Lineare Algebra und Geometrie für LAK

08.10.2012

V SPEZIELLE OPERATOREN

Operator: $\varphi: V \to V$

$A = (a_{j,k})_{j=1,k=1}^{n_1 \quad n_2}$ $\qquad a_{j,k} = e_j^t \cdot Ae_k = e_j^* Ae_k$

$\varphi: V \to V$ linear, $\mathcal{B}$ Basis $\varphi_{\mathcal{B}} = (\varphi(v_1)_{\mathcal{B}} \dots \varphi(v_n)_{\mathcal{B}})$
$\overset{\shortparallel}{\{v_1 \dots v_n\}}$

$$\varphi(v_j)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } \varphi(v_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

$\mathcal{B}$ ONB

$$(\varphi_{\mathcal{B}})_{k,j} = \langle \varphi(v_j), v_k \rangle$$

1) SYMMETRISCHE OPERATOREN

Def.: Sei $(V, \langle \, , \rangle)$ ein Vektorraum mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Dann heißt eine lineare Abb. $\varphi: V \to V$ symmetrisch (Hermite'sch), falls $\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$ gilt

Proposition: Sei V endlichdimensional und $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist φ genau dann symmetrisch (Hermite'sch) falls $(\varphi_{\mathcal{B}})^t = \varphi_{\mathcal{B}}$ $\quad ((\varphi_{\mathcal{B}})^* = \varphi_{\mathcal{B}})$

Beweis: $(\Rightarrow)$ $((\varphi_{\mathcal{B}})^*)_{j,k} = \overline{(\varphi_{\mathcal{B}})_{k,j}} = \overline{\langle \varphi(v_j), v_k \rangle} =$

$= \langle v_k, \varphi(v_j) \rangle = \langle \varphi(v_k), v_j \rangle = (\varphi_{\mathcal{B}})_{j,k} \quad \forall j,k,$

also $\varphi_{\mathcal{B}}^* = \varphi_{\mathcal{B}}$

$(\Leftarrow)$ Seien $v, w \in V$ $\quad v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \ w_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \ , \ w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$

$$\langle \underbrace{\varphi(v)}_{=\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j}, \underbrace{w}_{=\sum_{j=1}^n \mu_j v_j} \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \mu_k \underbrace{\langle \varphi(v_j), v_k \rangle}_{(\varphi_B)_{k,j}} =$$

$$= (\mu_1 \dots \mu_n)\ \varphi_B \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\quad)^t = (\lambda_1 \dots \lambda_n)\ \underbrace{(\varphi_B)^t}_{=\varphi_B} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_j \underbrace{(\varphi_B)_{k,j}}_{=\langle v_k, \varphi(v_j) \rangle} = \langle \underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k}_{=v}, \varphi(\underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_j v_j}_{=w}) \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle \quad \square$$

<u>Korollar:</u> A symmetrisch $\Leftrightarrow A^t = A$

(Hermite'sch) $\quad A^* = A$

Man nennt eine $n \times n$ - Matrix über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) symmetrisch (Hermite'sch), falls $A^t = A$ ($A^* = A$)

<u>Proposition:</u> A symmetr. / Hermite'sch

(1) A^t und A^* sind symm. / Hermit'sch

(2) Falls A invertierbar, dann ist A^{-1} symmetr. / Hermite'sch

<u>Beweis:</u> (1) $(A^t)^* = \overline{(A^t)^t} = \underbrace{\overline{A}}_{=(\overline{A}^t)^t} = (A^*)^t = A^t$

$A^* = A \Rightarrow$ Hermite'sch

(2) $(A^{-1})^t = \underbrace{(A^t)}_{=A}{}^{-1} = A^{-1} \quad \square$

A, B symmetr. $\not\Rightarrow AB$ symmetr.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A heißt schiefsymmetrisch (schief-Hermite'sch), falls $A^t = -A$ (in $\mathbb{C}$ $A^* = -A$)

Def.: Sei A eine symmetrische (Hermite'sche) $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Dann heißt A

(1) positiv definit:, falls $x^t A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ($x^* A x > 0 \; \forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$)

$(\langle \varphi(x), x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0)$

(2) positiv semidefinit falls $x^t A x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ ($x^* A x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{C}^n$)

$(\langle \varphi(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x)$

(3) negativ definit falls $x^t A x < 0 \quad \forall x \neq 0$ ($x^* A x < 0 \; \forall x \neq 0$)

$(\langle \varphi(x), x \rangle < 0 \quad \forall x)$

(4) negativ semidefinit, falls $x^t A x \leq 0 \;\; \forall x$ ($x^* A x \leq 0 \;\; \forall x$)

$(\langle \varphi(x), x \rangle \leq 0 \quad \forall x)$

(5) indefinit, falls $\exists x \neq 0, \exists y \neq 0$ mit

$x^t A x > 0$ und $y^t A y < 0$ ($x^* A x > 0$ und $y^* A y < 0$)

$(\langle \varphi(x), x \rangle > 0, \langle \varphi(y), y \rangle < 0)$

Proposition: A positiv definit oder negativ definit $\Rightarrow$ A invertierbar

Beweis: A inj. $n = \dim V = \underbrace{\dim \ker A}_{=0} + \dim \operatorname{im} A \rightarrow \dim \operatorname{im} \varphi = n$

$\Rightarrow \operatorname{im} A = V$, also A surj. Daher ist A invertierbar. $\square$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 23 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x^t A x = 3x_1^2 + x_2^2 + 23x_3^2 + 2x_1x_2 + 14x_1x_3 + 6x_2x_3 =$

$= (x_2 + x_1 + 3x_3)^2 + 2x_1^2 + 14x_3^2 + 8x_1x_3 =$

$= x_2^2 + x_1^2 + 9x_3^2 + 2x_2x_1 + 6x_2x_3 + 6x_1x_3$

$= (x_2 + x_1 + 3x_3)^2 + \underbrace{2(x_1 + 2x_3)^2}_{=2x_1^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_3} + 6x_3^2$

$x \neq 0 \rightarrow$ 1. Fall: $x_3 \neq 0$: $\underbrace{(x_2 + x_1 + 3x_3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2(x_1 + 2x_3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{6x_3^2}_{> 0} > 0$

2. Fall: $x_3 = 0$ und $x_1 \neq 0$ $\underbrace{(\;)}_{\geq 0} + \underbrace{(\;)}_{> 0} + \underbrace{(\;)}_{= 0} > 0$

3. Fall: $x_3 = 0$ und $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 \neq 0$ $\underbrace{(\;)}_{> 0} + \underbrace{(\;)}_{= 0} + \underbrace{(\;)}_{= 0} > 0$

Somit ist A positiv definit.

09.10.2012
(2.VO)

BSP $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$x^t A x = -x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2 = \underbrace{-(x_1-2x_2)^2}_{=-x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2}$$

$$= -\underbrace{(x_1-2x_2)^2}_{\geq 0} \leq 0$$

A ist negativ semidefinit

$\binom{2}{1}^t A\cdot\binom{2}{1}=0$ daher nicht neg. definit.

BSP $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 13\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$x^t A x = x_1^2+8x_1x_2+13x_2^2 =$$

$$= \underbrace{(x_1+4x_2)^2}_{=x_1^2+8x_1x_2+16x_2^2}-3x_2^2$$

$\binom{1}{0}^t\cdot A\cdot\binom{1}{0}=1>0$

$\binom{4}{-1}^t\cdot A\cdot\binom{4}{-1}=-3<0$ also A ist indefinit

2) ORTHOGONALE OPERATOREN

Def.: Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein VR mit IP über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Eine lineare Abb. $\varphi: V\to V$ heißt orthogonal (unitär), falls $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ $\forall x,y\in V$

Bemerkung: Es gilt dann auch $\|\varphi(x)\|=\|x\|$ $\forall x\in V$, weil

$$\|\varphi(x)\|^2=\langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle=\langle x,x\rangle=\|x\|^2$$

Proposition: Sei φ orthogonal (unitär)

(1) φ ist injektiv

(2) Falls V endlichdim. ist, dann ist φ invertierbar

Beweis: (1) Sei $x\in\ker\varphi \Rightarrow \varphi(x)=0 \Rightarrow 0=\|\varphi(x)\|=\|x\| \Rightarrow x=0$

also $\ker\varphi=\{0\}$ und damit φ injektiv

(2) $\underbrace{n}_{=\dim V}=\underbrace{\dim\ker\varphi}_{=0}+\dim\operatorname{im}\varphi \Rightarrow \operatorname{im}\varphi=V$

Somit ist φ surjektiv und damit invertierbar

Proposition: Sei V endlich dim. $\varphi: V \to V$ linear und $B = \{v_1 \dots v_n\}$ eine ONB von V. Dann ist φ genau dann orthogonal (unitär) wenn $(\varphi_B)^t = (\varphi_B)^{-1}$ $\left((\varphi_B)^* = (\varphi_B)^{-1}\right)$

Beweis: $(\Rightarrow)$ $\left((\varphi_B)^* \varphi_B\right)_{j,k} = \langle (\varphi_B)^* \varphi_B (v_k), v_j \rangle =$

$$= \underbrace{e_j^* (\varphi_B)^*}_{=(\varphi_B e_j)^*} \varphi_B e_k = \langle \varphi_B(v_k), \varphi_B(v_j) \rangle =$$

$$= \langle v_k, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j \\ 0, & \text{falls } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\left((\varphi_B)^* \varphi_B\right)_{j,k} = (id)_{j,k} \Rightarrow \varphi_B^* \varphi_B = id$$

$$\Rightarrow \varphi_B^* = \varphi_B^{-1}$$

$(\Leftarrow)$ $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \qquad w = \sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k$

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(v_j) \qquad \varphi(w) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \varphi(v_k)$$

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle \varphi_B v_B, \varphi_B w_B \rangle = w^* \underbrace{\varphi_B^* \varphi_B}_{=id} v_B = w_B^* v_B =$$

$$= \langle v_B, w_B \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \square$$

Auch im Unendlichdimensionalen gilt φ orthogonal (unitär)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ ONS B ist $\{\varphi(b) : b \in B\}$ ONS

Def.: Eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) heißt orthogonal (unitär), falls $A^t = A^{-1}$ $(A^* = A^{-1})$

Proposition: Seien A, B orthogonal (unitär)

(1) A^t und A^* sind orthogonal (unitär)

(2) A^{-1} ist orthogonal (unitär)

(3) AB ist orthogonal (unitär)

Beweis: (1) $(A^t)^* = (\underbrace{A^*}_{A^{-1}})^t = (A^t)^{-1}$

$$(A^*)^* = A = (\underbrace{A^{-1}}_{=A^*})^{-1} = (A^*)^{-1}$$

(2) $(A^{-1})^* = \overline{(A^{-1})}^t = \overline{(A^t)}^{-1} = \overline{(A^t)}^{-1} = (\underbrace{\bar{A}^t}_{=A^*})^{-1} = \underbrace{(A^*)^{-1}}_{=A^{-1}} =$

$= A = (A^{-1})^{-1}$

(3) $(AB)^* = B^* A^* = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$ □

Für orthogonale oder unitäre Matrizen gilt im Allg. NICHT: $AB = BA$

Proposition: Für eine reelle (komplexe) $n\times n$-Matrix sind äquivalent:

(1) A ist orthogonal (unitär) ((1a) $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$)

(2) $|Ax| = |x| \quad \forall x$

(3) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis

(4) Die Zeilenvektoren von A bilden eine ONB

$\Big($ (5) $\forall$ONB $\mathcal{B}$ ist $\{Av, v\in\mathcal{B}\}$ eine ONB

(6) $\exists$ONB $\mathcal{B}$ mit $\{Av, v\in\mathcal{B}\}$ ist ONB $\Big)$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) bereits gezeigt:

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\underbrace{(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2)}_{=\sum_{k=0}^{3} i^k \|x+i^k y\|^2}$$

$$\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k |\underbrace{Ax + i^k Ay}_{A\cdot(x+i^k y)}|^2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{3} i^k \underbrace{|A(x+i^k y)|^2}_{|x+i^k y|^2} = \langle x, y\rangle$$

$$A^* = A^{-1}$$

(1) $\Rightarrow$ (3)

$A = (a_1 \dots a_n)$, $\quad a_j = Ae_j$

Sei $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad |a_j| = |Ae_j| = |e_j| = 1$

Seien $j, k \in \{1, 2 \dots, n\}$ mit $j \neq k$ $\quad \langle a_j, a_k\rangle = \langle Ae_j, Ae_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle = 0$

Somit ist $\{a_1 \dots a_n\}$ eine ONB

(3) $\Rightarrow$ (1)

$A = (a_1 \dots a_n)$, $\{a_1 \dots a_n\}$ ist ONB

$$(A^*A)_{j,k} = a_j^* a_k = \langle a_k, a_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=j \\ 0 & \text{falls } k \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow A^*A = id$, daher $A^* = A^{-1}$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) weil A orthogonal / unitär $\Leftrightarrow$ A^t orthogonal / unitär $\square$

BSP $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal

$$AB = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad BA = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq AB$$

Sei $\mathcal{S}$ Standardbasis, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ONB

$S = S_{\mathcal{B} \to \mathcal{S}} = (v_1\ v_2 \dots v_n)$

$A_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$

S ist orthogonal (unitär), weil Spaltenvektoren ONB

$$\boxed{A_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S = \begin{cases} S^t A S \\ S^* A S \end{cases}}$$

$$1 = \det id = \det A^* A = \det A^* \cdot \det A = \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2$$

$$\underbrace{\det \overline{A^t}}_{\det \overline{A^t} = \overline{\det A}}$$

kompl. Einheitskreis

$\Rightarrow |\det A| = 1 \quad \forall$ unitären Matrizen A

A orthogonal: $\det A \in \{1, -1\}$

15.10.2012 (3. VO)

3) NORMALE MATRIZEN

Def.: Eine $n \times n$-Matrix (komplex oder reell) heißt normal, falls

$A^*A = A \cdot A^*$ (im Reellen: $A^tA = A \cdot A^t$)

Bemerkung: symmetrische Matrizen $(A^t = A \Rightarrow A^tA = A^2 = A \cdot A^t)$

Hermite'sche $(A^* = A \Rightarrow A^*A = A^2 = A \cdot A^*)$

schiefsymmetrische (schief-Hermite'sche) Matrizen und orthogonale (unitäre) Matrizen sind normal $(A^* \cdot A = id = A \cdot A^*)$

Proposition: Eine Matrix genau dann normal, wenn

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle \quad \forall x,y$$

Beweis: $(\Rightarrow)$ $\langle Ax, Ay\rangle = \underbrace{(Ay)^*}_{=y^*A^*}(Ax) = y^*\underbrace{A^*A}_{=AA^*}x = \underbrace{y^*A}_{=y^*(A^*)^* = (A^*y)^*}A^*x =$

$$= (A^*y)^*(A^*x) = \langle A^*x, A^*y\rangle$$

$(\Leftarrow)$ $(A^*A)_{j,k} \cdot \underbrace{e_k^* A^*}_{=(Ae_k)^*}A \cdot e_j = \langle Ae_j, Ae_k\rangle = \langle A^*e_j, A^*e_k\rangle =$

$$= e_k AA^* e_j = (AA^*)_{j,k} \quad \text{also } A^*A = AA^* \quad \square$$

Proposition: A normal, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ONB

$$\Rightarrow (A_B)^* A_B = A_B (A_B)^*$$

Beweis: $\exists$ unitäre (orthogonale) Matrix S mit $A_B = S^*AS$

$$(A_B)^*A_B = S^*A^*\underbrace{SS^*}_{=id}AS = S^*\underbrace{A^*A}_{AA^*}S = S^*A\underbrace{id}_{=SS^*}A^*S = \underbrace{S^*AS}_{=A_B}\underbrace{S^*A^*S}_{=(S^*AS)^* = (A_B)^*}$$

$$= A_B \cdot (A_B)^* \quad \square$$

$\varphi: V \to W$ adjungierter Operator: $\langle v, \varphi^*(w)\rangle = \langle \varphi(v), w\rangle \quad \forall v, w$

Im endlichdim. $\exists!$ adj. Operator

φ normal $\Leftrightarrow$ $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(y)\rangle \quad \forall x,y$

BSP:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^*A, \text{ also } A \text{ nicht normal}$$

Proposition: A normal

(1) A^t und A^* sind normal

(2) falls A invertierbar $\Rightarrow$ A^{-1} ist normal

Beweis: (1) $\underbrace{(A^t)^*}_{=(A^*)^t}A^t = \underbrace{(AA^*)^t}_{=A^*A} = A^t\underbrace{(A^*)^t}_{=(A^t)^*} = A^t(A^t)^*$

(2) $\underbrace{(A^{-1})^*}_{(A^*)^{-1}}A^{-1} = \underbrace{(AA^*)^{-1}}_{=A^*A} = A^{-1}\underbrace{(A^*)^{-1}}_{=(A^{-1})^*} = A^{-1}(A^{-1})^* \quad \square$

AB muss nicht mehr normal sein, falls A, B normal

BSP: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (AB)^* AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 17 \end{pmatrix},$$

$$AB \cdot (AB)^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{pmatrix} \neq (AB)^* AB,$$

also AB nicht normal

4) VANDERMONDT'SCHE DETERMINANTE

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$$

$$\left(= (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_1) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_2 - x_1) \right)$$

Beweis: Induktion nach n

$n = 1$ $\quad \det(1) = 1 = \underbrace{\prod_{1 \le j < k \le n}}_{\text{leere Menge}} (x_k - x_j) = 1$

Sei $n > 1$. $\quad A =$ siehe Prop oben

1\. Beweis: Behauptung: Für $0 \le k < n$ gilt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_{n-1}^k & x_n^k \\ x_1^k(x_1 - x_n) & x_2^k(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^k(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ x_1^{k+1}(x_1 - x_n) & x_2^{k+1}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{k+1}(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Bew. der Beh.</u>: „umkehrte Induktion"

für $k = n-1$ $\det A = \det A$ ✓

Sei $k < n-1$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^k & \cdots & x_{n-1}^k & x_n^k \\ x_1^{k+1} & \cdots & x_{n-1}^{k+1} & x_n^{k+1} \\ x_1^{k+1}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{k+1}(x_{n-1}-x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0 \end{pmatrix} \quad -x_n \text{ mal der Zeile} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^k & \cdots & x_{n-1}^k & x_n^k \\ x_1^{k+1} - x_n x_1^k = x_1^k(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{k+1} - x_n x_{n-1}^k = x_{n-1}^k(x_{n-1}-x_n) & 0 \\ x_1^{k+1}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{k+1}(x_{n-1}-x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0 \end{pmatrix} \quad \diamond$$

