$$= \sum_{*}^{n} a_{j_1 1} \cdots g_{j_{k-1},k-1} \cdot a_{j_k,k} \cdot f(e_{j_1}, \dots e_{j_k}, a_{k+1}, \dots a_n) \quad \diamond$$

Verwenden der Beh. für $\underline{k=n}$:

$$f(a_1 \dots a_n) = \sum_{\substack{j_1 \dots j_n = 1 \\ \operatorname{card}\{j_1 \dots j_n\} = n}}^{n} a_{j_1,1} \dots a_{j_n,n}\, f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Setze $\sigma(k) := j_k$. $\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

σ ist inj weil $\sigma(k) = \sigma(\tilde{k}) \Rightarrow j_k = j_{\tilde{k}} \Rightarrow k = \tilde{k}$

σ ist surj, weil, falls $r \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists k$ mit $j_k = r$, also $\sigma(k) = r$

$$f(a_1,\dots,a_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\cdot \underbrace{f(e_{\sigma(1)},\dots e_{\sigma(n)})}_{=\operatorname{sgn}\sigma\cdot \underbrace{f(id)}_{=\lambda}} =$$

$$= \lambda\cdot\Big(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\Big)$$

Insbesondere ist $\det(a_1,\dots,a_n) = \lambda\Big(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\Big) =$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}$$

Außerdem $f(A) = \lambda\cdot\Big(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\Big) = \lambda\cdot\det A$ $\square$

Korollar: $f: M_n(K)\to K$ multilinear, alternierend, $f(id)=1$

$$\Rightarrow f(A) = \det A \qquad \forall A\in M_n(K)$$

Proposition: Seien $A, B\in M_n(K)$. Dann gilt: $\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$

Beweis: Betrachte $f: M_n(K)\to K$, $f(\underbrace{X}_{=(x_1,\dots,x_n)}) := \det(AX)$

$$f(x_1,\dots,x_j+\lambda y_j,\dots,x_n) = \det(Ax_1,\dots,A(x_j+\lambda y_j),\dots Ax_n) =$$
$$= \det(Ax_1,\dots,Ax_n) + \lambda\det(Ax_1,\dots Ay_j,\dots Ax_n) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda f(x_1,\dots y_j,\dots,x_n)$$

$$f(x_1,\dots,\underset{j}{x},\dots,\underset{k}{x},\dots x_n) = \det(Ax_1,\dots,A\underset{j}{x},\dots,A\underset{k}{x},\dots Ax_n) = 0$$

$\overset{\text{Eind. Satz}}{\Longrightarrow}$ $\exists\lambda\in K$ mit $f(X) = \lambda\cdot\det(X)$

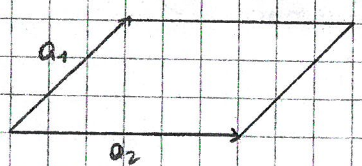
$\det A = \det(A\cdot id) = f(id) = \lambda\,\underbrace{\det id}_{=1} = \lambda$

Somit $f(X) = \det A\cdot\det X$

Insbesondere $\det(AB) = f(B) = \det A\cdot\det B$ $\square$

19.06.2012 (15. VO)

in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$: $|\det(a_1,\dots,a_n)|$ … Volumen des Parallelogramms, das von $a_1,\dots,a_n$ aufgespannt wird



A

Vorzeichen = Orientierung

Volumen von $A(G) = |\det A|$ Volumen von G

Korollar: Für $\sigma\in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$

Beweis: $S_{\sigma^{-1}} \cdot S_\sigma = S_{\underbrace{\sigma^{-1}\sigma}_{id}} = id \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \det id = \det(S_{\sigma^{-1}} \cdot S_\sigma) = \underbrace{\det S_{\sigma^{-1}}}_{=\operatorname{sgn}\sigma^{-1}} \cdot \underbrace{\det S_\sigma}_{\operatorname{sgn}\sigma} \Rightarrow$ $\square$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sgn}\sigma} = \operatorname{sgn}\sigma$

Proposition: Sei A eine $n\times n$-Matrix, dann gilt $\det A^t = \det A$

Beweis: $\det A^t = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \underbrace{(A^t)_{\sigma(1),1}}_{a_{1,\sigma(1)}} \cdot \underbrace{(A^t)_{\sigma(2),2}}_{a_{2,\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(A^t)_{\sigma(n),n}}_{a_{n,\sigma(n)}} =$

$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \underbrace{a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}}_{a_{\sigma^{-1}(1),1}\cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n),n}} \underset{\sigma \mapsto \sigma^{-1} \text{ ist bijektiv}}{=}$

$= \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}\sigma}_{=\operatorname{sgn}\sigma^{-1}} \cdot a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n),n} =$

$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} = \det A$ $\square$

Wir haben dabei auch gezeigt, dass: $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$

Proposition: $A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}$ dann gelten

(1) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} + \lambda b^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \cdots j = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \cdots j$

(2) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots j \\ \cdots h \end{matrix} = 0$

} multilinear und alternierend in den Zeilenvektoren

(3) Zeilenvektoren linear abhängig $\Rightarrow \det A = 0$

Beweis: (1) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} + \lambda b^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \cdots j = \det (a^{(1)t} \ldots a^{(j)t} \ldots a^{(n)t}) =$

$= \det(a^{(1)t} \ldots a^{(n)t}) + \lambda \det(a^{(1)t} \ldots b^{(j)t} \ldots a^{(n)t}) = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \cdots j$

(2) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} = \det (a^{(1)t} \ldots a^t \ldots a^t \ldots a^{(n)t}) = 0$

(3) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} = \det (\underbrace{a^{(1)t} \ldots a^{(n)t}}_{\text{l.a}}) = 0$

Proposition: $A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}$ eine $n \times n$-Matrix, $j \neq k$, $\lambda \in K$. Dann gelten

(1) $\det(a_1, \dots, a_k + \lambda a_j, \dots, a_n) = \det A$

(2) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(k)} + \lambda a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \dots k = \det A$

Beweis: (1) $\det(a_1 \dots a_k + \lambda a_j, \dots a_n) = \det A + \lambda \det(a_1 \dots \underset{j}{a_j} \dots \underset{k}{a_j} \dots a_n) = \det A$

(2) $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(k)} + \lambda a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \dots k = \det A + \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \dots j \\ \\ \dots k \end{matrix} = \det A$ $\square$

Somit kann man das Gauß-Verfahren verwenden, um die Determinante zu bestimmen

- zu einer Zeile Vielfache einer anderen addieren

Mit Vorsicht (genaueres Buchführen notwendig)

- Zeilen mit Werten $\lambda \neq 0$ multiplizieren (am Ende mit $1/\lambda$ multiplizieren)
- Zeilen vertauschen (aufpassen!!)

- entsprechende Spaltenoperationen problemlos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad j, k \in \{1, \dots, n\}$$

$$A_{j,k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & & & & & \\ a_{j+1,1} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ also j-te Zeile und k-te Spalte weggestrichen

Proposition: Es gelten:

(1) $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot a_{jk} \cdot \det A_{j,k}$ (Entwicklung nach j-ter Zeile)

(2) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \, a_{j,k} \, \det A_{j,k}$ (—— " —— k-ten Spalte)

Anm Vorzeichen $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

Beweis: (1) $\det A = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} = (-1)^{j-1} \underbrace{\det \begin{pmatrix} a^{(j)} \\ a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}}_{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{j,k} \det A_{j,k}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{j,k} \cdot \det A_{j,k}$

(2) $\det(a_1,\dots,a_n) = \det\begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} \underbrace{\det(A^t)_{k,j}}_{=\det A_{j,k}} =$

$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} \det A_{j,k}$ $\square$

Proposition: Sei A eine $n\times n$-Matrix über K. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Weiters ist $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Beweis: $(\Rightarrow)$ $A\cdot A^{-1} = id \Rightarrow$

$1 = \det \underbrace{id}_{A\cdot A^{-1}} = \det A\cdot A^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0$ und $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$(\Leftarrow)$ $\det A = \det(a_1,\dots,a_n) \neq 0 \Rightarrow \{a_1 \dots a_n\}$ l.u.

(weil wenn l.a. $\Rightarrow \det A = 0$) $\Rightarrow rg\, A = n \Rightarrow A$ invertierbar $\square$

Proposition: $A = (a_1,\dots,a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}$

(1) $\{a_1,\dots,a_n\}$ l.a. $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \{a^{(1)},\dots,a^{(n)}\}$ l.a.

(2) $\{a_1,\dots,a_n\}$ l.u. $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \{a^{(1)},\dots,a^{(n)}\}$ l.u.