Für $k=0$: $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1(x_1-x_n) & \cdots & 1(x_{n-1}-x_n) & 0 \\ x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0 \end{pmatrix}$ entwickeln nach n-ter Spalte $=$

$$= (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1(x_1-x_n) \\ x_1(x_1-x_n) \\ \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) \end{matrix}}_{=(x_1-x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1^{n-2} \end{pmatrix}} & \underbrace{\cdots}_{=(x_2-x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2^{n-2} \end{pmatrix}} & \underbrace{\begin{matrix} 1(x_{n-1}-x_n) \\ x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) \end{matrix}}_{=(x_{n-1}-x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{(-1)^{n-1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}-x_n)}_{=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}}_{=\prod_{1 \le j < k \le n-1} (x_k - x_j)}$$

$$= \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$$

2. Beweis: $p(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix}$

Falls $\exists\, j \neq k$ mit $x_j = x_k \Rightarrow \det A = 0 = \prod_{1 \le r < s \le n} (x_s - x_r)$

Ang. $\forall j \neq k$ ist $x_j \neq x_k$: $p(x)$ Polynom vom Grad $\le n-1$ (entwickeln nach letzter Spalte)

Sei $j \in \{1, \dots, n-1\}$ $p(x_j) = 0 \Rightarrow p(x) = c \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$

$c = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}$ (entwickeln nach letzter Spalte) =

$= \prod_{1 \le j < k \le n-1} (x_k - x_j)$

$\Rightarrow \det A = p(x_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$ $\square$

VI ANALYTISCHE GEOMETRIE

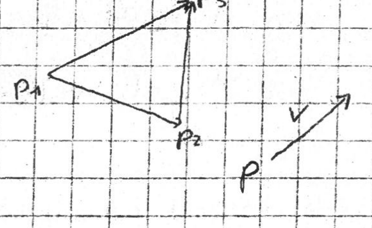
- Affine Geometrie (belieb. dimensional über K – spannend ist $\mathbb{R}^n$)
- Euklidische Geometrie (belieb. dimensional über $\mathbb{R}$ (würde auch über $\mathbb{C}$ gehen) – spannend ist $\mathbb{R}^n$
- Projektive Geometrie („$\mathbb{R}^n$" (würde auch belieb. dim. über K gehen))

1) AFFINE GEOMETRIE

Def.: Es sei V ein Vektorraum über K. Eine nichtleere Menge A (eigentl. $(A, \vec{\ })$) heißt affiner Raum (bez. V, über K), falls es eine Funktion $\vec{\ }: A \times A \to V$ ($(p,q) \mapsto \vec{pq}$) gibt mit:

(1) $\forall p_1, p_2, p_3 \in A$: $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = \overrightarrow{p_1p_3}$

(2) $\forall p \in A$ $\forall v \in V$: $\exists!\, q \in A$ mit $\vec{pq} = v$



werden „zeigen": ·) $A = V$ $(\vec{pq} = q - p)$

·) V endlichdim $A = K^n$ $(\mathbb{R}^n)$

Proposition: Sei $(A, \vec{\ })$ affiner Raum bez. V über K und sei $x_0 \in A$

Zu jedem $v \in V$ $\exists!$ $\varphi(v) \in A$ mit $\overrightarrow{x_0 \varphi(v)} = v$

Es gilt dann $\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = q - p$ und φ ist bijektiv

Beweis: Ang. $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) \Rightarrow p_1 = \overrightarrow{x_0 \varphi(p_1)} = \overrightarrow{x_0 \varphi(p_2)} = p_2 \Rightarrow \varphi$ injektiv

Sei $y \in A$: $\overrightarrow{x_0 y} \in V$, $\varphi(\overrightarrow{x_0 y}) = y$ also φ surjektiv $\Rightarrow$ bijektiv

$$\overrightarrow{x_0 \varphi(p)} + \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \underbrace{\overrightarrow{x_0 \varphi(q)}}_{=q} \Longrightarrow \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = q - p \quad \square$$

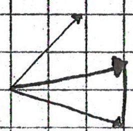
16.10.2012
(4. VO)

$\dim A = \dim V$

Koordinatensystem:

Proposition: Sei $(A, \vec{\ })$ affiner Raum bezüglich endl. dim VR V (über K)

Es sei $x_0 \in A$ und sei $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V



Definiere: $\varphi: A \to K^n$ durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } \overrightarrow{x_0 x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

Es ist wieder φ bijektiv

Beweis: ist wirklich Fkt., weil A affiner Raum und $\{v_1 \dots v_n\}$ Basis

Es sei $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ $\quad \overrightarrow{x_0 x_1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \overrightarrow{x_0 x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Daher ist φ injektiv

Sei $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n \Rightarrow w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \in V$

$\Rightarrow \exists x \in A$ mit $\overrightarrow{x_0 x} = w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \Rightarrow \varphi(x) = v$

Somit ist φ surjektiv und damit bijektiv

Def.: Sei A ein affiner Raum bezügl. V (über K). Eine nichtleere Teilmenge M von A heißt affiner Teilraum von A, falls es einen Teilvektorraum W von V gibt, sodass $(M, \vec{\ })$ affiner Raum bezügl. W ist.

Wir können annehmen, dass $A = V$. Es ist dann $M = x_0 + W = \{x_0 + w, w \in W\}$

Wähle $x_0 \in M$

BSP: $M := \left\{ \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix} : t\in\mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ dim M = 1 affiner TR

$M := \left\{ x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 118 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ dim M = 2 affiner TR

$M := \underbrace{\left\{ x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 \right\}}_{=\emptyset} \subseteq \mathbb{R}^2$ kein affiner TR

M ist affiner TR $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in M$ auch die Verbindungsgerade in M ist.

$M := \left\{ x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : x_1 + 3x_2 \geq 5 \right\}$ ist kein affiner TR

$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \in M$, $\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} \in M$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ liegt auf Verbindungsgerade von $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

aber $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \notin M$

$M := \left\{ x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : \underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 12x_2 + 31}_{=(x_1-2)^2 + (x_2+6)^2 - 9} = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Kreis von $\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ mit Radius 3, ist kein affiner TR, weil $\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix} \in M$, $\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix} \in M$,

$\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ auf Verbindungsgerade, aber $\notin M$

Man nennt affiner TR M von V mit dim V=n

Punkt.... dim M=0

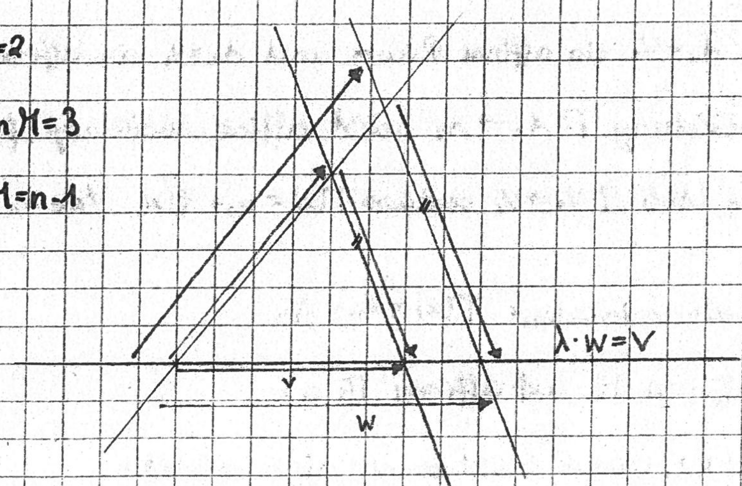
Gerade... dim M=1

Ebene ... dim M=2

3-dim Raum... dim M=3

Hyperebene... dim M=n-1

im affinen Raum Länge weggeschmissen



Strahlensatz:

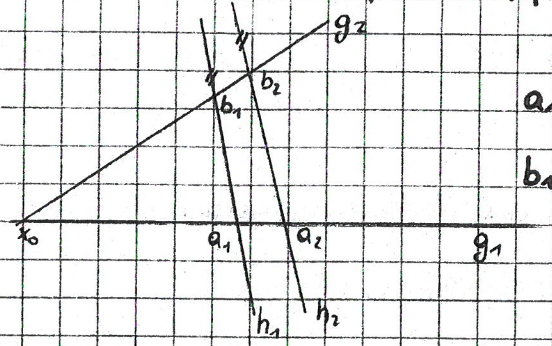
Satz: Sei A affiner Raum (A=V), g_1 und g_2 seien verschiedene Geraden von A, die sich in x_0 schneiden. Weiters seien h_1 und h_2 parallele Geraden, so dass $g_1 \cap h_1 = \{a_1\}$, $g_1 \cap h_2 = \{a_2\}$, $g_2 \cap h_1 = \{b_1\}$, $g_2 \cap h_2 = \{b_2\}$ und $x_0 \notin \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Dann gibt es ein $\lambda \in K$ mit $a_2 - x_0 = \lambda \cdot (a_1 - x_0)$, $b_2 - x_0 = \lambda \cdot (b_1 - x_0)$ und $b_2 - a_2 = \lambda \cdot (b_1 - a_1)$

Def.: Sei A affiner Raum. $H_1 = x_1 + W_1$ und $H_2 = x_2 + W_2$ affine Teilräume

Dann heißen H_1 und H_2 parallel, falls $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$

Beweis:



$a_1 - x_0 = v$

$b_1 - x_0 = w$

$\{v, w\}$ l.u., weil Geraden verschieden

(ansonsten Vielfache voneinander)

$b_1 - a_1 = w - v$

$\exists \lambda : a_2 - x_0 = \lambda \cdot (a_1 - x_0) = \lambda v$

$\exists \mu_1 : b_2 - x_0 = \mu_1 (b_1 - x_0) = \mu_1 w$

$\exists \mu_2 : b_2 - a_2 = \mu_2 \cdot (b_1 - a_1) = \mu_2 (w - v)$

$$0 = \underbrace{(a_2 - x_0)}_{=\lambda v} + \underbrace{(b_2 - a_2)}_{\mu_2 w - \mu_2 v} + \underbrace{(x_0 - b_2)}_{= -(b_2 - x_0) = -\mu_1 w}$$

$$= (\lambda - \mu_2) \cdot v + (\mu_2 - \mu_1) w$$

$$\overset{\{v,w\} \text{ l.u}}{\Longrightarrow} \quad \lambda - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \mu_2$$

$$\mu_2 - \mu_1 = 0 \quad \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \lambda \qquad \square$$

Def.: Seien $A_1 = V_1$ ein affiner Raum und $A_2 = V_2$ ein affiner Raum (jeweils über K)

Eine Abbildung $T: A_1 \to A_2$ heißt affine Abbildung, falls $\exists x_0 \in A_2$ und

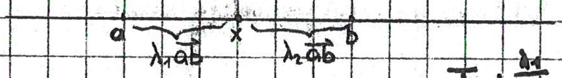
$\exists$ lineare Abb. $\varphi: V_1 \to V_2$ sodass $T(x) = x_0 + \varphi(x) \quad \forall x \in A_1$

Im endlichdimensionalen: $T(x) = x_0 + Ax$

T bildet affinen TR auf affinen TR ab.

Falls T bijektiv, dann bleibt auch dim. erhalten.

Teilverhältnis:



$TV: \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$

Def.: Sei A affiner Raum, a, b und x drei voneinander verschiedene Pkte, die auf einer Geraden

λ kann 0 & 1 nicht annehmen | division ratio

liegen. Es ist dann $x - a = \lambda \cdot (b - a)$. Dann heißt $DR(a, b; x) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ das Teilverhältnis von

a und b:

$$x - a = \lambda (b - a) = \lambda b - \lambda a \Rightarrow x = (1-\lambda) a + \lambda b \qquad TV: \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Proposition: T affin. a, b, x verschieden auf einer Geraden und

$T(a) \neq T(b)$. Dann gilt $DR(T(a), T(b); T(x)) = DR(a, b, x)$

Beweis: $T(y) = x_0 + \varphi(y)$

$$x - a = \lambda \cdot (b - a)$$

$$T(x) - T(a) = \varphi(x) - \varphi(a) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \varphi(\underbrace{x-a}_{=\lambda(b-a)}) = \lambda \cdot \varphi(b-a) =$$

$$= \lambda\left(x_0 + \varphi(b) - (x_0 + \varphi(a))\right) = \lambda \cdot (T(b) - T(a))$$

$$DR(T(a), T(b); T(x)) = \frac{\lambda}{1-\lambda} = DR(a, b; x) \qquad \square$$

Teilverhältnis von $1 \Leftrightarrow$ wenn x genau in der Mitte von a und b

BSP: $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

$b - a = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $x - a = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot (b - a)$

$DR(a, b; x) = \frac{3/2}{1 - 3/2} = -3$ (negativ wenn x nicht zw. a und b)

22.10.2012
(5. VO)

Def.: Sei $A (= V)$ ein affiner Raum; $a, b, x, y \in A$ verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen
die auf einer Geraden liegen. Dann nennt man

$CR(a, b; x, y) := \frac{DR(a, b; x)}{DR(a, b; y)}$ das Doppelverhältnis von

x und y bezügl. a und b (cross-ratio)

$x = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda) a + \lambda b$

$y = a + \mu(b - a) = (1 - \mu) a + \mu b$

$CR(a, b; x, y) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1-\mu}{\mu}$

Man nennt a, b, x und y in harmonischer Lage, falls

$CR(a, b; x, y) = -1$

Proposition: A_1, A_2 aff. R., $T: A_1 \to A_2$ aff. Abb.,

$a, b, x, y \in A_1$ verschieden und auf einer Geraden und $T(a) \neq T(b)$

Dann gilt: $CR(T(a), T(b); T(x), T(y)) = CR(a, b; x, y)$

Beweis: $CR(T(a),T(b);T(x),T(y)) = \dfrac{DR(T(a),T(b);T(x))}{DR(T(a),T(b);T(y))}$

$$= \frac{DR(a,b;x)}{DR(a,b;y)} = CR(a,b;x,y) \quad \square$$

BSP

$$a=\begin{pmatrix}-13\\-5\\9\\-7\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}23\\7\\-15\\17\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}11\\3\\-7\\9\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}-4\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}-13\\-5\\9\\-7\end{pmatrix}+\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}36\\12\\-24\\24\end{pmatrix}}_{b-a} \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow DR(a,b;x)=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

$$y=(1-\mu)\begin{pmatrix}-13\\-5\\9\\-7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}23\\7\\-15\\17\end{pmatrix} \Rightarrow \mu=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow DR(a,b;y)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$CR(a,b;x,y)=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

Proposition: Es sei A eine $k\times n$-Matrix, $b\in K^k$. Falls $Ax=b$ eine Lösung hat, dann ist $\{x\in K^n: Ax=b\}$ ein affiner Teilraum der Dimension $n-\operatorname{rg}A$.

Beweis: $\exists x_0$ mit $Ax_0=b$. $L=\{x: Ax=b\}=x_0+\underbrace{\{x: Ax=0\}}_{\text{Teilvektorraum von } K^n}$

$\dim L = n-\operatorname{rg}A \quad \square$ kein affiner TR wenn $L=\{\}$

Affine Teilräume von K^n mit $\dim = k$.

$M=x_0+t_1v_1+t_2v_2+\dots+t_kv_k$, $\quad t_1,\dots,t_k\in K$, sodass $\{v_1,\dots,v_k\}$ Basis des entsprechenden Teilvektorraums.

Parameterdarstellung

„Normalvektorform" $\quad Ax=b=Ax_0 \quad (\Leftrightarrow A(x-x_0)=0)$

Proposition: Es sei M ein k-dimensionaler affiner Teilraum K^n. Dann gibt es eine $(n-k)\times n$-Matrix A mit $\operatorname{rg}A=n-k$ und es gibt ein $b\in K^{n-k}$, sodass $M=\{x\in K^n: Ax=b\}$

Beweis: $\underbrace{\begin{pmatrix} v_1^t \\ v_k^t \end{pmatrix}}_{\text{hat rg } B = k} x = 0 \Rightarrow$ hat Lösungsraum der Dimension $n-k$,

also $\exists\ a_1, \dots, a_{n-k}$ l.u. sd. $B \cdot a_j = 0$

Setze $A := \begin{pmatrix} a_1^t \\ a_2^t \\ \vdots \\ a_{n-k}^t \end{pmatrix}$ Es ist $\operatorname{rg} A = n-k$

Setze $b = A \cdot x_0$

$(\subseteq)$ Sei $x \in M \Rightarrow \exists\ t_1 \dots t_k$ mit $x = x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

$\Rightarrow Ax = \underbrace{Ax_0}_{=b} + t_1 \underbrace{Av_1}_{} + \dots + t_k \overbrace{Av_k}^{=0} = b$

$\begin{pmatrix} a_1^t v_1 \\ \vdots \\ a_{n-k}^t v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^t a_1 \\ \vdots \\ v_1^t a_{n-k} \end{pmatrix} = 0$

$(\supseteq)$ x sei so, dass $Ax = b$. Setze $v = x - x_0$

$A \cdot v = \underbrace{Ax}_{=b} - \underbrace{Ax_0}_{b} = 0$ $\qquad \dim\{v : Av = 0\} = n - \underbrace{\operatorname{rg} A}_{n-k} = k$

$Av_j = \begin{pmatrix} a_1^t v_j \\ \vdots \\ a_{n-k}^t v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_j^t a_1 \\ \vdots \\ v_j^t a_{n-k} \end{pmatrix} = 0$ Daher ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $\{v : Av = 0\}$.

Somit $\exists\ t_1, \dots, t_k$ s.d. $x - x_0 = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

$\Rightarrow x \in M$ $\square$

Welche Lage können 2 Ebenen im 3-dimensionalen Raum haben?

$\underbrace{A_1}_{\operatorname{rg} A_1 = 1} x = b_1$, $\underbrace{A_2}_{\operatorname{rg} A_2 = 1} x = b_2$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 2×3-Matrix, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $A' = (A, b)$

$Ax = b$ $\qquad 1 \leq \operatorname{rg} A \leq 2$

- $\operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow \operatorname{rg} A' = 2 \Rightarrow$ Durchschnitt ist affiner Teilraum der Dimension 1, also eine Gerade
- $\operatorname{rg} A = 1$
  - $\operatorname{rg} A' = 1$: Ebenen wären gleich (weil dim = 2)
  - $\operatorname{rg} A' = 2$: $\emptyset$ Ebenen verschieden und parallel

Lage zweier Geraden im 3-dim Raum

$$\underbrace{A_1}_{2\times 3 \text{ Matrix}, \, rg A_1 = 2} \cdot x = b_1 \quad \in \mathbb{R}^2 (K^2) \quad , \quad \underbrace{A_2}_{rg A_2 = 2} x = b_2$$

Zum bestimmen des Durchschnitts brauche ich 1

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}_{4\times 3} \quad , \quad \underbrace{b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{4 \text{ dim Vektor}} \quad , \quad A' = (A, b)$$

$$2 \leq rg A \leq 3$$

•) $rg A = 2$ •) $rg A' = 2$: dim = 1 ⇒ Geraden sind gleich

haben selben Richtungsvektor   •) $rg A' = 3$: $\emptyset$ Geraden sind verschieden und parallel

•) $rg A = 3$ •) $rg A' = 3$ $\dim (H_1 \cap H_2) = 0$ ($\hat{=}$ Punkt)

Gerade schneiden sich in Punkt

•) $rg A' = 4$: $\emptyset$ Geraden sind windschief

2) EUKLIDISCHE GEOMETRIE

Def.: Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$

Dann nennt man V einen euklidischen Raum

(A heißt euklidischer Raum, falls A affiner Raum bez. V ist)

$$|x| = \sqrt[2]{\langle x, x \rangle}$$

Ein affiner Teilraum von einem euklidischen Raum ist immer ein euklidischer Raum.