Beweis: genügt (2) zu zeigen und dabei 1. Äquivalenz

$(\Rightarrow)$ $\{a_1 \dots a_n\}$ l.u $\Rightarrow rg\, A = n \Rightarrow A$ invertierbar $\Rightarrow \det A \neq 0$

$(\Leftarrow)$ Ang $\{a_1,\dots a_n\}$ l.a $\Rightarrow \det A = 0$ $\overset{\text{Widerspruch}}{\lightning}$ also $\{a_1 \dots a_n\}$ l.u $\square$

Proposition: Für $A \in M_n(K)$ sind äquivalent

(1) A invertierbar
(2) $rg\, A = n$
(3) $\exists B$ mit $B\cdot A = id$
(4) $\exists B$ mit $AB = id$
(5) $\det A \neq 0$
(6) Spaltenvektoren von A sind l.u.
(7) Zeilenvektoren von A sind l.u

$\underbrace{GL_n(K)}_{\text{general linear group}} := \{A \in M_n(K) : \underbrace{A \text{ invertierbar}}_{\Leftrightarrow \det A \neq 0}\}$ ist nicht-kommutative Gruppe

$\underbrace{SL_n(K)}_{\text{special linear group}} := \{A \in M_n(K) : \det A = 1\}$ ist nicht-kommutative Gruppe

BSP Berechnen von det

$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 3 \\ 3 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Zeile}}{=} -2\det\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. 2. Zeile}}{=} 6\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 6\cdot(-13) = \underline{-78}$

BSP $\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -2 & -4 \\ 2 & -9 & 1 & -2 \\ 2 & -8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ Gauß-Verfahren

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -2 & -4 \\ 2 & -9 & 1 & -2 \\ 2 & -8 & 9 & -2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -10 \\ 0 & -2 & 5 & -10 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{matrix}$$

Produkt der Diagonalelemente $= 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-8) = \underline{-24}$

Bei Dreiecksmatrizen $\left(\begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{pmatrix}\right.$ oder $\left.\begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}\right)$ ist Det = Produkt der Diagonalelemente

Beweis: Induktion

$n = 1$ $\det(a) = a$

$n > 1$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ * & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{22} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{= a_{22} \ldots a_{nn}}$ $\square$

BSP

$$\det\begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 4 \\ +7 & -5 & -8 & +7 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

1. Spalte = 4. Spalte

ACHTUNG:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \cdot \det D - \det C \cdot \det B$$

Proposition: Seien $r, s \in \mathbb{N}$, A eine $r \times r$, C ein $s \times r$, D eine $s \times s$ Matrix

Dann gilt $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$

Beweis: Induktion nach r

$r = 1$ $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ C & & D \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Zeile}}{=} a_{11} \cdot \det D$

Sei $r > 1$ $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \overset{\text{E. 1. Zeile}}{=} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} a_{1,j} \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{1j} & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}_{\overset{\text{IV}}{=} \det A_{1j} \cdot \det D}$ $(r-1) \times (r-1)$ $=$

$= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1j} \cdot \det D =$

$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} \right)}_{\det A} \cdot \det D = \det A \cdot \det D$. $\square$

nach 1. Zeile entw.

4) Cramer'sche Regel

A eine $n \times n$-Matrix mit $\det A \neq 0$ $b \in K^n$, $A = (a_1, \ldots, a_n)$

$Ax = b$ hat eindeutige Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $x_j = \dfrac{\det(a_1 \ldots b \ldots a_n)}{\det A}$

20.06.2012
(16. VO)

Proposition: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$, $b \in K^n$. Falls $\det A \neq 0$, dann besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und es gilt $x_j = \dfrac{\det(a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n)}{\det A}$

Beweis:

$\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = n \Rightarrow \operatorname{rg}\underbrace{(A, b)}_{=A'} = n = \operatorname{rg} A$

$\Rightarrow \exists$ Lösung x, allg. Lösung $x + \underbrace{x_h}_{\text{homogene}}$ $\quad \dim\{x : Ax = 0\} = n - \underbrace{\operatorname{rg} A}_{=n} = 0$

$\Rightarrow x_h = 0$. Somit besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung.

$b = Ax = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$

$\det(a_1, \dots, b, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \sum_{k=1}^{n} x_k a_k, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\det(a_1, \dots, \underset{j}{a_k}, \dots, a_n)}_{= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq j \\ \det A & \text{falls } k = j \end{cases}} =$

$= x_j \det A$

$\Rightarrow x_j = \dfrac{\det(a_1, \dots, b, \dots, a_n)}{\det A}$ $\square$

Korollar: $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (b_{j,k})_{j,k=1}^{n}$, wobei $b_{j,k} = (-1)^{j+k} \dfrac{\det A_{j,k}}{\det A}$

Beweis: $A(b_1 \dots b_n) = (Ab_1 \dots Ab_n) \overset{!}{=} \mathrm{id}$

$Ab_k = e_k \overset{C.R}{\Longrightarrow} b_{j,k} = \dfrac{\det(a_1, \dots, e_k, \dots, a_n)}{\det A} \overset{\text{Entw. } j\text{-Spalte}}{=} (-1)^{j+k} \dfrac{\det A_{j,k}}{\det A}$ $\square$

IV Normen & Innere Produkte

Wir betrachten hier nun Vr V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (man könnte auch Vr über $\mathbb{Q}$ zu betrachten)

1) Normierte Räume

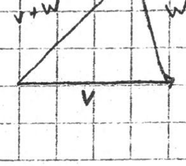
Def.: Sei V ein Vr über $\mathbb{R}$, bzw über $\mathbb{C}$. Dann nennt man eine Fkt $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ $(v \mapsto \|v\|)$ eine Norm, falls

(1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$

(2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(3) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$

(4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$ (Dreiecksungl.)



Man nennt dann $(V, \|\cdot\|)$ einen normierten Vr (normierter Raum).

Bemerkung: Aus (2) – (4) folgt (1), weil:

$$0 = \|0\| = \|v + (-1)v\| \underset{(4)}{\leq} \|v\| + \underbrace{\|(-1)\cdot v\|}_{\underset{(3)}{=} |-1|\cdot\|v\|} = 2\|v\| \implies \|v\| \geq 0$$

Aus der Δ-Ungl. erhält man den linken Teil der Δ-Ungl.

Proposition: $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $v, w \in V$. Dann gilt

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\| \qquad (\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|)$$

Beweis: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Für $x = v$ und $y = w - v$

$$\|w\| \leq \|v\| + \underbrace{\|w - v\|}_{=(-1)(v-w)} = \|v\| + \underbrace{\|(-1)(v-w)\|}_{=|-1|\,\|v-w\| = \|v-w\|} = \|v\| + \|v - w\|$$

$\implies (-1)(\|v\| - \|w\|) = \|w\| - \|v\| \leq \|v - w\|$

Für $x = w$ und $y = v - w$

$\|v\| \leq \|w\| + \|v - w\| \implies \|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$

$\implies \big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\|$

Proposition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für $v, w \in V$ definieren wir

$d(v, w) := \|v - w\| \quad (d: V \times V \to \mathbb{R})$ Dann gelten:

(1) $d(v, w) \geq 0 \quad \forall v, w \in V$

(2) $d(v, w) = 0 \iff v = w$

(3) $d(v, w) = d(w, v) \quad \forall w, v \in V$

(4) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w) \quad \forall v, w, u \in V$ (Δ-Ungl)

(metrischer Raum, d ... Metrik)

Beweis:

(1) $d(v, w) = \|v - w\| \geq 0$

(2) ($\Leftarrow$) $v = w \implies d(v, w) = \underbrace{\|v - w\|}_{=0} = 0$

($\Rightarrow$) $0 = d(v, w) = \|v - w\| \implies v - w = 0 \implies v = w$

(3) $d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1|\,\|w - v\| = \|w - v\| = d(w, v)$.

(4) $d(v, w) = \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w)$.

BSP $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

$|x| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$ ist eine Norm

$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$

[ÜE]

BSP $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

$1 < p < \infty \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}$ ist auch Norm.

BSP $C([0,1],\mathbb{R})$ bzw. $C([0,1],\mathbb{C})$ die Menge der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

•) $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$\|f\|_\infty \geq 0$, $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$

Dreiecksungleichung: Sei $x \in [0,1]$. $|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \underbrace{|g(x)|}_{\leq \|g\|_\infty} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\Rightarrow \|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

•) $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$

$\|f\|_2 \geq 0$, $\|0\|_2 = 0$, $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ (Beweis wie im nächsten BSP.), $\|\lambda f\|_2 = |\lambda|\,\|f\|_2$

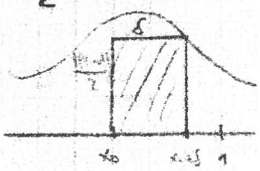
•) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$

$\|f\|_1 \geq 0$, $\|0\|_1 = 0$. Sei $\|f\|_1 = 0$. Ang. $f \neq 0 \Rightarrow \exists x_0$ mit $|f(x_0)| > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0)| - |f(x)| \leq |f(x_0) - f(x)| < \underbrace{\frac{|f(x_0)|}{2}}_{\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0}$

$\Rightarrow |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$ wählen δ so, dass $x - \delta > 0$ oder $x + \delta < 1$

$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \delta \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$ Widerspruch $\Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$



$\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$

$\|f+g\|_1 = \int_0^1 \underbrace{|(f+g)(x)|}_{\leq |f(x)|+|g(x)|} dx \leq \underbrace{\int_0^1 |f(x)| dx}_{= \|f\|_1} + \underbrace{\int_0^1 |g(x)| dx}_{= \|g\|_1} = \|f\|_1 + \|g\|_1$

Def.: $(V, \|\cdot\|)$ normierter V_r

(1) (x_n) Folge in V, $x \in V$. Dann $x_n \to x$ $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right)$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

(2) $(W, \|\cdot\|_{(2)})$ normierter Raum (über selben Körper wie V!), $x_0 \in V$. $f: V \to W$ heißt stetig in x_0, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in V$ mit $\|x - x_0\| < \delta$: $\|f(x) - f(x_0)\|_{(2)} < \varepsilon$

($\Leftrightarrow$ $\forall (x_n) \in V$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$)

Operatornorm, Matrixnorm

$(V, \|\cdot\|)$, $(W, \|\cdot\|)$ normierte Räume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, $\varphi: V \to W$

Man definiert $\|\varphi\| \cdot \sup\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \dfrac{\|\varphi(v)\|_{(2)}}{\|v\|_{(1)}} = \sup\limits_{\substack{v \in V \\ \|v\|_{(1)} = 1}} \|\varphi(v)\|_{(2)}$.

Achtung: $\|\varphi\| = +\infty$ wäre möglich!

Falls nur Abbildungen mit $\|\varphi\| \in \mathbb{R}$ (also $\|\varphi\| \neq +\infty$) betrachtet (beschränkte oder stetige lineare Abbildungen), so erhält man eine Norm und es gilt zusätzlich $\|\varphi_1 \circ \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\|\, \|\varphi_2\|$, für $\varphi_1: V_2 \to V_3$, $\varphi_2: V_1 \to V_2$ weil für $v \in V_1$, $\|v\|_{(1)} = 1$ gilt: $\|(\varphi_1 \circ \varphi_2)(v)\|_{(3)} \overset{*}{\leq} \|\varphi_1\|\, \|\varphi_2(v)\|_{(2)} \leq$
$\leq \|\varphi_1\|\, \|\varphi_2\|\, \underbrace{\|v\|_{(1)}}_{=1} = \|\varphi_1\|\, \|\varphi_2\|$. $\Rightarrow \|\varphi_1 \circ \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\|\, \|\varphi_2\|$.

$*$ $\varphi_1(\underbrace{\varphi_2(v)}_{w})$

$\dfrac{\|\varphi_1(w)\|_{(3)}}{\|w\|_{(2)}} \leq \sup \dfrac{\|\varphi_1(w)\|_{(3)}}{\|w\|_{(2)}} \overset{Def}{=} \|\varphi_1\| \Rightarrow \|\varphi_1(w)\|_{(3)} \leq \|\varphi_1\| \cdot \|w\|_{(2)}$

Man kann zeigen, dass $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $(\mathbb{C})$ stets $\|A\| < +\infty$ ist.

Def.: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_{(2)}$ zwei Normen auf V. Dann heißen $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_{(2)}$ äquivalent, falls $\exists \alpha, \beta > 0$ mit $\alpha \cdot \|v\|_{(1)} \leq \|v\|_{(2)} \leq$
$\leq \beta \cdot \|v\|_{(1)}$ $\forall v \in V$. Äquivalenz von Normen ist Äquivalenzrelation ($\equiv$), weil:

•) $\underbrace{1}_{=\alpha} \|v\| \leq \|v\| \leq \underbrace{1}_{\beta} \cdot \|v\|$, also $\|\ \| \equiv \|\ \|$

•) $\|\ \|_{(1)} \equiv \|\ \|_{(2)} \Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0$: $\alpha \|v\|_{(1)} \leq \|v\|_{(2)} \leq \beta \|v\|_{(1)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \|v\|_{(1)} \leq \|v\|_{(2)} \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|_{(1)}$ und $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0 \Rightarrow \|\ \|_{(2)} \equiv \|\ \|_{(1)}$

•) $\|\ \|_{(1)} \equiv \|\ \|_{(2)}$ und $\|\ \|_{(2)} \equiv \|\cdot\|_{(3)} \Rightarrow \exists \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0$ mit
$\alpha_1 \|v\|_{(1)} \leq \|v\|_{(2)} \leq \beta_1 \|v\|_{(1)}$ und $\alpha_2 \|v\|_{(2)} \leq \|v\|_{(3)} \leq \beta_2 \|v\|_{(2)}$ $\quad \|\ \|_{(1)} \equiv \|\cdot\|_{(3)}$
$\|v\| \cdot \ldots \|v\|_{(2)} \leq \|v\|_{(3)} \leq \beta_2 \|v\|_{(2)} \leq \beta_2 \beta_1 \|v\|_{(1)}$ ... >0 $\beta_1 \beta_2 > 0$

V, $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ äquivalent

21.06.2012
(17.VO)

$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(1)}} x \iff x_n \xrightarrow{\|x\|_{(2)}} x$

<u>Beweis</u>: $(\Rightarrow)$ $\alpha \|v\|_{(1)} \leq \|v\|_{(2)} \leq \beta \|v\|_{(1)}$ für passende $\alpha, \beta > 0$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall n \geq N \quad \|x_n - x\|_{(1)} < \frac{\varepsilon}{\beta}$

Sei $n \geq N$: $\|x_n - x\|_{(2)} \leq \beta \underbrace{\|x_n - x\|_{(1)}}_{< \frac{\varepsilon}{\beta}} < \varepsilon$. Daher $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{(2)}} x$

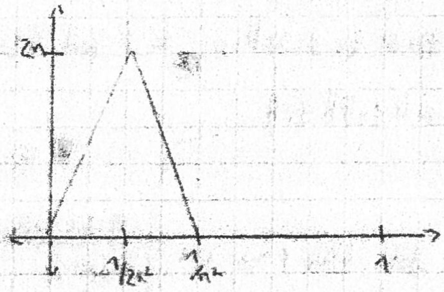
$(\Leftarrow)$ $\|\cdot\|_{(2)}, \|\cdot\|_{(1)}$ äquivalent, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(2)}} x \overset{(1)}{\Rightarrow} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(1)}} x$ $\blacksquare$

BSP $C([0,1],\mathbb{R})$

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$,

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) := \begin{cases} 4n^3 x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2n^2}] \\ 4n - 4n^3 x, & \text{für } x \in [\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{n^2}] \\ 0, & \text{für } x \in [\frac{1}{n^2}, 1] \end{cases}$



$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot 2n = \frac{1}{n} \to 0$

Somit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(1)}} 0$

$\|f_n - 0\|_\infty = 2n \to +\infty$. Daher $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} 0$, deshalb sind $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.

<u>Proposition</u>: Für $x \in \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) gilt $|x| \leq \|x\|_{(1)} \leq \sqrt{n}\,|x|$

<u>Beweis</u>: $\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^2}_{= \sum_{j=1}^n |x_j|^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq j < k \leq n} |x_j||x_k|}_{\geq 0}}$

$\Rightarrow |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \leq \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x\|_1$ $\blacksquare$

Um Äquivalenz aller Normen auf V zz. genügt es zz dass jede Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zum $|\cdot|$ ist.

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zueinander

Beweis: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$

Setze $\gamma := \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|\} > 0$

$\|x\| = \|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \underbrace{\|e_j\|}_{\leq \gamma} \leq \gamma \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |x_j|}_{= \|x\|_{(1)} \leq \sqrt{n}\,|x|}$

$\leq \underbrace{\gamma \sqrt{n}}_{= \beta > 0} |x|$

Wir definieren $f(x) = \|x\|$. f ist stetig, weil:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{\beta} > 0$. Seien x, y so, dass $|x-y| < \delta$.

Dann ist $|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \leq \beta \underbrace{|x-y|}_{< \delta = \frac{\varepsilon}{\beta}} < \varepsilon$,

also ist f stetig.

Setze $C := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$

C abgeschlossen, beschränkt $\Rightarrow$ C kompakt

Satz vom Minimum und Maximum $\Rightarrow$ f besitzt ein Minimum

Setze $\alpha := \min\{\underbrace{\|x\|}_{= f(x)} : x \in C\} > 0$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Falls $x = 0$, dann ist $\|x\| = 0 \geq \alpha \cdot 0 = \alpha |x|$.

Falls $x \neq 0$, dann ist $\frac{1}{|x|} x \in C$, weil $\left|\frac{1}{|x|} x\right| = \frac{1}{|x|} |x| = 1$

$\Rightarrow \alpha \leq \left\|\frac{1}{|x|} x\right\| = \frac{1}{|x|} \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \alpha \cdot |x|$.

Daher ist $\|\cdot\|$ äquivalent zu $|\cdot|$. $\square$

Korollar: Alle Normen auf $\mathbb{C}^n$ sind zueinander äquivalent.