Def.: Seien V, W Vektorräume mit innerem Produkt. Eine Abb. $T: V \to W$

heißt Bewegung, falls $|T(x) - T(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in V$

Wir werden zeigen, dass T dann eine affine Abb. ist.

Im Komplexen wäre das falsch

Betrachte $\mathbb{C}$ (als VR über $\mathbb{C}$). Setze $T(z) := \bar{z}$

$$|\underbrace{T(z_1)}_{\bar{z}_1} - \underbrace{T(z_2)}_{\bar{z}_2}| = |\overline{z_1 - z_2}| = |z_1 - z_2| \qquad \text{aber nicht affin.}$$

Wdrg. T linear: $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C}$ mit $T(z) = c \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

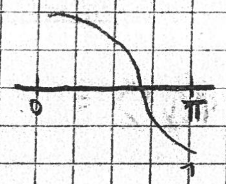
$c = T(1) = 1$

$ci = T(i) = -i \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{c} = -1$ ↯ Widerspruch

---

Sind $v, w \in V$, dann ist der Winkel zw. v und w gleich

$$\arccos \frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|} \quad \in [0, \pi]$$



Man nennt v und w orthogonal (senkrecht, normal), falls $\langle v, w\rangle = 0$

<u>Satz</u>: Es seien V, W Vektorräume mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$ und $T: V \to W$ eine Bewegung. 23.10.2012 (6. VO)

Dann gibt es ein $x_0 \in W$ und eine orthogonale lineare Abb. $\varphi: V \to W$, sodass $T(x) = x_0 + \varphi(x) \quad \forall x \in V$ gilt.

$(\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle)\ \forall x, y)$.

<u>Beweis</u>: <u>1. Schritt</u>: Setze $x_0 = T(0)$ und definieren $\varphi: V \to W$ durch $\varphi(x) = T(x) - x_0$. Es ist damit $T(x) = x_0 + \varphi(x)$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |T(x) - T(y)| = |x - y|$$

$$|\varphi(x)| = |T(x) - \underbrace{x_0}_{=T(0)}| = |x - 0| = |x|$$

<u>2. Schritt</u>: <u>Behauptung</u>: $\varphi(-x) = -\varphi(x) \quad \forall x \in V$

<u>Beweis der Behauptung</u>: $|\varphi(x) + \varphi(-x)|^2 + 4|x|^2 =$

Parallelogrammidentität

$$= |\varphi(x) + \varphi(-x)|^2 + \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(-x)|^2}_{=|x-(-x)|^2 = 4|x|^2} = 2 \cdot \Big(\underbrace{|\varphi(x)|^2}_{=|x|^2} + \underbrace{|\varphi(-x)|^2}_{=|-x|^2 = |x|^2}\Big) = 4|x|^2$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) + \varphi(-x)|^2 = 0 \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(-x) = -\varphi(x) \qquad \diamond$$

Orthogonalität

3. Schritt: Behauptung: $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x,y \in V$

Beweis der Behauptung: Erinnerung: $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\left(|v+w|^2 - |v-w|^2\right)$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{4}\Big(|\varphi(x) + \underbrace{\varphi(y)}_{=-(-\underbrace{\varphi(y)}_{=\varphi(-y)})}|^2 - \underbrace{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}_{=|x-y|^2}\Big)$$

$$\overset{2.\text{ Schritt}}{=} \frac{1}{4}\Big(\underbrace{|\varphi(x) - \varphi(-y)|^2}_{=|x-(-y)|^2 = |x+y|^2} - |x-y|^2\Big) = \langle x, y\rangle \quad \diamond$$

4. Schritt: Seien $x,y \in V$ Linearität

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)|^2 = \langle \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y), \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\rangle =$$

$$= \underbrace{|\varphi(x+y)|^2}_{=|x+y|^2} + \underbrace{|\varphi(x)|^2}_{=|x|^2} + \underbrace{|\varphi(y)|^2}_{=|y|^2} - 2\underbrace{\langle \varphi(x), \varphi(x+y)\rangle}_{\overset{3.\text{ Schritt}}{=} \langle x, x+y\rangle} +$$

$$-2\underbrace{\langle \varphi(y), \varphi(x+y)\rangle}_{\overset{3.\text{ Sch.}}{=} \langle y, x+y\rangle} + 2\underbrace{\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle}_{\overset{3.\text{ Schr.}}{=} \langle x, y\rangle} =$$

$$= \underbrace{|x+y|^2}_{=\langle x+y, x+y\rangle} + |x|^2 + |y|^2 - 2|x|^2 - 2\langle x,y\rangle \cancel{-2\langle x,y\rangle} - 2|y|^2 \cancel{+2\langle x,y\rangle} =$$

$$= \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + \cancel{2\langle x,y\rangle} \cancel{+|x|^2} \cancel{+|y|^2} \cancel{-2|x|^2} \cancel{-2\langle x,y\rangle} \cancel{-2|y|^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Sei $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi(\lambda x) - \lambda\varphi(x)|^2 = \langle \varphi(\lambda x) - \lambda\varphi(x), \varphi(\lambda x) - \lambda\varphi(x)\rangle =$$

$$= \underbrace{|\varphi(\lambda x)|^2 + \lambda^2 |\varphi(x)|^2}_{=|\lambda x|^2 = \lambda^2|x|^2 \quad = |x|^2} - 2\lambda \underbrace{\langle \varphi(x), \varphi(\lambda x)\rangle}_{\overset{3.\text{ Schr.}}{=} \langle x, \lambda x\rangle = \lambda|x|^2} =$$

$$= \lambda^2|x|^2 + \lambda^2|x|^2 - 2\lambda^2|x|^2 = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$$

Somit ist φ linear und wegen des 3. Schritts eine orthogonale Abb. $\square$

Bemerkung: •) V endlichdim., $T: V \to V$ Bewegung, dann kann es sein, dass T nicht invertierbar ist. (Rechts-Shift)

$$\ell^2 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \text{ konvergiert}\}$$

$$\langle (x_n),(y_n)\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

Rechts-Shift: $\varphi(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$

$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

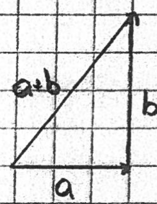
Daher ist φ Bewegung.

φ ist nicht surjektiv, weil $\nexists x \in \ell^2$ mit $\varphi(x) = (1,0,0,\dots)$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Bewegung $\Rightarrow T(x) = x_0 + \varphi(x) = x_0 + \underbrace{A}_{\text{invertierbar}} x$

Es ist dann $T^{-1}(x) = A^{-1}(x) - A^{-1}x_0$ die Umkehrabb. zu T

Pythagoras:

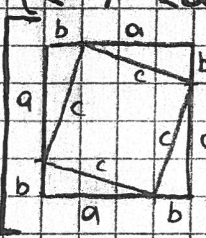


Proposition: Es gilt $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$ genau dann, wenn $\langle a,b\rangle = 0$

Beweis: $|a+b|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = |a^2| + |b|^2 + 2\langle a,b\rangle$

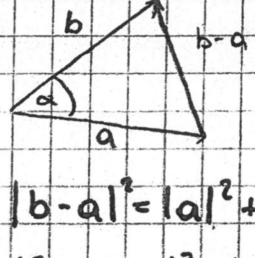
$(\Rightarrow)$ Es ist $2\langle a,b\rangle = 0 \Rightarrow \langle a,b\rangle = 0$

$(\Leftarrow)$ $\langle a,b\rangle = 0 \Rightarrow |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$ $\square$



$$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Cosinussatz:

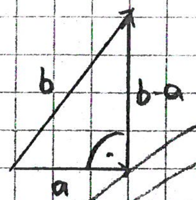


Proposition: $|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\alpha$

Beweis: $|b-a|^2 = |b|^2 + |a|^2 - 2\langle a,b\rangle$

$\alpha = \arccos \frac{\langle a,b\rangle}{|a||b|} \Rightarrow |a||b|\cos\alpha = \langle a,b\rangle$

$\Rightarrow |b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\alpha$



$\langle a,b\rangle = |a||b|\cos\alpha$

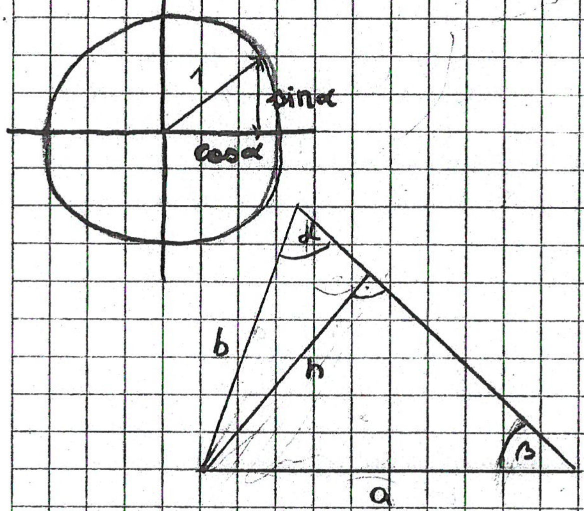
$|b-a|^2 + |a|^2 = |b|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{|b|^2} = |a|^2 + \cancel{|b|^2} + |a|^2 - 2\underbrace{\langle a,b\rangle}_{|a||b|\cos\alpha}$

$\Rightarrow \cancel{2}|a|^{\cancel{2}} = \cancel{2}\cancel{|a|}\,|b|\cos\alpha \Rightarrow |a| = |b|\cos\alpha$

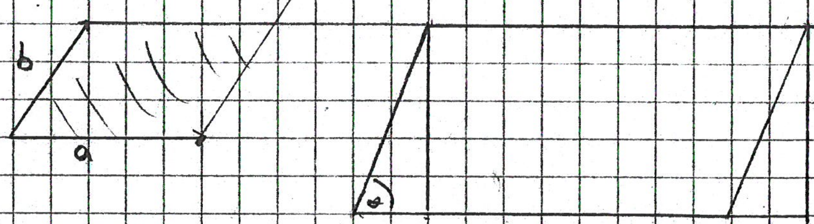
$\Rightarrow |b-a|^2 = |b|^2 - \underbrace{|a|^2}_{=|b|^2\cos^2\alpha} = |b|^2\underbrace{(1-\cos^2\alpha)}_{=\sin^2\alpha} = |b|^2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow |b-a| = |b|\sin\alpha$



$h = a\sin\beta = b\sin\alpha \Rightarrow \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$

Sinussatz



$h \Rightarrow A = |a|\cdot|b|$

$|h| = |b|\sin\alpha$

$\Rightarrow A = |a|\cdot|b|\sin\alpha$

$\Rightarrow A^2 = |a|^2|b|^2\underbrace{\sin^2\alpha}_{(1-\cos^2\alpha)} =$

$= |a|^2|b|^2 - (\underbrace{|a||b|\cos\alpha}_{=\langle a,b\rangle})^2 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{|a|^2|b|^2 - \langle a,b\rangle^2}}$

Spezialfall: 2-dimensional $\quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = |a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 =$$

$$= \cancel{a_1^2 b_1^2} + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + \cancel{a_2^2 b_2^2} - \cancel{a_1^2 b_1^2} - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 - \cancel{a_2^2 b_2^2}$$

$$= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$$

weil Fläche positiv Betrag $= |a_1 b_2 - a_2 b_1|^2 \Rightarrow A = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|$ geom. Def der Determinante

Im $\mathbb{R}^3$ definiert man $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

$$\text{"} = \text{"} \det \begin{pmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

nicht mathematisch
weil e_1, e_2, e_3 keine Zahlen

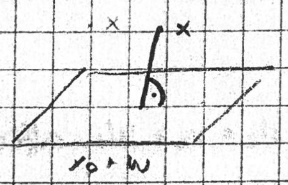
$\langle x \times y, x \rangle = 0 \quad , \quad \langle x \times y, y \rangle = 0$

$|x \times y| = A$

29.10.2012
(7.VO)

M affiner Teilraum, x $\qquad$ kürzester Abstand von x zu M?

$\text{"} \; x_0 + W$
Teilvektorraum



Verschieben $x - x_0$, bzw. W

Sei y_0 die Orthogonalprojektion von $x - x_0$ auf W

Sei $y \in M$: $|x - x_0 - y_0|^2 + \underbrace{|y - (x_0 + y_0)|^2}_{\geq 0} = |x - y|^2 \geq |x - x_0 - y_0|^2$

$\Rightarrow |x - (x_0 + y_0)| \leq |x - y|$ $\quad$ (mit Orthogonalproj. erhalte ich kürzesten Abstand)

Also Orthogonalabstand ist kürzester Abstand von x zu M

---

2 affine Teilräume $\quad M_1 = x_1 + W_1 \, , \; M_2 = x_2 + W_2$ von $\mathbb{R}^n$

Abstand von M_1 zu M_2

Es ist $(W_1 + W_2) \oplus (W_1 + W_2)^\perp = \mathbb{R}^n$

$x_2 - x_1 = w + u$, wobei $w \in W_1 + W_2$ und $u \in (W_1 + W_2)^\perp$ eindeutig bestimmt sind

$\Rightarrow \exists\, w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2$ und $w = w_1 + w_2$

Setze $p_0 := x_1 + w_1 \in M_1$ $\quad q_0 := x_2 - w_2 \in M_2$

$$q_0 - p_0 = (x_2 - w_2) - (x_1 + w_1) = \underbrace{x_2 - x_1}_{=w+u} - \underbrace{(w_1 + w_2)}_{=w} = u$$

$\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall\, w \in W_1$ und $\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall\, w \in W_1$

Seien $p \in M_1, q \in M_2$ beliebig

Dann $\exists!\ \tilde{w} \in W_1 + W_2,\ \tilde{u} \in (W_1 + W_2)^\perp$ mit

$$q - p = \tilde{w} + \tilde{u}$$

Es ist $q - p = \underbrace{(q - q_0)}_{\in W_2} + \underbrace{(q_0 - p_0)}_{= u} + \underbrace{(p_0 - p)}_{\in W_1} = \underbrace{(q - q_0) + (p_0 - p)}_{\in W_1 + W_2} + \underbrace{u}_{\in (W_1 + W_2)^\perp}$

Wegen der Eindeutigkeit ist $\tilde{u} = u$

Somit $q - p = \tilde{w} + u$ und $\langle \tilde{w}, u \rangle = 0$

Daher $|q - p|^2 \underset{Pyth.}{=} \underbrace{|\tilde{w}|^2}_{\geq 0} + |u|^2 \geq |u|^2$

$\Rightarrow |u| \leq |q - p|$

<u>Proposition</u>: Es seien $M_1 = x_1 + W_1$ und $M_2 = x_2 + W_2$ affine Teilräume von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes u mit $\langle u, w \rangle = 0 \ \forall\, w \in W_1$, $\langle u, w \rangle = 0 \ \forall\, w \in W_2$ und $\exists\, p_0 \in M_1, q_0 \in M_2$ mit $q_0 - p_0 = a$. Weiters gilt für $p \in M_1$ und $q \in M_2$, dass

$$|q - p| \geq |u|$$

$M_1: x_1 + t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k$

$M_2: x_2 + s_1 w_1 + \ldots + s_m w_m$

$$u = x_2 - x_1 + s_1 w_1 + \ldots + s_m w_m - t_1 v_1 + \ldots - t_k v_k$$

$$0 = \langle u, v_j \rangle = \langle x_2 - x_1, v_j \rangle + s_1 \langle w_1, v_j \rangle + \ldots + s_m \langle w_m, v_j \rangle - t_1 \langle v_1, v_j \rangle + \ldots - t_k \langle v_k, v_j \rangle$$

$$0 = \langle u, w_j \rangle = \langle x_2 - x_1, w_j \rangle + s_1 \langle w_1, w_j \rangle + \ldots - t_k \langle v_k, w_j \rangle$$

Einfacher: Abstand von Geraden $x_1 + tv_1,\ x_2 + tv_2$ in $\mathbb{R}^3$

$v_1 \times v_2$ steht senkrecht auf beide Geraden

Abstand eines Pktes $x \in \mathbb{R}^n$ von einer Hyperebene M

$\exists$ $n \times 1$-Matrix a mit $rg\, a = 1$ (also $a \neq 0$), $\exists b \in \mathbb{R}$ mit

$M = \{y : a^t y = b\}$. Sei $p \in M$: $b = a^t p$

Für $y \in M$ $\quad a^t y = b = a^t p \Rightarrow \underbrace{a^t(y-p)}_{=\langle y-p, a\rangle} = 0$

$\exists!\ u$ mit $\langle u, v\rangle = 0$ $\forall$ Richtungsvektoren v von M

und $\exists\ q_0 \in M$ mit $\quad x - q_0 = u$

$\Rightarrow \exists\ t$ mit $u = t \cdot a$

$$\underbrace{\langle x-p, a\rangle}_{=\underbrace{(x-q_0)}_{=u} + \underbrace{(q_0-p)}_{\text{ist Richtungsvektor}}} = \langle \underbrace{u}_{t\cdot a}, a\rangle + \underbrace{\langle q_0 - p, a\rangle}_{=0} = t\langle a, a\rangle = t\,|a|^2 \Rightarrow$$

$$\frac{|\langle x-p, a\rangle|}{|a|} = |t|\,|a| = |\underbrace{ta}_{u}| = |u| \quad \text{Abstand von } x \text{ zu } M$$

Hesse'sche Normalform

<u>Proposition:</u> Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und sei M eine Hyperebene. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $p \in M$, sodass $M = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y-p, a\rangle = 0\}$. Der Abstand von x zu M ist dann $\dfrac{|\langle x-p, a\rangle|}{|a|}$

$f: V \to V$ $\quad$ bez. neuen „Nullpunkt" x_0

$\tilde{f}(x) = f(x_0 + x) - x_0$

Bewegung $T(x) = x_0 + Ax$, $A^t = A^{-1}$ (orthogonal)

<u>Proposition:</u> Es sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x_0 + Ax$ eine Bewegung

Dann gibt es ein x_1 mit $Ax_1 = x_1$ und ein x_2 mit $\langle x_2, v\rangle = 0$ $\forall v$ mit $Av = v$, s.d.

$T(x) = \underline{x_2 + A(x - x_2)} + x_1$

alle Vektoren, die nichts tun

Beweis: $W := \{v : Av = v\}$ Vektorraum

$\Rightarrow \mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ Sei $w \in W^\perp$

$(A-id)w$ Sei $v \in W$

$$\langle (A-id)w, v\rangle = \underbrace{v^t (A-id)}_{=((A^t-id)v)^t} w = \langle w, \underbrace{(\underbrace{A^t}_{=A^{-1}} - id)v}_{=A^{-1}v - v}\rangle$$

Weil $Av = v$, ist $v = A^{-1}v$, also

$\langle (A-id)w, v\rangle = \langle w, A^{-1}v - v\rangle = 0$

Somit ist $(A-id)w \in W^\perp$

Sei $x \in \ker (A-id)|_{W^\perp} \Rightarrow x \in W^\perp$ und $\underbrace{(A-id)x}_{Ax-x} = 0$

$\Rightarrow x \in W \Rightarrow x = 0$

Somit ist $(A-id)|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ bij.

$\Rightarrow \exists!\, x_1 \in W, y_2 \in W^\perp$ mit $x_0 = x_1 + y_2$

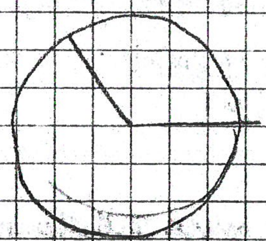
$T(x) = \underbrace{x_0}_{=x_1+y_2} + Ax = y_2 + Ax + x_1$

$\Rightarrow \exists\, x_2 \in W^\perp$ mit $\underbrace{(A-id)(-x_2)}_{=-Ax_2+x_2} = y_2$

Somit $T(x) = y_2 + Ax + x_1 = \underbrace{x_2 + A(x-x_2)}_{} + x_1 \hat{=}\, x_2 - Ax_2$ $\square$

+ Bewegungen in $\mathbb{R}^2$: $T(x) = x_0 + Ax$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$



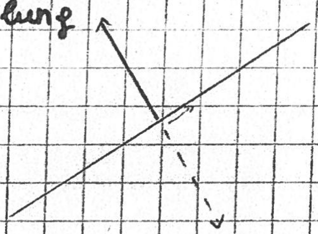
$\Rightarrow \exists\, \alpha \in [0, 2\pi]$ mit $a_{11} = \cos\alpha$, $a_{21} = \sin\alpha$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Drehung von α Spiegelung

(det-Vorzeichen + oder −)

→ Spiegelung



$\exists\, x_1\, x_2$ wie oben mit $T(x) = x_2 + A(x - x_2) + x_1$

Gleitspiegelung

→ Drehung: $\alpha \in (0, 2\pi)$: $\{x : Ax = x\} = \{0\}$

genau Mittelpkt der Drehung (Drehung um x_2)

$\exists\, x_2 \quad T(x) = \underbrace{x_2 + A(x - x_2)}$

um x_1 verschoben

Falls $\alpha = 0\ (2\pi)$: $A = \mathrm{id}$, also $x_1 = x_0 \quad T(x) = x + x_1$

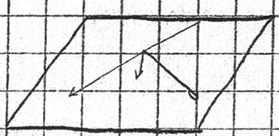
Parallelverschiebung

30.10.2012
(8. VO)

Kartesisches Koordinatensystem:

Darstellung bez. x_0, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Orthonormalbasis

3) PROJEKTIVE GEOMETRIE



Def.: Die Menge aller eindimensionaler Teilräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ heißt der n-dimensionale projektiver Raum.

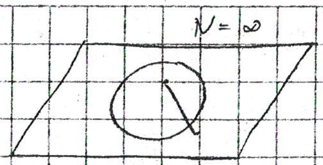
Punkt x in 3-dim. projektiven Raum ist z.B.: $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \\ -10 \end{bmatrix}$

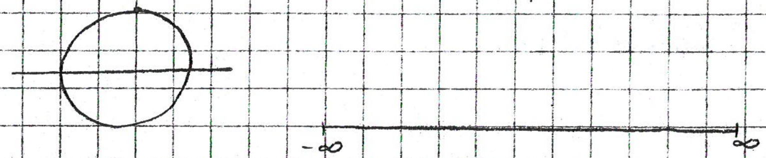
Allgemein: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Einen affinen Pkt.: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entspricht der projektive Pkt. $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Einen projektiven Pkt. $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1/x_0 \\ \vdots \\ x_n/x_0 \end{bmatrix}$ entspricht der affine Punkt

$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \frac{x_2}{x_0} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_0} \end{pmatrix}$ Diejenigen projektiven Punkte mit $x_0 = 0$ sind die Fernpunkte.





$[x], [y]$ Gerade : $[tx + sy]$

Ein k-dimensionaler projektiver TR ist ein $(k+1)$-dim. Teilvektorraums des $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\exists A$ $(n-k)\times(n+1)$ - Matrix mit $rg\, A = n-k$, sodass $x \in$ Teilraum $\Leftrightarrow Ax = 0$

$M: \ 3x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 9$

projektiv : $3\frac{x_1}{x_0} - 7\frac{x_2}{x_0} + 6\frac{x_3}{x_0} - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 9x_0 = 0$

$M: \ 4x_0 + 7x_1 - 8x_2 = 0$

affin : $7x_1 - 8x_2 + 4 = 0$
$(x_0 = 1)$

---

2 versch. Geraden in der projektiven Ebene.

$\underbrace{A_1}_{1\times 3\text{-Matrix mit } rg\, A_1 = 1} x = 0$ $\qquad$ $\underbrace{A_2}_{1\times 3\text{-Matrix mit } rg\, A_2 = 1} x = 0$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $Ax = 0$

$rg\, A = 2$. $\dim\{x : Ax = 0\} = 1 \Rightarrow$ 2 versch. Geraden schneiden sich in genau einem Pkt.

Dualitätsprinzip:

projektiver TR der dim k $\Leftrightarrow$ proj. TR der dim $n-1-k$

schneiden $\Leftrightarrow$ spannen auf, erzeugen

---

proj. Ebene : Punkt $\to$ Gerade

Duale Aussage zu „durch 2 versch. Pkt geht eine Gerade" ist:

„2 versch. Geraden schneiden sich in einem Pkt"

Eine projektive Abbildung wird durch $[A]$ beschrieben, wobei A eine Matrix ist.

($[A]$ (proj. TR) ist wieder proj. TR)

Teilverhältnis?

affin: $x = (1-\lambda)a + \lambda b \Rightarrow DR(a,b;x) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$

proj. $v_3 \lambda = \frac{v_2(1-\lambda)}{v_1}(v_1 a) + \frac{v_2 \lambda}{v_2}(v_2 b)$

$$\frac{\frac{v_2 \lambda}{v_2}}{\frac{v(1-\lambda)}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2}\,\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Das Teilverhältnis hat im projektiven keinen Sinn

Doppelverhältnis?

$y = (1-\mu)a + \mu b \qquad CR(a,b;x,y) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1-\mu}{\mu}$

$v_4 y = \frac{v_4(1-\mu)}{v_1}(v_1 a) + \frac{v_4 \mu}{v_1}(v_2 b)$

$$\frac{v_1}{v_2}\,\frac{\lambda}{1-\lambda} \; \underbrace{\frac{\frac{v_4(1-\mu)}{v_1}}{\frac{v_4 \mu}{v_2}}}_{=\frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1}\,\frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1-\mu}{\mu} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1-\mu}{\mu}$$

Das Doppelverhältnis kann im proj. def. werden. Man kann a, b und x so wählen, dass $x = a + b$

$\mu_1 \cdot a + \mu_2 b$

Es ist dann $y = (1-\mu)a + \mu b$ für ein passendes μ.

$CR(a,b;x,y) = \frac{1-\mu}{\mu} \; \boxed{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$

<u>Proposition</u>: Seien a, b, x, y versch. proj. Pkte, die auf einer Geraden liegen, $[A]$ eine proj. Abb., die diese Gerade nicht auf einen Pkt. abbildet. Dann ist

$CR([A] \cdot a, [A] \cdot b; [A]x, [A]y) = CR(a,b;x,y)$

<u>Beweis</u>: $x = a + b,\ y = (1-\mu)a + \mu b \Rightarrow CR(a,b;x,y) = \frac{1-\mu}{\mu}$

$Ax = Aa + Ab;\ Ay = (1-\mu)Aa + \mu Ab$

$\Rightarrow CR([A]a, [A]b; [A]x, [A]y) = \frac{1-\mu}{\mu} = CR(a,b;x,y)$

VII. EIGENWERTE & EIGENVEKTOREN

1) EIGENWERTE

<u>Def.</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$, A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$; Falls es ein $v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $v \neq 0$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, s.d. $Av = \lambda v$ gilt, dann heißt λ Eigenwert und v Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Man nennt $\{v \in K^n : Av = \lambda v\}$ dann den Eigenraum zu λ.

Proposition: Der Eigenraum zu λ ist ein TR von K^n

Beweis: $E := \{v : Av = \lambda v\}$ $\quad v, w \in E \ , c \in K$

$$A(v + cw) = \underbrace{Av}_{\lambda v} + c\underbrace{Aw}_{\lambda w} = \lambda \cdot (v + c \cdot w) \Rightarrow v + cw \in E$$

$$Av = \lambda v \Longleftrightarrow 0 = Av - \lambda v = (A - \lambda id) \cdot v$$

$$E = \{v : (A - \lambda id) v = 0\} = \ker (A - \lambda \cdot id)$$

05.11.2012
(9.VO)

$$\underset{\neq 0}{A}\underset{E v}{v} = \underset{\in V}{\lambda v} \qquad A^n v = \lambda^n v$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

λ Eigenwert $\Longleftrightarrow \ker(A - \lambda id) \neq \{0\} \Longleftrightarrow A - \lambda id$ ist nicht injektiv $\Longleftrightarrow A - \lambda id$ nicht bijektiv

Proposition: Für eine $n \times n$ Matrix über K und für $\lambda \in K$ sind äquivalent:

(1) λ ist Eigenwert

(2) $A - \lambda id$ ist nicht injektiv

(3) $A - \lambda id$ ist nicht invertierbar (nicht bijektiv)

Proposition: Sei A eine $n \times n$-Matrix über K, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $\operatorname{card}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}) = k$,

$v_1, \dots, v_k \in K^n \setminus \{0\}$, wobei v_j Eigenvektor zu λ_j für $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ $\quad (Av_j = \lambda_j v_j)$

Dann $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linear unabhängig

Beweis: Induktion nach k: $\quad k = 1 \quad \{\underset{\neq 0}{v_1}\}$ l.u.

Sei $k > 1$: $\quad 0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k$

$$0 = A0 = A(\alpha_1 v_1 \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 \underbrace{Av_1}_{= \lambda_1 v_1} + \dots + \alpha_{k-1} \underbrace{Av_{k-1}}_{= \lambda_{k-1} v_{k-1}} + \alpha_k \underbrace{Av_k}_{= \lambda_k v_k} =$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k$$

2. Zeile $- \lambda_k \cdot$ 1. Zeile: $0 = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} + 0$

Weil nach Induktionsvoraussetzung $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ l.u. ist.

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$\vdots$

$$\alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_k \underbrace{v_k}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_k = 0$$

Daher ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ l.u. $\square$

Bemerkung: Somit kann eine $n \times n$-Matrix höchstens n Elemente haben

Def.: Man nennt eine $n \times n$ Matrix A über K diagonalisierbar, falls es eine Basis aus Eigenvektoren gibt

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar (auch nicht über $\mathbb{C}$)

BSP $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Ang.: $\underbrace{A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 3$

$A - \lambda id = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rg(A - \lambda id) = 1 \Rightarrow \dim \ker(A - \lambda id) = 1 \neq 2$

A diagonalisierbar : $\exists$ Basis $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektor

$$A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \emptyset \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \emptyset & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \text{ invertierbare Matrix } S \text{, sodass}$$

$$\underbrace{S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}}$$

$A = SDS^{-1}$

$$A^n = SD\underbrace{S^{-1} S}_{id}DS^{-1} \cdot \ldots \cdot SDS^{n-1} = SD^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \emptyset \\ & \lambda_2^n \cdots & \\ \emptyset & & \lambda_n^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Im Unendlich dimensionalen $\varphi : V \to V$

$\varphi(v) = \lambda v$, $v \neq 0$ dann heißt λ Eigenwert von φ, v heißt Eigenvektor

Eigenraum: $\{x \in V : \varphi(x) = \lambda x\}$

λ Eigenwert $\Leftrightarrow$ $(\varphi - \lambda id)$ ist nicht injektiv ($\Rightarrow$ nicht invertierbar)

$\not\Leftrightarrow$ $(\varphi - \lambda id)$ ist nicht invertierbar

Es könnte $\varphi - \lambda id$ inj aber nicht surjektiv sein.

Def.: Man nennt λ einen Spektralwert von φ, falls $(\varphi - \lambda id)$ nicht invertierbar

$Sp(\varphi) = \{\lambda : \lambda \text{ Spektralwert}\}$ das Spektrum von φ

Im Endlichdim. : $Sp(A) = \{\lambda : \lambda \text{ Eigenwert}\}$

λ Eigenwert $\Longleftrightarrow$ $(A - \lambda id)$ nicht invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda id) = 0$

<u>Proposition</u>: λ ist Eigenwert von A $\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda id) = 0$

<u>Def.</u>: Für eine $n \times n$ Matrix A nennt man $p(x) := \det(A - x id)$ das charakteristische Polynom von A

λ Eigenwert $\Longleftrightarrow p(\lambda) = 0$

$$p(x) = \det(A - x id) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n} - x \end{pmatrix} = (-1)^n x^n + \text{kleinere Potenz}$$

<u>Das charakteristische Polynom hat Grad n</u>

2) POLYNOME

<u>Def.</u>: Ein Ausdruck der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ heißt n der Grad von p (grad p bzw. deg p)

•) $\text{grad}(p_1 \cdot p_2) = \text{grad}\, p_1 + \text{grad}\, p_2$ $\quad p_1 p_2 \neq 0$

denn $p_1 = a_n x^n + \dots + a_0$, $p_2 = b_k x^k + \dots + b_0$

$p_1 p_2 = a_n b_k x^{n+k} + \dots + a_0 b_0$

<u>Division mit Rest</u>:

<u>Proposition</u>: Seien p_1, p_2 Polynome über K, $p_2 \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r über K mit $r = 0$ oder grad r < grad p_2, sodass $p_1 = q p_2 + r$ gilt

<u>Beweis</u>: $p_2 = \underset{\neq 0}{b_k} x^k + \dots + b_0$

Induktion nach n = grad p_1

Induktionsanfang: $p_1 = 0$ Setze $q = 0$ und $r = 0$: $p_1 = q p_2 + r$

$n = 0$: $p_1 = a_0 \neq 0$

<u>1. Fall</u>: $k = 0$ Setze $q = \frac{a_0}{b_0}$ und $r := 0$

$p_1 = a_0$ $\quad q p_2 + r = \frac{a_0}{b_0} + 0 = a_0 = p_1$

$\underline{\text{2. Fall}}$: $k \neq 0$: Setze $q := 0$ und $r = p_1$

$$qp_2 + r = p_1 \quad , \text{grad}\, r = 0 < \text{grad}\, p_2$$

Sei $n > 0$ $\underline{\text{1. Fall}}$ $k > n$: Setze $q := 0$ und $r = p_1$

$$\underbrace{q p_2}_{=0} + r = p_1 \; , \text{grad}\, r = \text{grad}\, p_1 = n < k = \text{grad}\, p_2$$

$\underline{\text{2. Fall}}$: $k \leq n$: Setze $\tilde{p} := p_1 - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} \underbrace{p_2}_{= b_n x^k + \ldots + b_0} =$

$$= \cancel{a_n x^n} + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 - \cancel{a_n x^n} - \frac{a_n}{b_k} b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \frac{a_n}{b_k} b_0 x^{n-k} =$$

$$= \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k} b_{k-1}\right) x^{n-1} + \ldots + a_0 \,, \text{ also grad}\, \tilde{p} \leq n-1$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{q}, r \text{ mit } \tilde{p} = \tilde{q} p_2 + r \,, \text{ also } \tilde{q} p_2 + r = \tilde{p} = p_1 - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = \underbrace{\left(\tilde{q} + \frac{a_n}{b_k} x^{n-k}\right)}_{q} p_2 + r$$

$\underline{\text{Eindeutigkeit}}$: $p_1 = q p_2 + r = \tilde{q} p_2 + \tilde{r}$

$$\Leftrightarrow (q - \tilde{q}) p_2 = \tilde{r} - r$$

Dabei ist $\tilde{r} - r = 0$ oder $\text{grad}(\tilde{r} - r) < \text{grad}\, p_2$

Falls $q - \tilde{q} \neq 0 \Rightarrow \text{grad}((q-\tilde{q})p_2) = \underbrace{\text{grad}(q-\tilde{q})}_{\geq 0} + \text{grad}(p_2) \geq \text{grad}\, p_2$ ↯ Wid

Somit $\tilde{q} = q \Rightarrow 0 = \tilde{r} - r \Rightarrow \tilde{r} = r$

□

$\underline{\text{Proposition}}$: p ein Polynom über K, $a \in K$ so, dass $p(a) = 0$

Dann $\exists!$ q über K (grad q = grad $p - 1$ falls $p \neq 0$) mit $p = (x-a)q$.

$\underline{\text{Beweis}}$: $\exists!$ q, r mit $p(x) = (x-a)\, q(x) + r$, oder $r = 0$ oder

grad $r <$ grad$(x-a) = 1 \Rightarrow$ grad $r = 0$

$$0 = p(a) = \underbrace{(a-a)\, q(a)}_{=0} + r = r$$

Damit $p = (x-a) q$ □

Def.: Sei $p \neq 0$ ein Polynom über K, sei $a \in K$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt a eine k-fache Nullstelle von p, falls es ein Polynom q über K mit $q(a) \neq 0$ gibt, sodass $p = (x-a)^k q$ gilt.