2) Innere Produkte

Def.: Sei V Vr über $\mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$. Eine Fkt. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ heißt inneres Produkt (Skalarprodukt), falls

(1) $\langle \lambda v_1 + v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \quad \forall v_1, v_2, w \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$

(2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ bzw $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (in $\mathbb{C}$) $\quad \forall v, w \in V$

(3) $\langle v,v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ (insbesondere $\langle v,v\rangle \in \mathbb{R}$)
(in $\mathbb{C}$)

(4) $\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0$

Man nennt dann $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ einen Vr mit inneren Produkt (VIP)

<u>Proposition:</u>

(1) $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ VIP über $\mathbb{R}$. Dann

$$\langle v, \lambda w_1 + w_2\rangle = \lambda\langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle \quad \forall w_1, w_2, v \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(2 linear, bilinear)

in $\mathbb{C}$ (2) $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ VIP über $\mathbb{C}$. Dann

$$\langle v_1, \lambda w_1 + w_2\rangle = \bar{\lambda}\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_1, w_2\rangle \quad \forall v_1, w_1, w_2 \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

(sesquilinear)

<u>Beweis:</u> $\langle v, \lambda w_1 + w_2\rangle = \overline{\underbrace{\langle \lambda w_1 + w_2, v\rangle}_{=\lambda\langle w_1,v\rangle + \langle w_2, v\rangle}} = \bar{\lambda}\,\underbrace{\overline{\langle w_1, v\rangle}}_{=\langle v, w_1\rangle} + \underbrace{\overline{\langle w_2, v\rangle}}_{=\langle v, w_2\rangle} =$

$= \bar{\lambda}\langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$. ■

Standard-Inneres Produkt

$\mathbb{R}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = y^t x \qquad (|x| = \sqrt{x^t x})$

$\mathbb{C}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} = \underbrace{y^*}_{=\overline{(y^t)}} x \qquad (|x| = \sqrt{x^* x})$

$$\langle y,x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{y_j \overline{x_j}}_{\overline{x_j \overline{y_j}}} = \overline{\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}} = \overline{\langle x,y\rangle}$$

$$\langle x,x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j \overline{x_j}}_{=|x_j|^2} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$

BSP (i. P. auf $\mathbb{R}^2$)

- $\langle x,y\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$
- $\langle x,y\rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$

<u>Def.</u>: Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ VIP. Für $x \in V$ definiere $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ (in vielen Fällen $\|\cdot\|_2$)

CAUCHY-SCHWARZ'SCHE UNGLEICHUNG

Proposition: Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein VIP. Dann gilt $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$ $\forall v,w\in V$

Beweis:

Seien $v,w\in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$

$$0 \le \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle = \underbrace{\langle v, v-\lambda w\rangle}_{=\langle v,v\rangle - \bar\lambda\langle v,w\rangle} + \lambda \underbrace{\langle w, v-\lambda w\rangle}_{=\langle w,v\rangle - \bar\lambda\langle w,w\rangle} =$$

$$= \|v\|^2 - \bar\lambda\langle v,w\rangle - \lambda\underbrace{\langle w,v\rangle}_{=\overline{\langle v,w\rangle}} + \underbrace{\lambda\bar\lambda}_{=|\lambda|^2}\|w\|^2 =$$

$$= \|v\|^2 - \bar\lambda\langle v,w\rangle - \overline{\bar\lambda\langle v,w\rangle} + |\lambda|^2\|w\|^2$$

Setze $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}$. Dann ist

$$0 \le \|v\|^2 - \frac{1}{\|w\|^2}\underbrace{\overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle}_{=|\langle v,w\rangle|^2} - \frac{1}{\|w\|^2}\underbrace{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}_{=|\langle v,w\rangle|^2} + \underbrace{\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^4}\|w\|^2}_{=\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}}$$

$$= \|v\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2} \le \|v\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\langle v,w\rangle|^2 \le \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v,w\rangle| \le \|v\|\|w\|$$

für $w\neq 0$. Für $w=0$: $\langle v,0\rangle = \langle v,0\cdot v\rangle = \underbrace{\bar 0}_{=0}\langle v,v\rangle = 0$

$|\langle v,\underbrace{w}_{0}\rangle| = 0 \quad \|v\|\underbrace{\|w\|}_{=0}$ ■

Proposition: $\langle v,0\rangle = \langle 0,v\rangle = 0$

Proposition: $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ VIP. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm

Beweis: $\|x\| = \sqrt{\underbrace{\langle x,x\rangle}_{\ge 0}} \ge 0$.

$\|0\| = \sqrt{\underbrace{\langle 0,0\rangle}_{=0}} = 0$, $\|x\|=0 \Rightarrow 0=\|x\|^2 = \langle x,x\rangle \Rightarrow x=0$

$$\|\lambda x\|^2 = \langle\lambda x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,\lambda x\rangle = \underbrace{\lambda\bar\lambda}_{=|\lambda|^2}\underbrace{\langle x,x\rangle}_{=\|x\|^2} = (|\lambda|\,\|x\|)^2$$

$\Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \underbrace{\langle x, x+y\rangle}_{=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle} + \underbrace{\langle y, x+y\rangle}_{=\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle} =$$

$$= \underbrace{\|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=\overline{\langle x,y\rangle}}}_{=2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\leq 2|\langle x,y\rangle|} + \|y\|^2 \leq$$

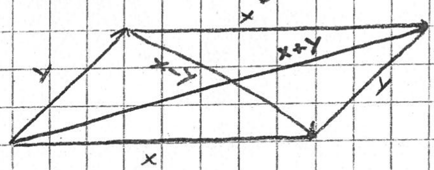
$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 \underset{CS\text{-Ungl}}{\leq} \|x\|\,\|y\|$$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\square$

<u>Satz</u>: Sei V Vr über $\mathbb{R}$ od $\mathbb{C}$ und $\|\cdot\|$ eine Metrik auf V

Dann gibt es genau dann ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, wenn die Parallelogrammidentität gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$



Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ VIP über $\mathbb{R}$. Dann nennt man für $x,y\in V$ $\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ den Winkel zw. x und y

3) Orthogonalität

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ VIP. Dann heißen x,y orthogonal (normal, senkrecht) falls $\langle x,y\rangle = 0$

Nachtrag Bsp. für innere Produkte — 25.06.2012 (18.VO)

$C([a,b],\mathbb{R})$ bzw. $C([a,b],\mathbb{C})$, $a\leq b$

$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, bzw. $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$

ist inneres Produkt weil $\langle f,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \geq 0$

$\langle 0,0\rangle = \int_a^b 0 = 0$

$0 = \langle f,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx$ Indirekt angenommen $f\neq 0$.

$\Rightarrow \exists x_0\in[a,b]$ mit $|f(x_0)|^2 > 0$ Da f stetig ist $|f^2|$ stetig

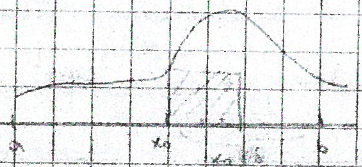
$\Rightarrow \exists\delta > 0$ $x\in[a,b]\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$|f(x_0)|^2 - |f(x)|^2 \leq \left|\,|\lambda f(x_0)|^2 - |f(x)|^2\right| < \frac{|f(x_0)|^2}{2}$

$\Rightarrow |f(x)|^2 \geq \frac{|f(x_0)|^2}{2}$.

Man kann δ so wählen, dass $x_0 - \delta > a$ oder $x_0 + \delta < b$

OBdA. $x_0 + \delta < b$



$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 \geq \frac{|f(x_0)|^2}{2} \delta > 0$$

Widerspruch, somit ist $f = 0$.

$$\langle \lambda f_1 + f_2, g \rangle = \int_a^b \underbrace{(\lambda f_1 + f_2)(x)}_{\lambda f_1(x) + f_2(x)} \overline{g(x)} \, dx =$$

$$= \lambda \int_a^b f_1(x) \overline{g(x)} + \int_a^b f_2(x) \overline{g(x)} = \lambda \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle.$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \underbrace{f(x) \overline{g(x)}}_{= \overline{\overline{f(x)} g(x)}} dx = \overline{\int_a^b \underbrace{\overline{f(x)} g(x)}_{= g(x) \overline{f(x)}} dx} = \overline{\langle g, f \rangle}$$

Somit ist auch $\|f_2\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$ eine Norm.

•) $L^2 = \{ (a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) mit $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}_{= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2}$ konvergiert

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \left(\text{bzw. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}\right)$$

$$\|(a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n||b_n| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \sqrt{\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2}_{\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}} \sqrt{\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2}_{\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}}$$

$$\xRightarrow{\text{Analysis}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \text{ konvergiert} \xRightarrow{\text{Analysis}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergiert}$$

$$\langle \underbrace{\lambda (a_n) + (c_n)}_{= (\lambda a_n + c_n)}, (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + c_n) b_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n =$$

$$= \lambda \langle (a_n), (b_n) \rangle + \langle (c_n), (b_n) \rangle.$$

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n b_n}_{b_n a_n} = \langle (b_n), (a_n) \rangle$$

$$\langle (a_n), (a_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \geq 0, \quad \langle (0), (0) \rangle = 0$$

$$0 = \langle (a_n), (a_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$$

Nachtrag Ende

Def.: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein VIP und sei $M \neq \emptyset$, $M \subseteq V$ (besonders interessant, wenn M Teilraum ist). Dann heißt $M^\perp := \{x \in V : \langle x, v \rangle = 0 \ \forall v \in M\}$ der Orthogonalraum zu M

Prop.: $M^\perp$ ist Teilraum von V

Beweis: $x, y \in M^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $v \in M$

$\langle x, y, v \rangle = \underbrace{\langle x, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, v \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow x + y \in M^\perp$

$\langle \lambda x, v \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, v \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda x \in M^\perp$ Somit ist $M^\perp$ TR. ■

Ab jetzt <u>nur mehr</u> für Teilräume M.

$\{0\}^\perp = V$, $V^\perp = \{0\}$

Prop.: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ VIP, M, M_1, M_2 TR

(1) $M \subseteq (M^\perp)^\perp$

(2) $M_1^\perp + M_2^\perp \subseteq (M_1 \cap M_2)^\perp$

(3) $M_1^\perp \cap M_2^\perp = (M_1 + M_2)^\perp$

Beweis: Proseminar □

BSP

$(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$M := \{(a_n) \text{ nur endlich viele } a_n \neq 0\}$

$M \neq L^2 = V$ weil $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \geq 1} \in L^2$, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2}_{\left(\frac{1}{4}\right)^n} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}} = \frac{1}{3}$ konvergent.