06.11.2012 (10. Vo)

Proposition: Falls $p \neq 0$ ein Polynom über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist und $a \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

Dann ist a genau dann eine k-fache Nullstelle von p, wenn

$p(a) = 0$ und $p'(a) \neq 0$

Beweis: $(\Rightarrow)$ $p(x) = (x-a)^k q(x)$ wobei $q(a) \neq 0$

Behauptung: Für $j \in \{1, \dots, k\}$ $\exists q_j$ Polynom mit $q_j(a) \neq 0$ und $p^{(j)}(x) = (x-a)^{k-j} q_j(x)$

BW der Behauptung: Ind. nach j: $j = 0$: $q_0 = q$

$$p^{(0)}(x) = p(x) = (x-a)^k q(x) = (x-a)^{k-0} q_0(x), \quad q_0(a) = q(a) \neq 0$$

Sei $j > 0$

$\exists q_{j-1}$ mit $p^{(j-1)}(x) = (x-a)^{k-j+1} q_{j-1}(x)$, wobei $q_{j-1}(a) \neq 0$

$$\Rightarrow p^{(j)}(x) = \left(p^{(j-1)}(x)\right)' = (k-j+1)(x-a)^{k-j} q_{j-1}(x) + (x-a)^{k-j+1} q_{j-1}'(x) = (x-a)^{k-j}\left((k-j+1)\, q_{j-1}(x) + (x-a)\, q_{j-1}'(x)\right)$$

setze $q_j(x) = (k-j+1)\, q_{j-1}(x) + (x-a)\, q_{j-1}'(x)$ Polynom,

$$p^{(j)}(x) = (x-a)^{k-j} q_j(x) \quad \text{und} \quad q_j(a) = \underbrace{(k-j+1)}_{\neq 0}\,\underbrace{q_{j-1}(a)}_{\neq 0} \neq 0 \qquad \diamond$$

Falls $j < k$ $\quad p^{(j)}(a) = (a-a)^{k-j} q_j(a) = 0$

$$p^{(k)}(a) = \underbrace{(a-a)^{k-k}}_{=1}\,\underbrace{q_k(a)}_{\neq 0} \neq 0$$

$(\Leftarrow)$ a ist r-fache Nullstelle. Aus dem 1. Teil:

$$p(a) = 0,\ p'(a) = 0, \dots, p^{(r-1)}(a) = 0 \text{ und } p^{(r)}(a) \neq 0 \Rightarrow r = k \qquad \square$$

(A = k-fache Nullstelle)

HORNER SCHEMA:

BSP $p = x^3 - 17x^2 - 105x + 441$

	1	-17	-105	441	
2	1	-15	-135	171	Funktionswert
ist Nullstelle $\boxed{3}$	1	-14	-147	0	

wird übernommen

einsetzen in Lsg-Formel: $7 \pm \sqrt{49 + 147} = -7, 21$

Nullstellen: $21, 3, -7$

BSP $p = x^3 - 7x + 6$

1	0	-7	6	Null nicht vergessen

Hat jedes Polynom eine Nullstelle? NEIN

Über $\mathbb{R}$ hat x^2+1 keine Nullstelle (und $x^2+1 \geq 1$)

$i^2 + 1 = 0$

Fundamentalsatz der Algebra

Satz: Sei p ein nicht-konstantes Polynom über $\mathbb{C}$

Dann gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$

Beweis: Analysis

$$p = (z - b_1)^{k_1}, \ldots, (z - b_r)^{k_r} a_n$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r$$

Def: Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes nicht konstante Polynom über K eine Nullstelle in K hat $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p (= a_n (x - b_1)^{k_1} \ldots (x - b_r)^{k_r}$ (wobei $k_1 + \ldots + k_r = n$)

(Fundamentalsatz $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen)

Man kann zeigen: Zu jedem Körper K gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper L.

3) Berechnen von Eigenwerten

Matrix A , $p(x) = \det(A - x\,id)$

λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow p(\lambda) = 0$

<u>Proposition:</u> Jede komplexe Matrix hat einen Eigenwert

<u>Proposition:</u> A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von A

<u>Beweis:</u> $(\Rightarrow)$ Ang. 0 wäre Eigenwert $\Rightarrow \exists v \neq 0$ mit $Av = 0$

$\Rightarrow v \in \ker A \Rightarrow \ker A \neq \{0\}$ Widspr. zu A invert.

$(\Leftarrow)$ Ang A wäre nicht invertierbar $\Rightarrow$ A nicht inj $\Rightarrow$

$\ker A \neq \{0\}$, also $\exists v \in \ker A$, $v \neq 0 \Rightarrow Av = 0 = 0 \cdot v \Rightarrow$

0 Eigenwert – Widspr.

Deshalb ist A invertierbar. $\square$

BSP

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 20 & -3 \end{pmatrix}$$

ist so

char. Pol.: $p(x) = \det \begin{pmatrix} 10-x & -2 \\ 20 & -3-x \end{pmatrix} = x^2 - 7x - 10$

$x^2 - 7x + 10 = 0$ $\qquad x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = 5, 2$

Eigenvektoren zu 5: $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda\, id) \cdot v = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 0 \\ \cancel{20} & \cancel{-8} & \cancel{0} \end{array}\right) \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$ sieht man sofort

Eigenvektoren zu 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -2 & 0 \\ \cancel{20} & \cancel{-5} & \cancel{0} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ zu 5 und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ zu 2

<u>Def.</u>: Sei A eine $n \times n$-Matrix und λ ein Eigenwert von A. Angenommen λ ist eine r-fache Nullstelle des char. Polynoms von A. Dann nennt man r die algebraische Vielfachheit von λ

Weiters heißt $s = \dim \underbrace{\{v : Av = \lambda v\}}_{\text{Eigenraum}}$ die geometrische Vielfachheit von λ

Wir werden später zeigen $1 \leq s \leq r$

BSP von gestern: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $p(x) = (3-x)^2$

3 hat algebraische Vielfachheit 2

$Ax = 3x \iff x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 3 hat geom. Vielfachheit 1

Ergänzungen: Polynome

12.11.2012
(11.VO)

$z \in \mathbb{C}$: $z\bar{z} = |z|^2$

$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$

Proposition: Falls p ein Polynom über $\mathbb{R}$ ist, $a+bi$ mit $b \neq 0$ ist Nullstelle mit Vielfachheit k von p, dann ist auch $a-bi$ eine Nullstelle mit Vielfachheit k von p.

Beweis: $0 = p(a+bi) \Rightarrow$

$$0 = \bar{0} = \overline{p(a+bi)} = \overline{a_n(a+bi)^n + \ldots + a_0} = a_n(a-bi)^n + \ldots + a_0 = p(a-bi)$$

$$p = (x-(a+bi))\underbrace{q}_{=(x-(a-bi))q} = \underbrace{(x-(a+bi))(x-(a-bi))}_{= x^2 - 2ax + (a^2+b^2)} q$$

$x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$ reelles Polynom

$\Rightarrow q$ ist reelles Polynom □

Falls $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ Basis ist, $S = (v_1 \ldots v_n)$

$A_B = S^{-1}AS$

Man nennt eine Matrix B ähnlich zu A, falls es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass $B = S^{-1}AS$ gilt

Proposition: Sei A eine $n \times n$-Matrix über K, sei S eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Dann haben $S^{-1}AS$ mit A dasselbe charakteristische Polynom. Ebenso haben sie dieselben Eigenwerte und zu jedem Eigenwert λ haben die Eigenräume dieselbe Dimension

Beweis: $P_{S^{-1}AS}$ ... char Polynom von $S^{-1}AS$, P_A ... char Polynom von A

$$P_{S^{-1}AS}(x) = \det(S^{-1}AS - x\underbrace{id}_{=S^{-1}S = S^{-1}idS}) = \det(S^{-1}(A - x\,id)S) = \det S^{-1}\det(A-x\,id)\det S =$$

$$= \underbrace{\det S^{-1}\det S}_{\det \underbrace{S^{-1}S}_{=id} = 1} \det(A - x\,id) = \det(A - x\,id) = p_A(x)$$

λ Eigenwert von $S^{-1}AS \Leftrightarrow 0 = p_{S^{-1}AS}(\lambda) = p_A(\lambda) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ λ Eigenwert von A

Sei $r = \dim[x : S^{-1}ASx = \lambda x] = E_{S^{-1}AS}$ Dann $\exists$ Basis $\{v_1 \dots v_r\}$ von $E_{S^{-1}AS}$

Setze $B := \{Sv_1, \dots, Sv_r\}$

$$A(c_1 Sv_1 + \dots + c_r Sv_r) = \sum_{j=1}^{r} c_j \underbrace{AS}_{=SS^{-1}AS} v_j = \sum_{j=1}^{r} c_j \underbrace{S(S^{-1}AS)v_j}_{\lambda v_j} = \lambda\Big(\sum_{j=1}^{r} c_j Sv_j\Big)$$

Sei v so, dass $Av = \lambda v$. Dann ist $\lambda(S^{-1}v) = \underbrace{S^{-1}A}_{=S^{-1}ASS^{-1}} v = (S^{-1}AS)(S^{-1}v)$

$\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_r$ mit $S^{-1}v = \sum_{j=1}^{r} c_j v_j \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{r} c_j S v_j$

Sei $\sum_{j=1}^{r} c_j Sv_j = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{r} c_j Sv_j = S\Big(\sum_{j=1}^{r} c_j v_j\Big)$

$\xRightarrow{S \text{ invertierbar}} \sum_{j=1}^{r} c_j v_j = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ Somit ist $\dim\{x : Ax = \lambda x\} = r$ $\square$

(*) A diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists S$ invertierbar mit $S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$p(x) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - x)$$

Falls $\text{card}\{j : \lambda_j = \lambda_1\} = k \Rightarrow$ alg. Vielfachheit von $\lambda_1 = k$, ebenso die geom. Vielfachheit

Proposition: Sei A eine $n \times n$-Matrix über K

(1) Falls A diagonalisierbar ist, dann ist für alle Eigenwerte λ die algebraische Vielfachheit gleich der geometr. Vielfachheit

(2) Falls K algebraisch ist (z.B. $\mathbb{C}$), dann folgt aus algebraische Vielfachheit = geometr. Vielfachheit für alle Eigenwerte, dass A diagonalisierbar ist

<u>Beweis:</u> (1) gerade (*) gezeigt

(2) $p(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{k_r}$

$\exists\ \underbrace{v_1 \ldots v_{k_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{v_{k_1+1} \ldots v_{k_1+k_2}}_{\lambda_2}, \ldots, \underbrace{v_n}_{\lambda_r}$ Eigenvektoren zu λ_1 bzw. $\lambda_2, \ldots,$ bzw. λ_r ist

Diese sind l.u., n. l.u. Vektoren in K^n sind Basis $\square$

BSP Eigenwerte & Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 15 & -66 & 21 \\ 0 & -3 & 3 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} 15-x & -66 & 21 \\ 0 & -3-x & 3 \\ -4 & 4 & 5-x \end{pmatrix} = -x^3 + 17x^2 - 15x - 225 + 792 - 84x - 252 + 12x - 180 =$$

$$= -x^3 + 17x^2 - 87x + 135 = -(x^3 - 17x^2 + 87x - 135)$$

	1	-17	87	-135
1	1	-16	76	-59
-1	1	-18	105	-240
$\boxed{3}$	1	-14	45	0

$7 \pm \sqrt{49-45} = 5 ; 9$

<u>zu 3:</u> $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -66 & 21 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -54 & 27 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu 3

<u>zu 9:</u> $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -66 & 21 & 0 \\ 0 & -12 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{60} & \cancel{15} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu 9

ähnlich: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu 5
(Rechnung ausgelassen)

A ist diagonalisierbar

<u>Proposition:</u> Es seien A_1 eine $k_1 \times k_1$-Matrix, ..., A_r eine $k_r \times k_r$ Matrix über K.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\begin{pmatrix} A_1 & & \emptyset \\ & A_2 \ddots & \\ \emptyset & & A_r \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & \emptyset \\ & A_2^n \ddots & \\ \emptyset & & A_r^n \end{pmatrix}$

<u>Beweis:</u> Induktion nach n

$n=0$: $A^0 = id = \begin{pmatrix} \underbrace{id}_{k_1} & & \emptyset \\ & \underbrace{id}_{k_2} \ddots & \\ \emptyset & & \underbrace{id}_{k_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^0 & & \emptyset \\ & A_2^0 \ddots & \\ \emptyset & & A_r^0 \end{pmatrix}$

Sei $n > 0$: $A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} A_1^{n-1} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & A_r^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & A_r \end{pmatrix}$

k,j-te Eintragung: $\ldots \underset{k_s}{\underbrace{j}} \ldots$ $\quad a \cdot (A^{n-1})^{(k)} A_j =$

$$= (A^{n-1})^{(k)} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (a_j)_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \} k_s = \begin{cases} k \text{ außerhalb } k_s = 0 \\ k \text{ innerhalb } k_s : (A_s{}^n)_{k,j} \end{cases}$$

aber $A^n = \begin{pmatrix} A_1{}^n & & & \emptyset \\ & A_2{}^n & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & A_r{}^n \end{pmatrix}$ $\square$

ERINNERUNG: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ falls $0 \le k \le n$

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$ und $k < 0$

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ gilt weiterhin, weil:

falls $k < 0$ und $k > n+1$: ✓

Der Fall $k = 0$ ist analog zu $k = n+1$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} + \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0} = 1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{k}$$

Proposition: Für $\lambda \in K$ gilt für eine $k \times k$-Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda & 1 \end{pmatrix}$, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \ldots \\ & \ddots & & \\ \emptyset & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \end{pmatrix}$$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Induktion nach n:

$n = 0$: $A^0 = id$ = gewünschte Form

Sei $n > 0$: $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & \binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} & \binom{n-2}{1}\lambda^{n-3} & \ldots \\ & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & & \lambda \end{pmatrix}$

2. Zeile: $(0 \quad \lambda^n \quad \underbrace{\lambda^{n-1} + \binom{n-1}{1}\lambda^{n-1}}_{= \lambda^{n-1}\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right) = \lambda^{n-1}\binom{n}{1}} \quad \underbrace{\binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} + \binom{n-1}{2}\lambda^{n-2}}_{= \binom{n}{2}\lambda^{n-2}} \ldots)$

$\square$

14.11.2012
(12.VO)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \emptyset\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ \emptyset & & & \lambda\end{pmatrix}\qquad A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots\\ & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda^n & \ddots \end{pmatrix}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(x) & \frac{f'(x)}{1!} & \frac{f''(x)}{2!} & \frac{f'''(x)}{3!} & \cdots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & f(x) & & \end{pmatrix}$$

Differentialgleichung:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} \qquad x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \text{ geg.}$$

$$X_n=\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n+1}\\ \vdots\\ x_{n+k-1}\end{pmatrix}$$

$$X_n=\begin{pmatrix}x_n\\ \vdots\\ x_{n+k-2}\\ a_1x_{n+k-2}+a_2x_{n+k-3}+\dots+a_kx_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0&\cdots&\cdots&0&1\\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1\end{pmatrix}$$

BSP $x_n = 8x_{n-1} - 17x_{n-2} + 10x_{n-3}$, $x_0=2$, $x_1=4$, $x_2=20$

$$X_n=\begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\\x_{n+2}\end{pmatrix},\quad X_n=\begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\\x_{n+2}=8x_{n+1}-17x_n+10x_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\10&-17&8\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_{n-1}\\x_n\\x_{n+1}\end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

$$p(x)=\det\begin{pmatrix}-x&1&0\\0&-x&1\\10&-17&8-x\end{pmatrix}=-x^3+8x^2+10-17x=-(x^3-8x^2+17x-10)$$

	1	-8	17	-10
1	1	-7	10	0

$$\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-10} = 5, 2$$

Eigenvektor zu 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-5&1&0&0\\0&-5&1&0\\10&-17&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-5&1&0&0\\0&-5&1&0\\ \cancel{0}&\cancel{-15}&\cancel{3}&\cancel{0}\end{array}\right)$$

$x_1 = 1$
$x_2 = 5$
$\to x_3 = 25$

$$\begin{pmatrix}1\\5\\25\end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu 2: $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ Eigenvektor zu 1: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

für $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\5\\25\end{pmatrix}\right\}$ ist $A_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

$X_0=\begin{pmatrix}2\\4\\20\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&2&5&4\\1&4&25&20\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&4&2\\0&\cancel{3}\,1&\cancel{24}\,8&\cancel{18}\,6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&4&2\\0&0&4&4\end{array}\right)\quad (X_0)_B=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$(X_n)_B=(A^nX_0)_B=A_B^n(X_0)_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\cdot2^n\\5^n\end{pmatrix}\begin{array}{l}v_n\\v_2\\v_3\end{array}$$

$$X_0 = 3v_1 - 2v_2 + v_3 \Rightarrow \underbrace{A^n X_0}_{=X^n} = 3v_1 - 2\cdot 2^n v_2 + 5^n v_3$$

$$\underset{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2}\end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{X_n}} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\cdot 2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + 5^n\begin{pmatrix}1\\5\\25\end{pmatrix} \Rightarrow x_n = 3 - 2\cdot 2^n + 5^n$$

BSP FIBONACCI-FOLGE

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad , \; x_0 = x_1 = 1$$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1}\end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_n + x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \underbrace{X_{n-1}}_{=\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n\end{pmatrix}}$$

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x\end{pmatrix} = x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Eigenvektor zu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\left.\begin{matrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ 0\end{matrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$

analog zu $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$

$X_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2$: $\left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 \\ 1\end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{5}\end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix} \to$

$\to \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}$ $\quad = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(2\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Proposition: Es sei A eine komplexe $n\times n$-Matrix und λ sei ein EW von A

(1) A hermite'sch $(A^* = A)$, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) A unitär $(A^* = A^{-1})$, dann gilt $|\lambda| = 1$

Beweis: $\exists v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$

(1) $\lambda \underbrace{|v|^2}_{\neq 0} = v^*\underbrace{(\lambda v)}_{Av} = \underbrace{v^* A v}_{(A^* v)^*} = (\underbrace{\underbrace{A^*}_{=A} v}_{\lambda v})^* v = \bar{\lambda} v^* v = \bar{\lambda} |v|^2$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(2) $|v|^2 = v^* v = \underbrace{v^* A^*}_{(Av)^*} A v = |Av|^2 = |\lambda|^2 |v|^2$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ $\square$

A diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren $\Longleftrightarrow$ $\exists S$ invertierbar mit $S^{-1}AS = D$

$\exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $\Longleftrightarrow$ $\exists S$ unitär (bzw. orthogonal) mit $S^*AS = D$ (bzw: $S^tAS = D$)

4) Der Spektralsatz für symmetrische Matrizen

Erinnerung: A symm $\Longleftrightarrow$ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

Falls V Teilraum von $\mathbb{R}^s$ betrachten wir $\varphi: V \to V$ linear mit

$\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle \quad \forall x, y \in V$

$[V]_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^s$, wie sieht $[V]_{\mathbb{C}}$ aus?

$[V]_{\mathbb{C}} = V + iV = \{v_1 + iv_2 : v_1, v_2 \in V\}$

Lemma: Es sei V ein Teilraum von $\mathbb{R}^s$ mit $\dim V \geq 1$, und $\varphi: V \to V$ linear mit $\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle \quad \forall x, y \in V$

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $v \in V$ mit $v \neq 0$, s.d. $\varphi(v) = \lambda v$.