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \geq 1} \in V \setminus M$.

Sei $(b_n) \in M^\perp$, Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

$0 = \langle (b_n), \underbrace{(0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots, 0)}_{\in M} \rangle = b_n$

Somit $M^\perp = \{0\}$. Daher $(M^\perp)^\perp = V$

$M_1 = M$, $M_2 = \{ (c(\frac{1}{2})^n)_{n \geq 1} : c \in \mathbb{R} \}$

$M_1 \cap M_2 = \{0\} \Rightarrow (M_1 \cap M_2)^\perp = V$

$M_1^\perp = \{0\} \Rightarrow M_1^\perp + M_2^\perp = M_2^\perp$

$M_2^\perp \neq V$, weil $((\frac{1}{2})^n)_{n \geq 1} \notin M_2^\perp$, da

$\langle ((\frac{1}{2})^n), \underbrace{((\frac{1}{2})^n)}_{\in M_2} \rangle = \frac{1}{3} \neq 0$.

(siehe oben)

Proposition: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein VIP, M Teilraum,

$A_1 \subseteq M$, $A_2 \subseteq M^\perp$ l.u $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ l.u

Beweis: $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq A_1$, $\{w_1, \dots, w_s\} \subseteq A_2$

$$0 = \sum_{j=1}^{r} M_j w_j \Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{r} (-\lambda_j) v_j}_{\in M} = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \mu_j w_j}_{\in M^\perp}$$

Es ist $M \cap M^\perp = \{0\}$, weil, wenn $v \in M \cap M^\perp \Rightarrow$

$\langle \underset{\in M^\perp}{v}, \underset{\in M}{v} \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Also $0 = \sum_{j=1}^{r} (-\lambda_j) v_j = \sum_{j=1}^{s} \mu_j w_j$.

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \Rightarrow A_1 \cup A_2$ l.u ∎

Def.: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ VIP , $A \in V$

(1) A heißt Orthogonalsystem , falls $0 \notin A$ und $\forall v_1 \neq v_2 \in A$: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

(2) A heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\forall v_1 \neq v_2 \in A$: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$
und $\forall v \in A$ $\|v\| = 1$

(3) A heißt Orthogonalbasis , wenn A Orthogonalsystem und Basis ist.

(4) A heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn A ONS und Basis ist.

Hat jeder endlichdim. VR eine ONB ?

GRAM-SCHMIDT'SCHES-ORTHONORMALISIERUNGSVERFAHREN

Prop.: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ VIP, $n \in \mathbb{N}$, $\{v_1 \dots v_n\} \subseteq V$ l.u. Definiere $w_1 := v_1$ und für $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ definiere $w_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \cdot w_j$. Dann bildet $\{w_1 \dots w_n\}$ ein Orthogonalsystem und $\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\}$ ein ONS

(dividiert man $\tilde{w}_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$ dann vereinfacht sich:

$\{ w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, \tilde{w}_j \rangle \tilde{w}_j)$

Beweis:

Wir zeigen durch Induktion nach k, dass $\{w_1, \dots, w_k\}$ ein Orthogonalsystem ist.

Ind. A: $k = 1$

Sei $k \in \{2, \dots, n\}$: $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ ist ein Orthogonalsystem.

Sei $r \in \{1, \dots, k-1\}$: $\langle \underbrace{w_k}_{= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j}, w_r \rangle = \langle v_k, w_r \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \underbrace{\langle w_j, w_r \rangle}_{= \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq r \\ \langle w_r, w_r \rangle & \text{falls } j = r \end{cases}}$

$$= \cancel{\langle v_k, w_r \rangle} - \cancel{\frac{\langle v_k, w_r \rangle}{\langle w_r, w_r \rangle} \langle w_r, w_r \rangle} = 0.$$

Daher ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ ein Orthogonalsystem und $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\right\}$ ONS ∎

BSP $\quad (C([0,1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}\}$

Gram-Schmidt: $w_1 = 1$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = x - \frac{\overbrace{\int_0^1 x}^{=\frac{1}{2}}}{\underbrace{\int_0^1 1}_{=1}} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$w_2 = 2x - 1$ (schöner zum Rechnen!)

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 =$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2}{\underbrace{\int_0^1 1}_{=1}} 1 - \frac{\int_0^1 2x^3 - x^2}{\int_0^1 4x^2 - 4x + 1} (2x - 1) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 - \underbrace{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}}_{= \frac{1}{2}} (2x - 1) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$w_3 = 6x^2 - 6x + 1$

$\{1, 2x - 1, 6x^2 - 6x + 1\}$ Orthogonalsystem

durch Länge dividieren $\{1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, 6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5}\}$ ONS.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ ONS (Orthogonalsystem) $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ l.u.,
und: $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$. Sei $r \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow 0 = \langle 0, v_r \rangle =$

$$= \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, v_r \rangle = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_r \rangle}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq r \\ \langle v_r, v_r \rangle & \text{für } j = r \end{cases}} = \lambda_r \underbrace{\langle v_r, v_r \rangle}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow \lambda_r = 0$. ∎

Proposition: Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endl. dim Vektorraum mit inneren Produkt

Dann heißt V eine ONB B

Beweis: Da V endlichdim. $\Rightarrow \exists \tilde{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V.
$\tilde{B}$ l.u. Gram-Schmidt $\Rightarrow$ erhalten $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ ONS
$\Rightarrow B$ l.u. (n l.u. Vektoren in V (dim V = n) bilden Basis) $\Rightarrow$
B Basis $\Rightarrow$ B ONB ∎

Proposition: Falls $\{v_1 \dots v_n\}$ ONS ist, dann erhält man durch Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren wieder $\{v_1 \dots v_n\}$

26.06.2012 (19. VO)

Beweis: $k=1$ $w_1 = v_1$

Sei $k \in \{2, \dots, n\}$ $w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j = v_k$ □

Prop.: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endl. dim VIP und sei $\{v_1 \dots v_k\}$ ONS

Dann kann $\{v_1 \dots v_k\}$ zu einer ONB ergänzt werden

Beweis: $\exists v_{k+1}, \dots v_n$ s.d. $\{v_1 \dots v_n\}$ Basis von V ist

Gram-Schmidt $B = \{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots w_n\}$ ONB von V □

Prop.: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endl. dim VIP und $B = \{v_1 \dots v_n\}$ ONB von V

Dann gilt $v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, wobei $x_j = \langle v, v_j \rangle$ $\forall j \in \{1, \dots n\}$

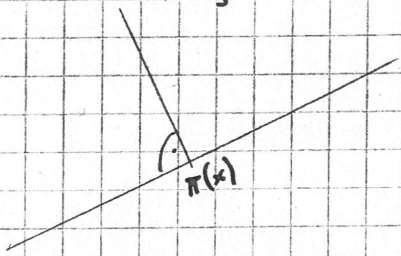
Beweis: $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ $\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq j \\ 1 & \text{falls } k = j \end{cases}}$ □

Proposition: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endl. dim VIP, $M \subseteq V$

Dann gilt $V = M \oplus M^\perp$. Falls $\{v_1 \dots v_r\}$ ONB von M und $\{w_1 \dots w_s\}$ ONB von $M^\perp$ ist, dann ist $\{v_1 \dots v_r, w_1, \dots, w_s\}$ ONB von V.

Proposition: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endl. dim VIP, M_1, M_2 Teilräume $\Rightarrow (M_1 \cap M_2)^\perp = M_1^\perp + M_2^\perp$

Beweis: [im Proseminar]



Orthogonalprojektion $\square$

Def.: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, M Teilraum von V. Man nennt eine lineare Abb. $\pi: V \to M$ $(V \to V)$ Orthogonalprojektion, falls $\forall x \in M$ $\pi(x) = x$ und $\forall x \in V$ $\forall y \in M$ $\langle x - \pi(x), y \rangle = 0$

Es gilt dann $\mathrm{im}\, \pi = M$, $\pi \circ \pi = \pi$ weil für $x \in V$ $(\pi \circ \pi)(v) = \pi(\underbrace{\pi(v)}_{\in M}) = \pi(v)$

Proposition: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ VIP, M Teilraum von V $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB von M (in $\mathbb{C}$: Orthogonalbasis). Dann ist die Orthogonalprojektion π auf M durch $\pi(v) = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle v_j$ gegeben (in $\mathbb{C}$: $\pi(v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} \cdot v_j$)

Beweis:

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle v_j \in M.$$

Sei $v \in M \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \Rightarrow \pi(v) = \sum_{k=1}^{n} \langle \underbrace{v}_{=\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j}, v_k \rangle v_k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{=\begin{cases} 0, \text{ falls } j \neq k \\ 1, \text{ falls } j = k \end{cases}} v_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = v.$$

Sei $v \in V$ und sei $w \in M \Rightarrow w = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k$

$$\langle v - \pi(v), w \rangle = \langle v - \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle v_j, w \rangle = \langle v, w \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle \langle v_j, \underbrace{w}_{=\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k} \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \langle v, v_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \langle v, v_j \rangle \langle v_j, v_k \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \left(\langle v, v_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{=\begin{cases} 0 \text{ falls } j \neq k \\ 1 \text{ falls } j = k \end{cases}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \underbrace{\left(\langle v, v_k \rangle - \langle v, v_k \rangle \right)}_{=0} = 0$$