Beweis: Wähle Basis $\mathcal{B} = \{v_1 \ldots v_n\}$ von V

$\varphi_{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$

also $\exists \underset{\neq 0}{w} \in \mathbb{C}^n$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\varphi_{\mathcal{B}} \cdot w = \lambda w$ (Fundamentalsatz der Algebra)

$\exists w_1, w_2 \in V$ mindestens eines $\neq 0$ mit $w = (w_1 + w_2)_{\mathcal{B}}$

$\underbrace{\varphi(w_1 + iw_2)}_{= \varphi(w_1) + i\varphi(w_2)} = \lambda(w_1 + iw_2) = \lambda w_1 + i\lambda w_2$

$\varphi(w_1+w_2)_B = (\varphi(w_1+w_2))_B$

$$\lambda\ |w_1+iw_2|^2 = \langle \underbrace{\lambda(w_1+iw_2)}_{=\varphi(w_1+iw_2)}, (w_1+iw_2)\rangle = \langle w_1+iw_2, \underbrace{\varphi(w_1+iw_2)}_{\lambda(w_1+iw_2)}\rangle =$$

$$= \bar\lambda\ \langle w_1+iw_2, w_1+iw_2\rangle = \bar\lambda\ |w_1+iw_2|^2$$

$\Rightarrow \lambda = \bar\lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi(w_1) = \lambda w_1$ und $\varphi(w_2) = \lambda w_2$ $\square$

Satz: Sei A eine reelle $n\times n$-Matrix. Dann ist A genau dann symm., wenn A eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt.

Beweis: ($\Leftarrow$) $\exists S$ orthogonal mit $\underbrace{S^t}_{=S^{-1}} A S = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = SDS^t$. Dann ist

$A^t = (SDS^t)^t = S\underbrace{D^t}_{=D} S^t = SDS^t = A$.

($\Rightarrow$) Behauptung: Es sei V ein r-dim ($r \geq 1$) Teilraum von $\mathbb{R}^s$ und $\varphi: V \to V$ linear mit $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$ $\forall x,y \in V$

Dann gibt es eine Basis $\{v_1 \dots v_r\}$ von V und $\lambda_1 \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$

Bew. der Behauptung: Induktion nach r

$r=1$: $\exists v \neq 0$, $v \in V$ mit $\{v\}$ ist Basis von V

$\varphi(v) \in V \Rightarrow \exists \lambda$ mit $\varphi(v) = \lambda v$

Sei $r>1$: Nach dem Lemma $\exists \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\exists v_r \in V$, $v_r \neq 0$ s.d. $\varphi(v_r) = \lambda_r v_r$

$\dim [v_r] = 1$. Sei $\tilde V := [v_r]^\perp$ in V.

also $\tilde V = \{v \in V: \langle v, v_r\rangle = 0\}$

$\tilde V \oplus [v_r] = V \Rightarrow \dim \tilde V = r-1$

$\forall x,y \in \tilde V$: $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$

Sei $v \in \tilde{V}$ (= Orthogonalraum): $\langle \varphi(v), v_r \rangle =$ 19.11.2012 (13. VO)

$$\langle \varphi(v), v_r \rangle = \langle v, \underbrace{\varphi(v_r)}_{=\lambda_r v_r} \rangle = \lambda_r \underbrace{\langle v, v_r \rangle}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(v) \in [\{v_r\}]^{\perp} = \tilde{V}$$

Abb. $\varphi: V \to V \overset{\text{ind. vor.}}{\Longrightarrow} \exists$ Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ von $\tilde{V}$,

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} \in \mathbb{R}$, s.d. $\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$ $\forall j \in \{1, \dots, r-1\}$ gilt.

$B = \{v_1, \dots, v_{r-1}, \frac{v_r}{|v_r|}\}$ ist Orthonormalbasis von V und

$\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$ für $j \in \{1, \dots, r-1\}$ und

$$\varphi\left(\frac{v_r}{|v_r|}\right) = \frac{1}{|v_r|} \cdot \underbrace{\varphi(v_r)}_{=\lambda_r v_r} = \lambda_r \frac{v_r}{|v_r|} \qquad \diamond$$

Setze $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \underbrace{y^t \cdot \underbrace{A}_{=A^t}}_{=(Ay)^t} x = (Ay)^t x = \langle x, Ay \rangle =$$

$$= \langle x, \varphi(y) \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Wegen der Behauptung $\exists$ ONB $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

mit $Av_j = \lambda v_j$ $\forall_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\square$

<u>Korollar</u>: Für eine reelle $n \times n$-Matrix A sind äquivalent

(1) A ist symmetrisch (also $A^t = A$)

(2) $\exists$ ONB von Eigenvektoren

(3) $\exists$ orthogonale Matrix S mit $S^t A S$ ist eine Diagonalmatrix

<u>Proposition</u>: Sei A eine symm. $n \times n$-Matrix

(1) A ist genau dann positiv definit, falls alle Eigenwerte > 0 sind

(2) A ist genau dann positiv semidefinit, falls alle Eigenwerte ≥ 0 sind

(3) A ist genau dann negativ definit, —— " —— < 0 sind

(4) —— " —— semidefinit —— " —— ≤ 0 sind

<u>Beweis:</u>

(3) ($\Longrightarrow$) Sei λ EW von $A \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$

$$\Rightarrow 0 > v^t \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda \underbrace{v^t v}_{|v|^2} = \lambda \underbrace{|v|^2}_{>0} \Rightarrow \lambda < 0$$

($\Longleftarrow$) Wissen: $\exists\, S$ orthogonal mit $S^t A S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S D S^t = \underbrace{S S^t}_{id} A \underbrace{S S^t}_{id} = A$$ Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

$$x^t A x = \underbrace{x^t}_{=(S^t x)^t} S D S^t x = (S^t x) D \underbrace{(S^t x)}_{=y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = y^t \cdot D y =$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2$$ weil $x \neq 0$ ist $\underbrace{S^t x}_{=y} \neq 0$

$$\Rightarrow x^t A x = \sum_{j=1}^n \underbrace{\lambda_j}_{\substack{<0 \\ \text{Voraussetzung}}} y_j^2 \underset{\substack{k \text{ so, dass } y_k \neq 0}}{=} \underbrace{\underbrace{\lambda_k}_{<0} \underbrace{y_k^2}_{>0}}_{<0} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underbrace{\lambda_j}_{<0} \underbrace{y_j^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} < 0$$

$\Rightarrow$ A ist negativ definit

(1) A positiv definit $\Longleftrightarrow$ $-A$ neg. definit $\Longleftrightarrow$ EW von $-A < 0$

$\Longleftrightarrow$ EW von $A > 0$

(2) ($\Rightarrow$) Sei λ EW von $A \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ mit $Av = \lambda v \Longrightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq v^t \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda v^t v = \lambda \underbrace{|v|^2}_{>0} \Longrightarrow \lambda \geq 0$$

($\Leftarrow$) $\exists S$ orthogonal mit $S^t A S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$S D S^t = A$ Sei $x \in \mathbb{R}^n$: Setze $y = S^t x$

Dann ist $x^t A x = \underbrace{x^t}_{=(S^t x)^t} S D S^t x = y^t D y = \sum_{j=1}^n \underbrace{\lambda_j}_{\geq 0} \underbrace{y_j^2}_{\geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow$ A ist positiv semidefinit

(4) A negativ semidefinit $\Longleftrightarrow$ $-A$ positiv semidefinit $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ EW von $-A \geq 0$ $\Longleftrightarrow$ EW von A sind ≤ 0 $\square$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}^t \cdot A \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \sum\limits_{j=2}^{s} a_{1j}x_j \\ a_{21}x_1 + \sum\limits_{j=2}^{s} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \sum\limits_{j=2}^{s} a_{sj}x_j \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + x_1 \sum_{j=2}^{s} a_{1j}x_j +$$

$$+ \sum_{k=2}^{s} a_{k1}x_1x_k + \sum_{k=2}^{s}\sum_{j=2}^{s} a_{kj}x_jx_k =$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{s} a_{1j}x_j + \sum_{k=2}^{s}\sum_{j=2}^{s} a_{kj}x_jx_k$$

<u>Lemma</u>: Für A symmetrische $s \times s$-Matrix und $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$

gilt:
$$x^t A x = a_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{s} a_{1j}x_j + \sum_{k=2}^{s}\sum_{j=2}^{s} a_{kj}x_jx_k$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Minor: det Teilmatrix

Hauptminor: det Untermatrizen, die symm. gewählt

führende Hauptminoren: $a_{11}\ (= \det(a_{11}))$, $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \ldots \ \det A$$

<u>Proposition</u>: Sei A eine reelle symm. $n \times n$-Matrix

(1) Es sind äquivalent

(i) A ist positiv definit

(ii) Alle EW von A sind > 0

(iii) Die Diagonalelemente beim Gauß-Verfahren (ohne Zeilen/Spaltenvertauschungen) sind >0 $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ \emptyset & & * \end{pmatrix}$

(iv) Die führenden Hauptminoren sind positiv

(2) Es sind äquivalent:

(i) A ist neg. definit.

(ii) Alle EW von A sind <0

(iii) Die Diagonalelemente beim Gauß-Verfahren sind <0

(iv) Die führenden Hauptminoren haben abwechselndes Vorzeichen, negativ beginnend

Beweis: Wir zeigen nur (1), daraus erhält man (2), indem man (1) auf $-A$ anwendet.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) ✓

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) erhält man durch Überlegen

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Falls B eine $s\times s$-Matrix ist, symm. nach 1. Schritt im Gauß-Verfahren

Es ist dann $C^t = C$ und C positiv definit.

$C = (c_{k,j})_{k,j=2}^{s}$ und $c_{k,j} = b_{k,j} - \frac{b_{k1}}{b_{11}} b_{1j}$.

Dabei ist wegen $0 < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{11}$, $b_{11} > 0$

$$c_{j,k} = \underbrace{b_{j,k}}_{=b_{k,j}} - \underbrace{\frac{b_{j,1}}{b_{1,1}}}_{\frac{b_{1,j}}{b_{1,1}}} \underbrace{b_{1,k}}_{=b_{k,1}} = b_{k,j} - \frac{b_{k,1}}{b_{1,1}} b_{1,j} = c_{k,j}, \text{ also}$$

$C^t = C$ Sei $x = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \neq 0$ Setze $\hat{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{11}} \sum_{j=2}^{s} b_{1j} x_j \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \neq 0$ ist $\neq 0$

$$\Rightarrow 0 < \hat{x}^t B \hat{x} = b_{1,1} \cdot \frac{1}{b_{1,1}^2} \Big(\overbrace{\sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j}^{(1.\text{Komp})}\Big)^2 - 2 \frac{1}{b_{1,1}} \Big(\sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\Big) \cdot \Big(\sum_{k=2}^{s} b_{1k} x_k\Big) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} b_{k,j} x_k x_j =$$

$$= \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} b_{k,j}\, x_k x_j - \frac{1}{b_{11}} \underbrace{\left(\sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\right)\left(\sum_{k=2}^{s} b_{k,1} x_k\right)}_{= \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} \frac{b_{k1} b_{1j}}{b_{11}} x_k x_j} =$$

$$= \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} \underbrace{\left(b_{k,j} - \frac{b_{k1} b_{1j}}{b_{11}}\right)}_{c_{k,j}} x_k x_j = x^t \cdot C \cdot x$$

Also C ist positiv definit

Durch Induktion erhalten wir (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Induktiv

20.11.2012
(14. VO)

$$\left(\begin{array}{c|c} b_{1,1} & \\ \hline & C \end{array}\right)$$

C positiv definit, $B \ldots$ $s \times s$-Matrix

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$, $x \neq 0$ $\quad x^t B x = b_{11} x_1^2 + 2 x_1 \left(\sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\right) + \sum_{k=2}$

$$x^t B x = b_{11} x_1^2 + 2 x_1 \left(\sum_{j=2}^{s} b_{1j} x_j\right) + \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} b_{j,k} x_j x_k =$$

$$= b_{11} \left(x_1 + \frac{1}{b_{11}} \sum_{j=2}^{s} b_{1j} x_j\right)^2 \underbrace{- b_{11} \frac{1}{b_{11}^2} \left(\sum_{j=2}^{s} b_{1j} x_j\right)^2}_{= \frac{1}{b_{11}} \left(\sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\right)\left(\sum_{k=2}^{s} \underbrace{b_{1,k}}_{b_{k1}} x_k\right)^2} + \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} b_{j,k} x_j x_k =$$

$$= b_{11} \left(x_1 + \frac{1}{b_{11}} \sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\right)^2 + \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} b_{jk} x_j x_k - \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} \frac{b_{1,k}}{b_{1,1}} x_j x_k =$$

$$= b_{1,1} \left(x_1 + \frac{1}{b_{1,1}} \sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\right)^2 + \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=2}^{s} \underbrace{\left(b_{j,k} - \frac{b_{1,k}}{b_{1,1}} b_{1,j}\right)}_{c_{j,k}} x_j x_k$$

Setze $\tilde{x} := \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$. Dann ist $x^t B x = b_{11} \left(x_1 + \frac{1}{b_{11}} \sum_{j=2}^{s} b_{1,j} x_j\right)^2 + \tilde{x}^t C \tilde{x}$

1. Fall: $\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow$

$$x^t B x = \underbrace{b_{1,1}\left(x_1 + \frac{1}{b_{11}} \sum_{j=2}^{s} b_{1j} x_j\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{x}^t C \tilde{x}}_{>0} > 0$$

2. Fall: $\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \tilde{x} = 0 \Longrightarrow$

$x^t B x = b_{11} x_1^2$ und $x_1 \neq 0$ (weil $x \neq 0$), also

$$x^t B x = \underbrace{b_{11}}_{>0} \underbrace{x_1^2}_{>0} > 0$$

nach Voraussetzung

Damit ist B positiv definit.

Am Ende der Induktion: A positiv definit $\square$

5) DER SPEKTRALSATZ FÜR NORMALE MATRIZEN

Erinnerung: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underset{-i}{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}, \underset{i}{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}$

Lemma: Sei V ein Teilraum des $\mathbb{R}^s$ mit $\dim V \geq 1$ und $\varphi: V \to V$ sei linear. Dann $\exists\ \lambda \in \mathbb{C}$ und ein $v \in V$ mit $v \neq 0$, s.d. $\varphi(v) = \lambda v$

Beweis: Wähle Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V. $\varphi_\mathcal{B} \in M_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \exists\ w \overset{\neq 0}{} \in \mathbb{C}^n$ mit $\varphi_\mathcal{B} w = \lambda w$ $\quad \exists\ u \in V$ mit $u_\mathcal{B} = w$
$\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad u \neq 0$

$$(\varphi(u))_\mathcal{B} = \varphi_\mathcal{B} \cdot u_\mathcal{B} = \varphi_\mathcal{B} w = \lambda w = (\lambda u)_\mathcal{B} \Rightarrow \varphi(u) = \lambda u \quad \square$$

Satz: Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix. Dann ist A genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt.

Beweis: Ang. $\exists$ ONB $\{v_1, \dots, v_n\}$. Setze $S = (v_1, \dots, v_n)$

S ist unitär, weil Spaltenvektoren ONB $\quad \underbrace{S^*}_{S^{-1}} A S = D$

$(\Leftarrow)$ $\exists S$ unitär mit $S^* A S = D \Rightarrow$

$$S D S^* = \underbrace{SS^*}_{id} A \underbrace{SS^*}_{id} = A$$

$$AA^* = S^* D S (S^* D S)^* = S^* D S S^* D^* S =$$

$$= S^* \underbrace{D}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}} \underbrace{D^*}_{= \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar\lambda_n \end{pmatrix}} S = S^* \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} S =$$

$$= S^* D^* \underbrace{SS^*}_{id} D S = \underbrace{(S^* D S)}_{A}{}^* \underbrace{(S^* D S)}_{A} = A^* \cdot A$$

Deshalb ist A normal.

$(\Rightarrow)$ __Behauptung:__ Sei V ein Teilraum von $\mathbb{C}^n$ mit $V = r \geq 1$

mit $\underbrace{Av \in V \text{ und } A^* v \in V}_{\text{invariant}}$ $\forall v \in V$

Element aus TR
Bild auch aus Raum

Dann besitzt V eine ONB aus Eigenvektoren von A

$Av \in TR$
$A^* v \in TR$

__Beweis der Beh.:__ Induktion nach r:

$r = 1$ Wähle $v \in V$ mit $|v| = 1$

$Av = \lambda v$ für passendes $\lambda \in \mathbb{C}$

Sei $r > 1$ Nach dem Lemma $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V$ mit $v \neq 0$, s.d.

$Av = \lambda v$.

min. dim = 1

Betrachte $U := \{w \in V \text{ mit } Aw = \lambda w\}$ Teilraum von V

mit $\dim \geq 1$

Sei $w \in U \Rightarrow Aw = \lambda w \in U$

$$A^* w \in V \text{ und } A(A^* w) = \underbrace{AA^*}_{A^*A} w = A^* \cdot \underbrace{Aw}_{\lambda w} = \lambda A^* w$$

$\Rightarrow A^* w \in U$

Es gibt eine ONB $\{v_1, \dots, v_s\}$ von U $(s = \dim U)$

__1. Fall:__ Falls $s = r$ ✓

2. Fall: $s < r$ Setze $W = U^\perp$ $\dim W = r - s < r$

Sei $w \in W$ Weiters sei $u \in U$

$$\langle Aw, u\rangle = \underbrace{u^* A}_{=(A^* u)^*} w = \langle w, \underbrace{A^* u}_{\in U}\rangle = 0$$

Somit $Aw \in U^\perp = W$

$$\langle A^* w, u\rangle = \underbrace{u^* A^*}_{=(\underbrace{Au}_{\lambda u})^* = \bar\lambda u^*} w = \bar\lambda u^* w = \bar\lambda \underbrace{\langle w, u\rangle}_{=0} = 0$$

Deshalb $A^* w \in U^\perp = W$

Nach Induktionsvoraussetzung $\exists$ ONB $\{v_{s+1}, \dots v_r\}$ aus Eigenvektoren von W. Daher ist $\{v_1 \dots v_r\}$ ONB aus Eigenvektoren von V $\diamond$

Für $v \in \mathbb{C}^n$ ist $Av \in \mathbb{C}^n$ und $A^* v \in \mathbb{C}^n \overset{\text{Beh.}}{\Longrightarrow} \exists$ ONB $\{v_1, \dots v_n\}$ aus Eigenvektoren $\square$

Korollar: Für eine komplexe $n \times n$ - Matrix sind äquivalent

(1) A ist normal $(AA^* = A^* A)$

(2) $\exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

(3) $\exists$ unitäre Matrix S, s.d. $S^* A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Proposition: Sei A eine komplexe $n \times n$ - Matrix

(1) A ist genau dann Hermite'sch $(A^* = A)$, wenn alle EW reell sind.

(2) A — " — unitär $(A^* = A^{-1})$, wenn alle EW Betrag 1 haben.

Beweis: $(\Rightarrow)$ wurde bereits allg gezeigt.