Orthogonalprojektion in $\mathbb{R}^n$, bzw. $\mathbb{C}^n$, bezüglich Standard-Inneres Produkt $\blacksquare$

Proposition: A Orthogonalprojektion $\Rightarrow \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \forall x,y$

A Orthogonalprojektion auf $\operatorname{im} A = (\ker A)^{\perp}$

$$\langle x - Ax, \underbrace{Ay}_{\in \operatorname{im} A} \rangle = 0 \Rightarrow 0 = \langle x - Ax, Ay\rangle = \langle x, Ay\rangle - \langle Ax, Ay\rangle =$$

$$= \langle \underbrace{Ax}_{\in \operatorname{im} A}, y - Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle Ax, Ay\rangle$$

$$\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$$

$\blacksquare$

A Orthogonalprojektion $A^2 = A$

$\mathbb{R}$: $y^t A^t x = \underbrace{(Ay)^t}_{= y^t A^t} \cdot x = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = y^t Ax$

$\Rightarrow y^t (A^t - A) \cdot x = 0 \Rightarrow A^t = A$

$\mathbb{C}$: $y^* A^* x = (Ay)^* x = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = y^* Ax \Rightarrow A^* = A$

Proposition: (1) in $\mathbb{R}^n$: A Orthogonalprojektion $\Leftrightarrow A^2 = A$ und $\underbrace{A^t = A}_{\text{symm.}}$

(2) in $\mathbb{C}^n$: A Orthogonalprojektion $\Leftrightarrow A^2 = A$ und $\underbrace{A^* = A}_{\text{hermite'sch}}$

($\Rightarrow$) oben gezeigt.

($\Leftarrow$) (2) $M := \operatorname{im} A$ Für $x \in \operatorname{im} A$ gilt: $\exists y$ mit $x = Ay$

$$\Rightarrow \underbrace{Ax}_{= Ay} = \underbrace{A^2}_{= A} y = Ay = x \quad \text{(Projektion auf } M)$$

Sei $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in M \Rightarrow \exists z$ mit $y = Az$

$$\langle x - Ax, \underbrace{y}_{= Az} \rangle = \underbrace{\langle x, Az\rangle}_{= (Az)^* x = z^* A^* x} - \underbrace{\langle Ax, Az\rangle}_{= (Az)^* Ax = z^* A^* Ax} =$$

$$= z^* \underbrace{A^*}_{= A} x - z^* \underbrace{\underbrace{A^*}_{= A} A}_{= A^2 = A} x \stackrel{!}{=} z^* Ax - z^* Ax = 0$$

$\blacksquare$

NACHTRAG zu II. Vektorräume u. lineare Abbildungen,

→ 2.) Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme

Satz: Sei V ein Vektorraum über K, A eine l.u. Teilmenge von V. Dann kann A zu einer Basis ergänzt werden. Insbesondere besitzt jeder Vektorraum eine Basis.

Beweis: Falls $A_1 = A \subseteq A_2 \subseteq \dots$ konstruiert ist, gehe jetzt alle l.u. Teilmengen von V durch. C l.u. Teilmenge: Falls alle bereits konstruierten $A_j \subseteq C$ nehme ich C als neue Menge dazu, sonst nicht.

Erhalten $A_1 = A \subseteq A_2 \subseteq \dots$ l.u.

Setze $B = \bigcup_j A_j$. B ist l.u., weil:

$\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq B \Rightarrow \exists j : \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq A_j \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ l.u.

$\Rightarrow B$ l.u. Angenommen $B \subsetneq C$, C l.u. ↯ Widerspruch zu Konstruktion

B ist maximale l.u. Teilmenge $\Rightarrow$ B ist Basis ■

V, W VR über $\mathbb{Q}$, $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ $\forall v, w \in V \Rightarrow \varphi$ linear

z.B. $\exists$ Fkt $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, aber φ ist nicht linear.

Fassen $\mathbb{R}$ als VR über $\mathbb{Q}$ auf. Besitzt Basis B.

$1, \sqrt{2} \in B$. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\sqrt{2}) = 0$ kann zu einer $\mathbb{Q}$-linear Abb $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausgedehnt werden. Das ist aber nicht linear über $\mathbb{R}$.

Koeffizientenvergleich:

$$\{x^n e^{ax}, x^{n-1} e^{ax}, \dots, e^{ax}, \dots, x^k e^{bx}, \dots\} \quad b < a$$

$$\lambda x^n e^{ax} = \sum \lambda_j \dots = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda + \underbrace{\sum \lambda_j \underbrace{\frac{1}{x^i}}_{\to 0} + \sum \lambda_j x^k \cdot \underbrace{e^{(b-a)x}}_{\text{"}\to 0\text{"}}}_{\to 0} \longrightarrow \lambda \Rightarrow \lambda = 0$$

"→0" nicht zugelassen, weil e schneller konv. als andere Fkt

$x \to +\infty$

$\mathbb{Z}_3$: x^4: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$ $\quad x^4 = x$

VO 20 — 27.6.12

NACHTRAG zu I Vektorräume u. Lineare Abbildungen

→ 1.) Vektorräume

Äußere direkte Summe: V, W VR über K.

$V \times W = \{(v,w) : v \in V, w \in W\}$. Man definiert für $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in K$:

$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ und $\lambda (v_1, w_1) = (\lambda v_1, \lambda w_1)$.

Das nennt man die äußere direkte Summe von V und W.

$V \cong \{(v,0) : v \in V\}$, $W \cong \{(0,w) : w \in W\}$

$V \times W = \tilde{V} \oplus \tilde{W}$

Nachtrag Ende

NACHTRAG zu I Vektorräume u. Lineare Abbildungen

→ 3.) Lineare Abbildungen (S. 30)

Prop. V, W Vektorräume über $K \Rightarrow L(V,W) = \{\varphi : V \to W \text{ linear}\}$ bildet einen Vektorraum.

Beweis: Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\lambda \in K$.

Seien $x, y \in V$, $c \in K$: $(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x + cy) = \underbrace{\varphi_1(x+cy)}_{=\varphi_1(x) + c\varphi_1(y)} + \lambda \underbrace{\varphi_2(x+cy)}_{=\varphi_2(x) + c\varphi_2(y)} =$

$= \underbrace{(\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x))}_{=(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x)} + c\underbrace{(\varphi_1(y) + \lambda\varphi_2(y))}_{=(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(y)} = (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) + c(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(y)$.

Somit ist $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ linear. ∎

Prop. V_1, V_2, V_3 VR über K, $\varphi_1 : V_1 \to V_2$ linear, $\varphi_2 : V_2 \to V_3$ linear. Dann ist $\varphi_2 \circ \varphi_1$ linear ($\varphi_2 \circ \varphi_1 : V_1 \to V_3$)

Beweis: Seien $x, y \in V_1$, $\lambda \in K$

$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x + \lambda y) = \varphi_2(\underbrace{\varphi_1(x + \lambda y)}_{\varphi_1 \text{ lin.} \; \varphi_1(x) + \lambda\varphi_1(y)}) \overset{\varphi_2 \text{ lin.}}{=} \underbrace{\varphi_2(\varphi_1(x))}_{=(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)} + \lambda \underbrace{\varphi_2(\varphi_1(y))}_{=(\varphi_2 \circ \varphi_1)(y)} =$

$= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) + \lambda(\varphi_2 \circ \varphi_1)(y)$. Dabei ist $\varphi_2 \circ \varphi_1$ linear. ∎ Nachtrag Ende

NACHTRAG zu III Determinanten,

→ 1.) Multilineare Abbildungen (S. 43)

Prop. V, W VR über K, $n \in \mathbb{N}$

(1) Menge der n-linearen Abbildungen bildet VR über K.

(2) Menge der alternierenden n-linearen Abbildungen bildet VR über K

Beweis: (1) φ_1, φ_2 n-linear, $\lambda \in K$

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$, $x_1, \dots, x_n \in V$, $y_j \in V$, $c \in K$

$(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x_1, \dots, \underset{j}{x_j + cy_j}, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, \dots, \underset{j}{x_j + cy_j}, \dots, x_n) + \lambda\varphi_2(x_1, \dots, x_j +$

$= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + c\varphi_1(x_1, \dots, \underset{j}{y_j}, \dots, x_n) + \lambda(\varphi_2(x_1, \dots, x_n) + c\varphi_2(x_1, \dots, \underset{j}{y_j}$

$= \underbrace{(\varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \lambda\varphi_2(x_1, \dots, x_n)}_{= (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x_1, \dots, x_n)} + c\underbrace{(\varphi_1(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n) + \lambda\varphi_2(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n))}_{= (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x_1, \dots, \underset{j}{y_j}, \dots, x_n)}$

Deshalb ist $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ multilinear.

(2) φ_1, φ_2 alternierend, $\lambda \in K$. Seien $a_1, \dots, a_n \in V$, $a \in V$, $k \neq j$

$(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(a_1, \dots, \underset{j}{a}, \dots, \underset{k}{a}, \dots, a_n) = \underbrace{\varphi_1(a_1, \dots, \underset{j}{a}, \dots, \underset{k}{a}, \dots, a_n)}_{=0} + \lambda\underbrace{\varphi_2(a_1, \dots, \underset{j}{a}, \dots, \underset{k}{a}}_{=0}$

$= 0 \Rightarrow \varphi_1 + \lambda\varphi_2$ alternierend $\square$

Nachtrag Ende

NACHTRAG zu I Vektorräume u. lineare Abbildungen,

→ 4.) Kern und Bild einer linearen Abbildung (S. 38)

Satz: Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K, dann ist

$V \cong K^n$, wobei $n = \dim_K V$

Beweis: Es gibt eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V

$v \in V \Rightarrow \exists!\ x_1, \dots, x_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, $w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$. Def $\varphi(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

Seien $v, w \in V \Rightarrow \exists\ x_1, \dots, x_n \in K$ $y_1, \dots, y_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, $w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$

$\Rightarrow v + w = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) v_j \Rightarrow \varphi(v+w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= \varphi(v)} + \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{= \varphi(w)} = \varphi(v) + \varphi(w)$.

Sei $v \in V, \lambda \in K \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$.

$\Rightarrow \lambda v = \sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j) v_j \Rightarrow \varphi(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \varphi(v)$.

$\Rightarrow \varphi$ ist linear.

Sei $v \in \ker \varphi \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in K$ mit $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = v \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi(v) = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot v_j = 0$.

Somit ist φ injektiv.

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$. Setze $v := \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$. Dann ist $\varphi(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$.

Daher ist φ surj., also bijektiv und damit ein Isomorphismus. ■

Nachtrag Ende

NACHTRAG zu II. Vektorräume u. lineare Abbildungen

$\Rightarrow$ 6.) QUOTIENTENRÄUME (KEIN PRÜFUNGSSTOFF

Def. Es sei V ein VR über K und W ein Teilraum von V.

Dann nennt man $\frac{V}{W} := \{\underbrace{v + W}_{= \{v + w \mid w \in W\}} : v \in V\}$ den Quotientenraum (Faktorraum)

von V nach W, wobei $(v_1 + W) + (v_2 + W) := (v_1 + v_2) + W$ und

$\lambda (v + W) := \lambda v + W$.

$v_1 + W = v_2 + W \iff v_1 - v_2 \in W$, weil

Beweis $(\Rightarrow)$ $v_1 \in v_2 + W \Rightarrow \exists w \in W \; v_1 = v_2 + w \Rightarrow v_1 - v_2 = w \in W$.

$(\Leftarrow)$ Sei $x \in v_1 + W \Rightarrow \exists w \in W : x = v_1 + w = v_2 + \underbrace{v_1 - v_2}_{\in W} + \underbrace{w}_{\in W} \in v_2 + W$

Aus Symmetriegründen ist $x \in v_2 + W \Rightarrow x \in v_1 + W$. ■

$(v_1 + W) \cap (v_2 + W) \neq \emptyset \Rightarrow v_1 + W = v_2 + W$

Nullelement ist $0 + W = W$, $-(v + W) = -v + W$ weil Def. Quotientenraum

4

Prop. V endlichdimensional, W Teilraum $\Rightarrow \dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$.

Beweis: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von W. $\overset{\text{Steinitz}}{\Longrightarrow} \exists v_{r+1}, \dots, v_{r+s} \in V$ mit $\{v_1, \dots, v_{r+s}\}$ Basis von V, $B = \{\underbrace{v_{r+1} + W, \dots, v_{r+s} + W}_{s\text{-Elemente}}\}$

$\dim W = r$, $\dim V = r + s$

Es genügt jetzt zu zeigen, dass B Basis von $\frac{V}{W}$.

1) l.u.: $\underbrace{\sum_{j=1}^{s} \lambda_j (v_{r+j} + W)}_{\overset{\shortparallel}{W}} = \left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j v_{r+j}\right) + W \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \lambda_j v_{r+j} \in W \Rightarrow \exists \mu_1, \dots, \mu_r \in K$:

$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j v_{r+j} = \sum_{j=1}^{r} \mu_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \lambda_j v_{r+j} + \sum_{j=1}^{r} (-\mu_j) v_j = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0 \; (= \mu_1 = \dots = \mu_r) \Rightarrow B$ ist l.u.

2) Erz. System: Sei $v \in V \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{r+s} \in K$: $v = \sum_{j=1}^{r+s} \lambda_j v_j =$

$= \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_j v_j \Rightarrow v + W = \left(\sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_j v_j\right) + W = \sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_j (v_j + W)$,

also B Erzeugendensystem. Somit B Basis von $\frac{V}{W} \Rightarrow$

$\dim \frac{V}{W} = s = \underbrace{r+s}_{=\dim V} - \underbrace{r}_{=\dim W}$ $\blacksquare$

Prop. Seien V, W Vektorräume über K und $\varphi: V \to W$ linear. Dann ist $\frac{V}{\ker\varphi} \overset{\text{isomorph}}{\cong} \operatorname{im}\varphi$.

Beweis: Wir definieren $\Psi: \frac{V}{\ker\varphi} \to \operatorname{im}\varphi$ durch

$\Psi(v + \ker\varphi) := \varphi(v)$.

$v_1 + \ker\varphi = v_2 + \ker\varphi \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker\varphi \Leftrightarrow 0 = \varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2)$

$\Leftrightarrow \Psi(v_1 + \ker\varphi) = \varphi(v_1) = \varphi(v_2) = \Psi(v_2 + \ker\varphi)$

Daher ist Ψ eine Funktion und injektiv.

$\Upsilon(\underbrace{(v_1+\ker\varphi)+(v_2+\ker\varphi)}_{=(v_1+v_2)+\ker\varphi}) = \varphi(v_1+v_2) = \underbrace{\varphi(v_1)}_{=\Upsilon(v_1+\ker\varphi)} + \underbrace{\varphi(v_2)}_{=\Upsilon(v_2+\ker\varphi)} =$

$= \Upsilon(v_1+\ker\varphi) + \Upsilon(v_2+\ker\varphi)$

$\Upsilon(\underbrace{\lambda(v+\ker\varphi)}_{=\lambda v+\ker\varphi}) = \varphi(\lambda v) = \lambda\underbrace{\varphi(v)}_{=\Upsilon(v+\ker\varphi)} = \lambda\,\Upsilon(v+\ker\varphi)$

Daher ist Υ linear.

Sei $w \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\, v \in V$ mit $\varphi(v)=w \Rightarrow v+\ker\varphi \in \frac{V}{\ker\varphi}$

$\Rightarrow \Upsilon(v+\ker\varphi) = \varphi(v) = w.$

Somit ist Υ surjektiv und injektiv und deshalb ein Isomorphismus.

7.) DUALRÄUME (KEIN PRÜFUNGSSTOFF)

Eine lineare Abbildung $\varphi: V \to K$ nennt man (lineares) Funktional.

Def. Sei V ein Vektorraum über K. Dann nennt man V^* den Raum aller Funktionale (linear) $V \to K$ den Dualraum von V.

V^* ist ein Vektorraum.

Def. V Vektorraum über K, M Teilraum (Teilmenge). Dann nennt man $M^0 = \{f \in V^* : f(v)=0 \ \forall v \in M\}$ der Anihilator von M.

$(M^\perp)$

Was ist Dualraum von K^n? $1\times n$-Matrizen ($M_{1\times n}(K)$)

Zeilenvektoren

Prop. V endlichdim. $\Rightarrow V^* \cong V$.

Def. V, W Vektorräume über K, $\varphi: V \to W$ linear. Dann heißt $\varphi^*: W^* \to V^*$

$\varphi^*(w^*)(v) = w^*(\varphi(v))$ die duale Abbildung zu φ.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & W \arrow[d, "w^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Beweis: $(\varphi^*(w^*))(v_1+\lambda v_2) = w^*(\underbrace{\varphi(v_1+\lambda v_2)}_{=\varphi(v_1)+\lambda\varphi(v_2)}) = \underbrace{w^*(\varphi(v_1))}_{=\varphi^*(w^*)(v_1)} + \lambda\underbrace{w^*(\varphi(v_2))}_{=\varphi^*(w^*)(v_2)} =$

$= \varphi^*(w^*)(v_1) + \lambda\,\varphi^*(w^*)(v_2) \Rightarrow \varphi^*(w^*) \in V^*.$

$$\varphi^*(w_1^* + \lambda w_2^*)(v) = (w_1^* + \lambda w_2^*)(\varphi(v)) = \underbrace{w_1^*(\varphi(v))}_{= \varphi^*(w_1^*)(v)} + \lambda \underbrace{w_2^*(\varphi(v))}_{= \varphi^*(w_2^*)(v)}$$

$$\Rightarrow \varphi^*(w_1^* + \lambda w_2^*) = \varphi^*(w_1^*) + \lambda \varphi^*(w_2^*)$$

Somit ist φ^* linear. ■

Beispiel: $A: K^n \to K^m$ $\quad \varphi(x) = Ax$

Was ist φ^*? $\quad \varphi^*(\underset{\text{Zeilenvektor}}{y}) = yA$.

VO 21 28.6.12

$$\underset{A}{\varphi_1^*} \cdot \underset{B}{\varphi_2^*} \qquad BA$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)^*(w^*)(v) = w^*(\varphi_2(\varphi_1(v))) = (w^* \circ \varphi_2)(\varphi_1(v)) =$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, bend right] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d] & V_3 \arrow[dl, "w^*"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$$= \varphi_1^*\underbrace{(w^* \circ \varphi_2)(v)}_{= \varphi_2^*(w^*(v))} = (\varphi_1^* \circ \varphi_2^*)(w^*(v)) =$$

$$= (\varphi_1^* \circ \varphi_2^*)(w^*)(v)$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$$

Nachtrag Ende

NACHTRAG zu IV Normen und innere Produkte,

→ 2.) Innere Produkte (S. 62)

Prop.: $(V, \|\ \|)$, $x, y \in V$, (λ_n) Folge in $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\lambda_n \to \lambda$. Dann gilt

$\|\lambda_n x + y\| \to \|\lambda x + y\|$.