(1) $(\Leftarrow)$ $\exists$ unitäre Matrix S mit

$S^* A S = D \Rightarrow A = S D S^* \Rightarrow$

$$A^* = S \underbrace{D^*}_{=\begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D} S^* = S D S^* = A \text{, also A Hermite'sch.}$$

(2) ($\Leftarrow$) $\exists$ unitäre Matrix S mit $S^*AS = D$, also $A = SDS^*$

$$A^*A = SD^*\underbrace{S^*S}_{id}DS^* = S\underbrace{D^*D}_{\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = id}S^* = SS^* =$$

$= id \Rightarrow A^{-1} = A^* \Rightarrow$ also A unitär $\square$

__Proposition:__

(1) A pos. definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte > 0

(2) A pos. semi-definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte ≥ 0

(3) A neg. definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte < 0

(4) A neg. semi-definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte ≤ 0

__Beweis:__ (3) ($\Rightarrow$) λ Eigenwert $\Rightarrow \exists x \neq 0 \; Ax = \lambda x$

$$\lambda \underbrace{|x|^2}_{\substack{\neq 0 \\ > 0}} = \lambda \underbrace{x^* x}_{= |x|^2} = x^* \underbrace{Ax}_{= \lambda x} < 0 \Rightarrow \lambda < 0.$$

($\Leftarrow$) $A = SDS^*$. Sei $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$

$$x^* A x = \underbrace{x^* S}_{= (S^* x)^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^*} D \underbrace{S^* x}_{\neq 0} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{< 0} |y_j|^2 < 0 \quad \square$$

6) JORDAN'SCHE NORMALFORM

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & & & & \\ & \ddots & & & & \emptyset & \\ & & \lambda_1 & 0 & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \lambda_2 & 0 & \\ & \emptyset & & & & \lambda_3 & * \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & * & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & * & 0 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(Primärzerlegung)

__Proposition:__ Es sei $\varphi: V \to V$ linear, V endlichdim., $\lambda \in K$. Dann gibt es Teilräume V_1 und V_2 mit $V_1 \oplus V_2 = V$, $\varphi(V_1) \subseteq V_1$ und $\varphi(V_2) \subseteq V_2$, sodass

($\varphi - \lambda id$) ist invertierbar auf V_1 und

$\exists r$ mit $(\varphi - \lambda id)^r(v) = 0 \quad \forall v \in V_2$.

Falls $\exists r$ mit $\varphi^r = 0$, dann heißt φ <u>nilpotent</u>

26.11.2012
(15. VO)

$$V_1 = \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^r$$

<u>Beweis</u>: $\operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^{k+1} \subseteq \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^k$, weil $x \in \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^{k+1}$

$\Rightarrow \exists y$ mit $x = (\varphi - \lambda id)^{k+1}(y) = (\varphi - \lambda id)^k((\varphi - \lambda id)(y))$

Insbesondere: $\dim \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^{k+1} \leq \dim \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$

Es gibt ein minimales $r \geq 0$, sodass $\dim \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^r - \dim \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^{r+1}$

$\Rightarrow \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^{r+1} = \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^r$

<u>Setze</u> $V_1 := \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^r$, $V_2 := \ker(\varphi - \lambda id)^r$

Sei $x \in V_1 = (\varphi - \lambda id)^{r+1} \Rightarrow \exists y \in V$ mit $(\varphi - \lambda id)^{r+1}(y) = x$

$$\Rightarrow x = (\varphi - \lambda id)^{r+1}(y) = (\varphi - \lambda id)\underbrace{((\varphi - \lambda id)^r(y))}_{\in \operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^r = V_1}$$

$\Rightarrow (\varphi - \lambda id)\big|_{V_1}^{\text{eingeschränkt}}$ ist surjektiv

$\Rightarrow \varphi - \lambda id$ ist bijektiv, also invertierbar auf V_1

Sei $x \in \underbrace{V_2}_{= \ker(\varphi - \lambda id)^r}$. Dann ist $(\varphi - \lambda id)^r(x) = 0$

Sei $x \in V_1 \cap V_2 = (\varphi - \lambda id)^r(x) = 0$ (da $\in V_2 = \ker(\varphi - \lambda id)^r$).

Auf V_1 ist $(\varphi - \lambda id)^r$ bijektiv, weil $\varphi - \lambda id$ bijektiv ist

$\Rightarrow x = 0$ Somit $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$V_1 \oplus V_2 \subseteq V$ $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(\operatorname{im}(\varphi - \lambda id)^r) + \dim(\ker(\varphi - \lambda id)^r) = \dim V$

$\dim V_1 \oplus \dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$

Sei $x \in V_1 \Rightarrow (\varphi - \lambda id)(x) \in V_1 \Rightarrow \varphi(x) = \underbrace{(\varphi(x) - \lambda x)}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda x}_{\in V_1} \in V_1$

Sei $x \in V_2 \Rightarrow (\varphi - \lambda id)^r(\varphi - \lambda id)(x) = (\varphi - \lambda id)\underbrace{(\varphi - \lambda id)^r(x)}_{= 0} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(\varphi - \lambda id)(x)}_{= \varphi(x) - \lambda id} \in V_2 = \ker(\varphi - \lambda id)^r$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \underbrace{(\varphi(x) - \lambda x)}_{\in V_2} + \underbrace{\lambda x}_{\in V_2} \in V_2$$

$\square$

(Hauptsatz über nilpotente Matrizen)

Proposition: Es sei V ein endlichdim $V r$ über K, $\varphi: V \to V$ linear und es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^r(x) = 0 \quad \forall x \in V$

Dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ und für $t \in \{1, 2, \dots, s\}$ gibt es $r_t \in \mathbb{N}$ und es gibt eine Basis $B = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,r_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,r_2}, \dots v_{s,1}, \dots, v_{s,r_s}\}$ $(r_1 + r_2 + \dots + r_s = \dim V)$, wobei für $t \in \{1, 2, \dots, s\}$ gilt

$\varphi(v_{t,j}) = v_{t,j-1}$ für $j \in \{2, 3, \dots, r_t\}$ und

$\varphi(v_{t,1}) = 0$

Beweis: Induktion nach r (!!! wichtig !!!)

$r=1$: $V = \ker \varphi$ $\quad \exists$ Basis $B = \{v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{s,1}\}$ von $V = \ker \varphi$

Für $t \in \{1, 2, \dots, s\}$ gilt $\varphi(v_{t,1}) = 0$

$(r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_s = 1)$

Sei $r > 1$: Betrachte $\operatorname{im} \varphi \subseteq V$ Sei $x \in \operatorname{im} \varphi$

$\Rightarrow \exists y \in V$ mit $\varphi(y) = x \Rightarrow \varphi^{r-1}(\underbrace{x}_{=\varphi(y)}) = \varphi^r(y) = 0$

Nach I.V. $\exists m$, $\exists \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_m \in \mathbb{N}$, $\exists$ Basis $\tilde{B} = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,\tilde{r}_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,\tilde{r}_2}, \dots, v_{m,1}, \dots, v_{m,\tilde{r}_m}\}$ von $\operatorname{im} \varphi$ mit $\varphi(v_{t,j}) = v_{t,j-1}$ $\forall j \in \{2, \dots, \tilde{r}_t\}$, $\varphi(v_{t,1}) = 0$ $\forall t \in \{1, \dots, m\}$

Sei $t \in \{1, \dots, m\}$. Weil $v_{t,\tilde{r}_t} \in \operatorname{im} \varphi$, $\exists v_{t,\tilde{r}_{t+1}} \in V$ mit $\varphi(v_{t,\tilde{r}_{t+1}}) = v_{t,\tilde{r}_t}$

Setze $r_t = \tilde{r}_{t+1} \in \mathbb{N}$

$\varphi(v_{t,j}) = v_{t,j-1}$ $\forall j \in \{2, \dots r_t\}$ und $\varphi(v_{t,1}) = 0$ $\forall t \in \{1, \dots, m\}$

Setze $B_1 := \{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,r_2}, \dots, v_{m,1}, \dots, v_{m,r_m}\}$

Seien $\lambda_{t,j} \in K$ so dass $\sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_t} \lambda_{t,j} v_{t,j} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \varphi\left(\sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_t} \lambda_{t,j} v_{t,j}\right) = \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_t} \lambda_{t,j} \underline{\varphi(v_{t,j})}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1 \\ v_{t,j-1} & \text{für } j > 1 \end{cases}$$

$$= \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=2}^{r_t} \lambda_{t,j} v_{t,j-1} \Rightarrow \lambda_{t,j} = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, m\} \ \forall j \in \{2, \dots, r_t)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{t=1}^{m} \lambda_{t,1} \underbrace{v_{t,1}}_{\in \tilde{B}} \Rightarrow \lambda_{t,1} = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, m\}$$

Somit ist B_1 linear unabhängig

Man kann B_1 zu einer Basis $B_1 \cup \{w_{m+1}, \dots, w_s\}$ ergänzen

Sei $t \in \{m+1, \dots, s\}$ Dann ist $\varphi(w_t) \in \operatorname{im}\varphi$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_{t,1,2}; \dots; \alpha_{t,1,r_1}; \alpha_{t,2,2}; \dots; \alpha_{t,2,r_2}; \dots; \alpha_{t,m,2}; \dots; \alpha_{t,m,r_t}$ sodass

$$\varphi(w_t) = \sum_{u=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_u - 1} \alpha_{t,u,j+1} v_{u,j}$$

Setze $v_{t,1} := w_t - \sum_{u=1}^{m} \sum_{j=2}^{r_u} \alpha_{t,u,j} v_{u,j}$, $r_t = 1$

$$\varphi(v_{t,1}) = \varphi(w_t) - \underbrace{\sum_{u=1}^{m} \sum_{j=2}^{r_u} \alpha_{t,u,j} \underbrace{\varphi(v_{u,j})}_{= v_{u,j-1}}}_{= \sum_{j=2}^{r_{u-1}} \alpha_{t,u,j+1} v_{u,j}}$$

Setze $B := B_1 \cup \{v_{m+1,1}, \dots, v_{s,1}\}$

Wähle $\lambda_{t,j} \in K$ so, dass $0 = \sum_{t=1}^{s} \sum_{j=1}^{r_t} \lambda_{t,j} v_{t,j} =$

$$= \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_t} \lambda_{t,j} v_{t,j} + \underbrace{\sum_{t=m+1}^{s} \lambda_{t,1} \underbrace{v_{t,1}}_{= w_t - \sum_{u=1}^{m} \sum_{j=2}^{r_u} \alpha_{t,u,j} \cdot v_{u,j}}}_{= \sum_{u=m+1}^{s} \lambda_{u,1} \left(w_u - \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=2}^{r_t} \alpha_{u,t,j} v_{t,j}\right)}$$

$$= \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_t} \left(\lambda_{t,j} - \sum_{u=m+1}^{s} \lambda_{u,1} \alpha_{u,t,j}\right) v_{t,j} + \sum_{u=m+1}^{s} \lambda_{u,1} w_u$$

Weil $B_1 \cup \{w_{m+1}, \dots, w_s\}$ Basis ist, $\lambda_{u,1} = 0 \;\; \forall u \in \{m+1, \dots, s\}$ und

$$\lambda_{t,j} - \sum_{u=m+1}^{s} \underbrace{\lambda_{u,1}}_{=0} \alpha_{u,t,j} = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, m\} \;\; \forall j \in \{1, \dots, r_t\}$$

also ist B linear unabhängig, also Basis $\square$

φ:

$\varphi: V \to V$ linear, V endlichdim, $\lambda \in K$ ein Eigenwert

<u>Def.</u>: Für $r \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ nennt man $\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \emptyset \\ & \ddots & 1 \\ \emptyset & & \lambda \end{pmatrix}}_{r \times r}$ einen

elementaren Jordan-Block der

Länge r für den Eigenwert λ.

$V = V_1 \oplus V_2$ wobei $(\varphi - \lambda id)$ invertierbar auf V_1 und auf V_2, $\exists r$ mit

$(\varphi - \lambda id)^r (x) = 0 \quad \forall x \in V_2.$

$\exists$ Basis $\mathcal{B} = \{v_{1,1}, \dots, v_{1 r_1}, v_{2,1}, \dots, v_{s,1}, \dots, v_{s r_s}\}$ von V_2

$$\left.\begin{array}{ll} \text{mit } (\varphi - \lambda id)(v_{t,j}) = v_{t,j-1} & \forall j \in \{2, \dots, r_t\} \\ (\varphi - \lambda id)(v_{t,1}) = 0 & \end{array}\right\} \forall t \in \{1, \dots, s\}$$

$$\varphi(v_{t,j}) = \lambda v_{t,j} + v_{t,j-1} \quad j > 1$$

$$\varphi(v_{t,1}) = \lambda v_{t,1}$$

$$(\varphi|_{V_2})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & \ddots & \emptyset \\ 0 & \lambda & \ddots & 1 \\ & 0 & & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{matrix} & & \emptyset \\ & \boxed{} & \\ & & \ddots \quad \boxed{} \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{}_{r_1} \; \underbrace{}_{r_2} \cdots \underbrace{}_{r_s}$$

$$\varphi|_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{c|c} (\varphi|_{V_2})_{\mathcal{B}} & \emptyset \\ \hline \emptyset & B \end{array}\right)$$ wobei für B eine 0×0-Matrix zugelassen ist

$$\left((\varphi|_{V_2})_{\mathcal{B}} - \lambda id \right)^{\max\{r_1, \dots, r_s\}} = 0$$

27.11.2012
(16.VO)

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \emptyset \\ & J_2 & & \\ & & \ddots J_s & \\ \emptyset & & & B \end{pmatrix} \quad r_1, \dots, r_s$$

Falls J elementarer Jordanblock der Länge r für λ ist, dann ist $(J - \lambda id)^r = 0$,

weil $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \emptyset \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & 0 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}^{r-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \emptyset \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ \emptyset & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}^{r-2} = 0$

$$\Rightarrow (A - \lambda id)^{\max\{r_1, \dots, r_s\}} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & (B - \lambda id)^{\max\{r_1, \dots, r_s\}} \end{pmatrix}$$

Proposition: Sei A eine $n\times n$-Matrix über K für ein $n\in\mathbb{N}$ und sei λ ein Eigenwert von A ($\lambda\in K$). Dann gibt es ein $s\in\mathbb{N}$, $r_1,\dots,r_s\in\mathbb{N}$ und eine (möglicherweise 0×0-Matrix) B und eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n, sodass
$A_{\mathcal{B}}=C=\begin{pmatrix} J_1 & & & \emptyset \\ & \ddots & & \\ & & J_s & \\ \emptyset & & & B\end{pmatrix}$, wobei J_j ein elementarer Jordanblock der Länge r_j für λ ist. Es gibt dann eine invertierbare Matrix S mit $C=S^{-1}AS$.
Weiters ist s die geometrische Vielfachheit von λ und $\sum_{j=1}^{s} r_j$ die algebraische Vielfachheit von λ. Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit von λ höchstens die algebraische Vielfachheit von λ ($=k$)
Weiters ist $(C-\lambda\,\mathrm{id})^k=\begin{pmatrix}\emptyset & \emptyset\\ \emptyset & (B-\lambda\,\mathrm{id})^k\end{pmatrix}$.

Beweis: $C-\lambda\,\mathrm{id}=\begin{pmatrix} \begin{matrix}0&1&&\emptyset\\&\ddots&\ddots&\\&&&1\\\emptyset&&&0\end{matrix} & & & \emptyset \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & B-\lambda\,\mathrm{id}\end{pmatrix} \Rightarrow \dim E_\lambda = s$

weil $\dim E_\lambda = n-\underbrace{\mathrm{rg}\,(C-\lambda\,\mathrm{id})}_{n-s}$

$p(x)=\det\begin{pmatrix} \begin{matrix}\lambda-x&1&&\emptyset\\&\ddots&\ddots&1\\\emptyset&&&\lambda-x\end{matrix} & & & \emptyset \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & B-\lambda\,\mathrm{id}\end{pmatrix}=(\lambda-x)^{\sum_{j=1}^{s} r_j}\det(B-x\,\mathrm{id}) \Rightarrow$

$\rightarrow$ alg. Vielfachheit $=\sum_{j=1}^{s} r_j$ $\square$

Erinnerung: Weil nach dem Fundamentalsatz der Algebra $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gilt der folgende Satz in $\mathbb{C}$:
(Komplexe Jordan'sche Normalform)

Satz: Sei $n\in\mathbb{N}$ und A eine $n\times n$-Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n, sodass
$A_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} J_1 & & & \emptyset\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & J_s\end{pmatrix}=C$, wobei $s\in\mathbb{N}$, $J_1,\dots,J_s$ elementare Jordanblocks zu (möglicherweise gleichen) Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in K$ sind.
Weiters gibt es eine invertierbare Matrix S, sodass $C=S^{-1}AS$ ist.

Beweis: Wir zeigen, ist V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$, $\varphi: V \to V$ linear, dann gibt es eine Basis B von V, sodass $\varphi_B = C$

Induktion nach n

$n=1$: $v \neq 0$, $B = \{v\}$ Basis von V

$\varphi(v) \in V \Rightarrow \exists \lambda \in K$ mit $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \varphi_B = (\lambda)$

Sei $n>1$: $\exists \lambda \in K$ $\exists v \in V$, $v \neq 0$ sodass $\varphi(v) = \lambda v$

$\exists$ Teilräume V_1 und V_2 von V mit $V_1 \oplus V_2 = V$

$\forall x \in V_1$ ist $\varphi(x) \in V_1$, $\forall x \in V_2$ ist $\varphi(x) \in V_2$,

$(\varphi - \lambda id)$ ist invertierbar auf V_1 und $\exists r$ mit $(\varphi - \lambda id)^r(x) = 0$ $\forall x \in V_2$

$\exists$ Basis B_1 von V_2, sodass $(\varphi|_{V_2})_{B_1} = \begin{pmatrix} J_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & J_k \end{pmatrix}$, wobei

$J_1, \dots, J_k$ elementare Jordanblocks für λ sind.

Wir wissen $V_1 \neq V$, weil sonst $\varphi - \lambda id$ invertierbar auf V wäre und damit λ kein Eigenwert von φ wäre.

$\dim V_1 < \dim V = n$

$\dim V_1 = 0 \rightarrow V_2 = V$

Falls $\dim V_1 > 0 \Rightarrow$ nach I.V. $\exists B_2$ von V_1, sodass

$(\varphi|_{V_1})_{B_2} = \begin{pmatrix} J_{k+1} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & J_s \end{pmatrix}$, wobei $J_{k+1}, \dots, J_s$ elementare Jordanblocks zu passenden Eigenwerten sind. Setze $B = B_1 \cup B_2$, Basis von V.