$(\lambda \mapsto \|\lambda x + y\|$ ist stetig$)$

Bew.: $\big|\|\lambda_n x + y\| - \|\lambda x + y\|\big| \le \|(\lambda_n x + y) - (\lambda x + y)\| =$

$= \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\to 0} \|x\| \to 0 \Rightarrow \|\lambda_n x + y\| \to \|\lambda x + y\|$. ■

Satz: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$.
Dann gibt es genau dann ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ $\forall v \in V$, wenn die Parallelogrammidentität
$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ $\forall v,w \in V$ erfüllt ist.

Beweis:

$(\Rightarrow)$ $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle =$

$$= \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=\|v\|^2} + \cancel{\langle v, w\rangle} + \cancel{\langle w, v\rangle} + \underbrace{\langle w, w\rangle}_{=\|w\|^2} + \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=\|v\|^2} - \cancel{\langle v, w\rangle} - \cancel{\langle w, v\rangle} + \underbrace{\langle w, w\rangle}_{=\|w\|^2} =$$

$$= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

$(\Leftarrow)$ Für $v, w \in V$ definiere:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v-iw\|^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|v + i^k w\|^2$$

$$\|ix\| = \underbrace{|i|}_{=1}\|x\| = \|x\| \quad , \quad \|-x\| = \|x\| \quad , \quad \|-ix\| = \|x\|$$

$$\langle v, 0\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \underbrace{\|v + 0\|^2}_{\|v\|^2} = \frac{1}{4}\left(\|v\|^2 + i\|v\|^2 - \|v\|^2 - i\|v\|^2\right) = 0$$

$$\langle w, v\rangle = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\|w+v\|^2}_{=v+w \; ①} + i\underbrace{\|w+iv\|^2}_{=\|v-iw\|^2 \; ②} - \underbrace{\|w-v\|^2}_{=\|v-w\|^2 \; ③} - i\underbrace{\|w-iv\|^2}_{\|v+iw\|^2 \; ④}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\|v+w\|^2}_{①} - i\underbrace{\|v+iw\|^2}_{④} - \underbrace{\|v-w\|^2}_{③} + i\underbrace{\|v-iw\|^2}_{②}\Big) = \overline{\langle v, w\rangle}$$

$$\langle 0, w\rangle = \overline{\langle w, 0\rangle} = \overline{0} = 0.$$

$$\langle v, v\rangle = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\|v+v\|^2}_{=2v} + i\cancel{\|v+iv\|^2} - \underbrace{\|v-v\|^2}_{=0} - i\underbrace{\|v-iv\|^2}_{=\cancel{\|v+iv\|^2}}\Big) = \|v\|^2$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

$$\langle v, v\rangle = \|v\|^2 \geq 0.$$

$$\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\|v\|^2} = 0 \iff \|v\| = 0 \iff v = 0.$$

$\forall a,b,c \in V$ gilt: $\langle a+c, b\rangle + \langle a-c, b\rangle = 2\langle a,b\rangle$,

weil: $\langle a+c,b\rangle + \langle a-c,b\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|a+c+i^k b\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|a-c+i^k b\|^2 =$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \Big(\underbrace{\|\underbrace{a+c+i^k b}_{(a+i^k b)+c}\|^2 + \|\underbrace{a-c+i^k b}_{=(a+i^k b)-c}\|^2}_{= 2(\|a+i^k b\|^2+\|c\|^2)} \Big) =$$

Parallelogrammidentität

$$= 2\cdot \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|a+i^k b\|^2}_{=\langle a,b\rangle} + 2\cdot\frac{1}{4} \left(\cancel{\|c\|^2} + \cancel{i\|c\|^2} - \cancel{\|c\|^2} - \cancel{i\|c\|^2}\right) =$$

$= 2\cdot\langle a,b\rangle$

Setze $c=a$: $\langle 2a,b\rangle = \langle 2a,b\rangle + \underbrace{\langle 0,b\rangle}_{=0} = 2\langle a,b\rangle$

Seien $v_1,v_2,w\in V$. Setze $a=\frac{v_1+v_2}{2}$, $c=\frac{v_1-v_2}{2}$, $b=w$

$\Rightarrow a+c=v_1$, $a-c=v_2$

$$\langle v_1,w\rangle + \langle v_2,w\rangle = 2\left\langle \frac{v_1+v_2}{2}, w\right\rangle = \Big\langle \underbrace{2\cdot\frac{v_1+v_2}{2}}_{=v_1+v_2}, w\Big\rangle = \langle v_1+v_2,w\rangle.$$

noch z.z. $\langle \lambda v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$

zuerst: $\lambda\in\mathbb{N}_0$:

$\lambda=0$: $\langle 0v,w\rangle = \langle 0,w\rangle = 0 = 0\cdot\langle v,w\rangle$

Sei $\lambda>0$: $\langle \underbrace{\lambda v}_{=(\lambda-1)v+v}, w\rangle = \underbrace{\langle(\lambda-1)v,w\rangle}_{=(\lambda-1)\langle v,w\rangle} + \langle v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$

Jetzt $\lambda\in\mathbb{Z}$: Falls $\lambda<0 \Rightarrow -\lambda\in\mathbb{N}$

$$\langle\lambda v,w\rangle - \lambda\langle v,w\rangle = \langle\lambda v,w\rangle + \underbrace{(-\lambda)\langle v,w\rangle}_{=\langle-\lambda v,w\rangle} = \langle \underbrace{\lambda v - \lambda v}_{=0}, w\rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle\lambda v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$.

Als nächstes $\lambda\in\mathbb{Q}$: $\Rightarrow \exists m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, \lambda=\frac{m}{n}$

$$n\langle\lambda v,w\rangle = \langle \underbrace{n\lambda}_{=m} v,w\rangle = \langle mv,w\rangle = m\langle v,w\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\lambda v,w\rangle = \underbrace{\frac{m}{n}}_{=\lambda}\langle v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle.$$

Jetzt $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$: $\Rightarrow \exists (\lambda_n) \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_n \to \lambda$

$$\langle \lambda_n v, w\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \underbrace{\|\lambda_n v + i^k w\|^2}_{\to \|\lambda v + i^k w\|^2} \to \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|\lambda v + i^k w\|^2 = \langle \lambda v, w\rangle.$$

$$\langle \lambda v, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle \lambda_n v, w\rangle}_{=\lambda_n \langle v, w\rangle} = \lambda \langle v, w\rangle.$$

$$\langle iv, w\rangle = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\|iv + w\|^2}_{=\|v - iw\|^2 \; (1)} + i \underbrace{\|iv + iw\|^2}_{=\|v + w\|^2 \; (2)} - \underbrace{\|iv - w\|^2}_{=\|v + iw\|^2 \; (3)} - i \underbrace{\|iv - iw\|^2}_{=\|v - w\|^2 \; (4)}\Big) =$$

$$= i \, \frac{1}{4}\big(\underset{(2)}{\|v + w\|^2} + i \underset{(3)}{\|v + iw\|^2} - \underset{(4)}{\|v - w\|^2} - i\|v - iw\|^2\big) = i \langle v, w\rangle$$

Zuletzt $\underline{\lambda \in \mathbb{C}}$: $\Rightarrow \lambda = \underset{\in\mathbb{R}}{\alpha} + i \underset{\in\mathbb{R}}{\beta}$

$$\langle \lambda v, w\rangle = \langle \alpha v + i\beta v, w\rangle = \langle \alpha v, w\rangle + \underbrace{\langle i\beta v, w\rangle}_{= i\langle \beta v, w\rangle} =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha v, w\rangle}_{=\alpha\langle v, w\rangle} + i \underbrace{\langle \beta v, w\rangle}_{=\beta\langle v, w\rangle} = \underbrace{(\alpha + i\beta)}_{=\lambda} \langle v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle \quad \blacksquare$$

(juhu :-))

$\mathbb{R}^2$: $\|\cdot\|_1$ nicht von innerem Produkt

$v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $v + w = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v - w = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\|v + w\|_1^2}_{=4} + \underbrace{\|v - w\|_1^2}_{=4} = 8 \neq 2\big(\underbrace{\|v\|_1^2}_{=1} + \underbrace{\|w\|_1^2}_{=1}\big) = 4$$

ebenso die $\|\,\|_\infty$:

$$\underbrace{\|v + w\|_\infty^2}_{=1} + \underbrace{\|v - w\|_\infty^2}_{=1} = 2 \neq 2\big(\underbrace{\|v\|_\infty^2}_{=1} + \underbrace{\|w\|_\infty^2}_{=1}\big) = 4$$

für $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$ $\quad \|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p}$

$$\underbrace{\|v + w\|_p^2}_{=\sqrt[p]{4}} + \underbrace{\|v - w\|_p^2}_{=\sqrt[p]{4}} = 2\sqrt[p]{4} \neq 2\big(\underbrace{\|v\|_p^2}_{=1} + \underbrace{\|w\|_p^2}_{=1}\big) = 4$$