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \emptyset \\ & \ddots & & & \\ & & J_k & & \\ & & & J_{k+1} & \\ \emptyset & & & & \ddots \; J_s \end{pmatrix} \qquad \square$$

BSP $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -11 \\ 1 & 6 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p(x) = \det(A - x\,id) = \det \begin{pmatrix} 7-x & 1 & -11 \\ 1 & 6-x & -7 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$

$= -x^3 + 14x^2 - 55x + 42 - 7 - 11x + 66 + x - 1 =$

$= -x^3 + 14x^2 - 65x + 100 = -(x^3 - 14x^2 + 65x - 100)$

	1	-14	65	-100
4	1	-10	25	

$5 \pm \sqrt{25-25} = 5, 5$

zu 4: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu 5: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $(\dim = 1)$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jordan'sche Normalform $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Wie bestimmen wir v_3? Es muss $Av_3 = 5v_3 + v_2$

$\Longleftrightarrow \quad (A - 5\,id)\, v_3 = v_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -11 & 4 \\ 1 & 1 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Satz von CAYLEY-HAMILTON

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$, A eine $n \times n$-Matrix über K und $p(x)$ das char. Polynom von A. Dann gilt $p(A) = 0$

Beweis für K algebraisch abgeschlossen:

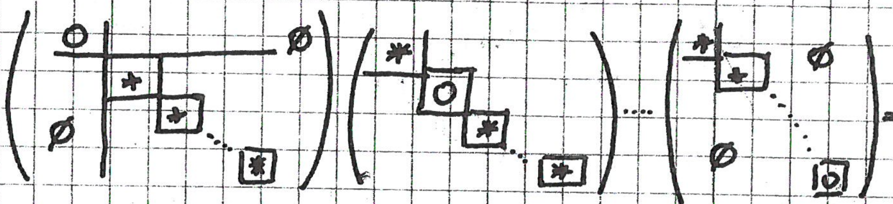
$A = S^{-1} J S$, wobei J Jordan'sche Normalform

$p(x)$ ist auch char. Polynom von J

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{A^k}_{= S^{-1} J^k S} = S^{-1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k J^k \right)}_{p(J)} S$$

$$p(x) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda_j - x)^{r_j}$$ (λ_j Eigenwerte mit Vielfachheit r_j)

$$p(J) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda_j\, id - J)^{r_j} =$$



$= 0$

$\Rightarrow p(A) = 0$

$\square$

Korollar: Für eine komplexe $n \times n$-Matrix A ist $p(A) = 0$

Korollar: Für eine reelle $n \times n$-Matrix ist $p(A) = 0$

Beweis: $p(x)$ ist reell. Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ können wir A als komplexe Matrix auffassen. Deshalb ist $p(A) = 0$

$\square$

FALSCHER Beweis: $p(x) = \det(A - x\,id)$

$$p(A) = \det\underbrace{(A - A\,id)}_{=0} = 0$$

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1$$

$$p(B) = B^2 - 2B + id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\underbrace{(A - B\,id)}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = 0$$

BSP Mögliche Jordan'sche Normalform für 4×4-Matrizen mit Eigenwerten $1, 5$ (3 mal)

d = geometrische Vielfachheit von 5 $\quad d \in \{1, 2, 3\}$ $\quad$ geom. Vielfachheit = Anzahl d. Jordan-Blöcke

$\underline{d = 3}$
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{d = 2}$
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 5 & 1 & \\ & 0 & 5 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{d = 1}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 5 & 1 & 0 \\ & 0 & 5 & 1 \\ & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

BSP Welche Jordanische Normalform kann eine 6×6-Matrix haben, die 3 als 5-fachen (alg.) EW und -2 als einfachen EW hat 03.12.2012 (17. Vo)

geom. Vielfachheit von -2: 1 d … geom. Vielfachheit von 3

$1 \le d \le 5$

$d=5$ 5 Blocks 1×1 für 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & \emptyset & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$d=4$ 1 Block 2×2 und 3 Blocks 1×1

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & \emptyset & & 3 & 0 \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$d=3$ 1 Block 3×3 und 2 Blöcke 1×1, oder 2 Blocks 2×2 1 Block 1×1

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & \emptyset & & & 3 & 0 \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & \emptyset & & & 3 & 0 \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$d=2$ 1 Block 4×4 und 1 Block 1×1, oder 1 Block 3×3 und 1 Block 2×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \emptyset & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & \emptyset & & & & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 1 & 0 \\ & \emptyset & & 0 & 3 & 0 \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$d=1$ 1 Block 5×5

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & \emptyset & & 3 & 1 & 0 \\ & & & & 3 & 1 \\ & & \emptyset & & & -2 \end{pmatrix}$$

7) Reelle Jordan'sche Normalform

Jetzt sei A eine reelle $n \times n$ - Matrix

EV treten im komplexen paarweise auf $\Rightarrow$ gleiche geom. Vielfachheit

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ Eigenwert, bzw. Eigenvektor von A

Beweis: zu Satz

$Av = \lambda v$ Dann gilt: $A\bar{v} = \underbrace{\bar{A}}_{=A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

mit komplexem EW ist auch konjugierter EW

Falls $a+bi$ Eigenwert von A mit $b \neq 0$, dann

können wir $b > 0$ annehmen und es ist auch $a-bi$ Eigenwert

(Eigenvektoren sind ebenfalls konjugiert)

Seien jetzt $v, w \neq 0$ mit $Av = \lambda v + w$

Es ist dann: $\underbrace{A}_{=\bar{A}}\bar{v} = \bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v + w} = \bar{\lambda}\bar{v} + \bar{w}$

Somit haben λ und $\bar{\lambda}$ die selben Jordanblocks, insbesondere

haben λ und $\bar{\lambda}$ dieselbe geom. Vielfachheit

Betrachten Spalten: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a+bi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a-bi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Sei $v_1 + iv_2$ Eigenvektor $(\neq 0)$ zu $a-bi$

$\Rightarrow v_1 - iv_2$ ist Eigenvektor zu $a+bi$

$A\Big|_{\{v_1, v_2\}}$:

$$Av_1 = A\Big(\overbrace{\tfrac{1}{2}\big((v_1+iv_2)+(v_1-iv_2)\big)}^{=v_1 \text{ (nur anders hingeschrieben)}}\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\underbrace{A(v_1+iv_2)}_{(a-bi)(v_1+iv_2)} + \underbrace{A(v_1-iv_2)}_{(a+bi)(v_1-iv_2)}\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\big(av_1 + bv_2 + \cancel{iav_2} - \cancel{ibv_1} + av_1 + bv_2 - \cancel{iav_2} + \cancel{ibv_1}\big) =$$

$$= av_1 + bv_2 \quad \left(\text{entspricht Spalte } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

$Av_2: \; A\left(\frac{1}{2i}\left((v_1+iv_2)-(v_1-iv_2)\right)\right)=$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\underbrace{A(v_1+iv_2)}_{=(a-bi)(v_1+iv_2)} - \underbrace{A(v_1-iv_2)}_{=(a+bi)(v_1-iv_2)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(av_1+bv_2+iav_2-biv_2\right)-\left(av_1+bv_2-iav_2-ibv_1\right)\big) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(2iav_2-2ibv_1\right) = -bv_1+av_2 \qquad \left(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\right)$$

$$A\Big|_{\{v_1,v_2\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Jetzt $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ a+bi\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ a-bi\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $v_1+iv_2,\ w_1+iw_2$, dass $A(v_1+iv_2)=(a-bi)(v_1+iv_2)+(w_1+iw_2)$,

$$\Rightarrow A(v_1-iv_2)=(a+bi)(v_1-iv_2)+(w_1-iw_2)$$

$$\underbrace{A}_{=A|_{[\{v_1,v_2\}]}}\Big|_{\{w_1,w_2,v_1,v_2\}}$$

$Av_1 = A\left(\frac{1}{2}\left((v_1+iv_2)+(v_1-iv_2)\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{A(v_1+iv_2)}_{\substack{=(a-bi)(v_1+iv_2)+\\ +(w_1+iw_2)}} + \underbrace{A(v_1-iv_2)}_{=(a+bi)(v_1-iv_2)+(w_1-iw_2)}\Big) = av_1+bv_2+\frac{1}{2}\left(w_1+\cancel{iw_2}+w_1-\cancel{iw_2}\right)$$

$$= w_1+av_1+bv_2 \qquad \left(\text{entspricht Spalte } \begin{pmatrix}1\\0\\a\\b\end{pmatrix}\right) \quad 0\cdot w_2$$

$Av_2 = A\left(\frac{1}{2i}\left((v_1+iv_2)-(v_1-iv_2)\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\underbrace{A(v_1+iv_2)}_{=(a-bi)(v_1+iv_2)+(w_1+iw_2)} - \underbrace{A(v_1-iv_2)}_{=(a+bi)(v_1-iv_2)+(w_1-iw_2)}\Big) = -bv_1+av_2+\frac{1}{2i}\left((w_1+iw_2)-(w_1-iw_2)\right)$$

$$= w_2-bv_1+av_2 \qquad \left(\text{entspricht Spalte } \begin{pmatrix}0\\1\\-b\\a\end{pmatrix}\right)$$

insgesamt: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ - id

Satz: Sei A eine reelle $n\times n$-Matrix. Dann gibt es $s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0$,

$r_1, \dots, r_{s_1} \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_{s_2} \in \mathbb{N}$ mit

$$n = \sum_{j=1}^{n} r_j + 2\sum_{j=1}^{s_2} t_j \quad \text{und}$$

Jordanblöcke J_j der Länge r_j für reellen Eigenwert λ_j,

$$\text{Jordanblöcke } K_j = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & & & \\ b & a & 0 & 1 & & & & \emptyset & \\ & & a & -b & 1 & 0 & & & \\ & & b & a & 0 & 1 & & & \\ & & & & a & -b & & & \\ & & & & b & a & \ddots & & \\ & & & & \text{sind eigentl. reell} & & & 1 & 0 \\ & \emptyset & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & a & -b \\ & & & & & & & b & a \end{pmatrix} \text{ der Länge } 2t_j$$

für komplexen Eigenwert $a+bi$ mit $b>0$, und $\exists$ invertierbare, reelle Matrix S, sodass

$$\underbrace{S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \emptyset & \\ & & J_{s_1} & & & \\ & & & K_1 & & \\ & \emptyset & & & \ddots & \\ & & & & & K_{s_2} \end{pmatrix}}_{\text{reelle Jordan'sche Normalform}}$$

(reelle Blöcke: $J_1, \dots, J_{s_1}$; kompl. Blöcke: $K_1, \dots, K_{s_2}$)

BSP

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -10 \\ 38 & -15 & -62 \\ -6 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Ziel: komplexe und reelle J.-NF + Basen

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} 7-x & 0 & -10 \\ 38 & -15-x & -62 \\ -6 & 4 & 11-x \end{pmatrix} = -x^3 + 3x^2 + 193x - 1155 - 1520 + 60x + 900 - 248x + 1736 =$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 5x - 39 =$$

$$= -(x^3 - 3x^2 - 5x + 39)$$

	1	-3	-5	39
1				
-1				
3				
-3	1	-6	13	0

$$x = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$$

A ist komplex diagonalisierbar, aber nicht reell diagonalisierbar

$$\text{komplexe JNF: } \begin{pmatrix} 3+2i & & \emptyset \\ & 3-2i & \\ \emptyset & & -3 \end{pmatrix}$$

zu -3 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $3-2i$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4+2i & 0 & -10 & 0 \\ 38 & -18+2i & -62 & 0 \\ -6 & 4 & 8+2i & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2+i & 0 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & 4+i & 0 \end{array}\right)$$

fällt sicher weg weil ich sie aus L.K von 1 und 3. Zeile darstellen kann

$x_3 = 1 \Rightarrow (2+i)x_1 = 5$ $\quad \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$

$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{2+i} = 2-i$

$\Rightarrow 2x_2 = -4-i + 3(2-i) = 2-4i$

$\Rightarrow x_2 = 1-2i$

$$\begin{pmatrix} 2-i \\ 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $3-2i$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $3+2i$

reelle JNF $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

dazugehörige Basis: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

BSP reelle 5×5-Matrix, $8+5i$ mit alg. Vielfachheit 2 und -6 als Eigenwerte. Mögl. kompl / reelle JNF

alg. Vielfachheit von -6 = geom Vielfachheit von -6 = 1

d... geom. Vielfachheit von $8+5i$ $(8-5i)$

$1 \le d \le 2$

$d=2$: $\begin{pmatrix} 8+5i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 8+5i & 0 & 0 & 0 \\ & & 8-5i & 0 & 0 \\ & \emptyset & & 8-5i & 0 \\ & & & & -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8 & -5 & 0 \\ & \emptyset & 5 & 8 & 0 \\ & & & & -6 \end{pmatrix}$

komplexe JNF $\qquad$ reelle JNF

$d=1$ komplex 1 Block 2×2

$$\begin{pmatrix} 8+5i & 1 & & & \\ 0 & 8+5i & & \emptyset & \\ & & 8-5i & 1 & \\ & & 0 & 8-5i & \\ & \emptyset & & & -6 \end{pmatrix}$$ komplexe JNF

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ & & 8 & -5 & 0 \\ & & 5 & 8 & 0 \\ & \emptyset & & & -6 \end{pmatrix}$$ reelle JNF

04.12.2012
(18.VO)

Bewegung: $T(x) = \underbrace{A}_{\text{orthogonale Matrix}} x + x_0$

A komplex diagonalisierbar, reelle Jordanische Normalform von A

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & & & & & \\ b_1 & a_1 & & & & & & \emptyset & \\ & & a_2 & -b_2 & & & & & \\ & & b_2 & a_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_k & -b_k & & \\ & \emptyset & & & & b_k & a_k & & \\ & & & & & & & \lambda_{k+1} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$ $\forall$ Eigenwerte ist Betrag 1

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & & & & & \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & & & \emptyset & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k & & & & \\ & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & \emptyset & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Drehung

nix

Spiegelung

(es gibt sogar ONB)

$T(x) = x_2 + A(x - x_2) + x_1$ $\qquad x_1 \in$ Eigenraum zu 1

2 dimensional: 1 zweifacher EW $\Rightarrow A = id$

Parallelverschiebung (det $A = 1$ orientierungserhaltend)

1 einfacher EW: JNF $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (det $A = -1$, orientierungsumkehrend)

Gleitspiegelung

1 kein EW: JNF $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (det $A = 1$)

(Punktspiegelung) Drehung

3 dimensional

1 dreifacher EW $A = id$

Parallelverschiebung (Translation) (det $A = 1$)

1 zweifacher EW JNF $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (det $A = -1$)

Gleitspiegelung (Spiegelung an einer Ebene und Verschiebung parallel zur Ebene)

1 einfacher EW: JNF: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (det $A = 1$)

Schraubung (Drehung an einer Achse und Verschiebung parallel zur Achse)

1 kein EW JNF: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (det $A = -1$)

Drehspiegelung (Drehung um Achse und Spiegelung an einer darauf senkrechten Ebene)

Prinzipiell nur $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

z.B.: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (Einheitskreis)

1) Hyperfläche zweiter Ordnung

Def.: Falls p ein Polynom vom Grad ≤ 2 mit n Variablen ist, dann nennt man $\{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 0\}$ eine Hyperfläche 2. Ordnung.

$$p(x) = b_{11} x_1^2 + \ldots + b_{n,n} x_n^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \ldots + b_{1,n} x_1 x_n +$$
$$+ b_{2,3} x_2 x_3 + \ldots + b_{2,n} x_2 x_n + \ldots + b_{n-1,n} x_{n-1} x_n +$$
$$+ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + b_0$$

$$A := (a_{jk})_{j,k=1}^{n}, \quad a_{jk} := \begin{cases} b_{j,j} & \text{falls } k = j \\ \frac{b_{j,k}}{2} & \text{falls } k \neq j \end{cases}$$

salopp (j - k vertauscht)

A ist symmetrisch

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_j := b_j \quad a_0 := b_0$$

$$p(x) = x^t A x + a^t x + a_0$$

$$x^t A x + a^t x + a_0 = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n \end{pmatrix} +$$

$$+ a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_0 = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1n} x_1 x_n +$$
$$+ a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{2n} x_2 x_n +$$
$$\vdots$$
$$+ a_{n1} x_1 x_n + \ldots \ldots + a_{n-1,n} x_{n-1} x_n =$$

$$= \underbrace{a_{11}}_{=b_{11}} x_1^2 + \ldots + \underbrace{a_{nn}}_{b_{n,n}} x_n^2 + \underbrace{2a_{12}}_{=b_{12}} x_1 x_2 + \ldots + \underbrace{2a_{n-1,n}}_{b_{n-1,n}} x_{n-1} x_n +$$

$$+ \underbrace{a_1}_{=b_1} x_1 + \ldots + \underbrace{a_n}_{=b_n} x_n + \underbrace{a_0}_{=b_0}$$

Hyperfläche: $x^t A x + a^t x + a_0 = 0$

$(x^t A x + 2a^t x + a_0 = 0)$

Falls $A=0$, $a=0$ und $a_0 := 0$, dann $\{x : x^t A x + a^t x + a_0 = 0\} = \mathbb{R}^n$

$\emptyset$, z.B. $A=0$, $a=0$ und $a_0 = 1$ oder $x_1^2 + 1 = 0$

BSP $4x_1^2 + 103x_2^2 + 33x_3^2 - 40x_1x_2 + 16x_1x_3 - 68x_2x_3 + 64x_1 - 350x_2 + 108x + 171 = 0$

Gesucht: A, a, a_0?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -20 & 8 \\ -20 & 103 & -34 \\ 8 & -34 & 33 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 64 \\ -350 \\ 108 \end{pmatrix} \qquad a_0 = 171$$

$$x^t \begin{pmatrix} 4 & -20 & 8 \\ -20 & 103 & -34 \\ 8 & -34 & 33 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 64 \\ -350 \\ 108 \end{pmatrix}^t x + 171 = 0$$

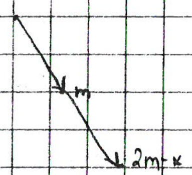
Def.: Sei $x^t A x + a^t x + a_0 = 0$ eine Hyperfläche 2. Ordnung in $\mathbb{R}^n$.

Man nennt $m \in \mathbb{R}^n$ Mittelpunkt dieser Hyperfläche, falls:

$$Am + \tfrac{1}{2}a = 0$$

Spiegelung an Mittelpunkt gibt wieder dieselbe Hyperfläche.

x an m gespiegelt ist: $2m - x$



$$(2m-x)^t A (2m-x) + a^t(2m-x) + a_0 =$$

$$= 4m^t A m - 2\underbrace{m^t A x}_{= x^t A m} - 2x^t A m + \underbrace{x^t A x}_{= -a^t x - a_0} + 2a^t m - a^t x + a_0$$

$$= 4m^t A m - 4x^t A m + 2a^t m - 2a^t x =$$

$$= 4\Big(m^t A m + \tfrac{1}{2}\underbrace{a^t m}_{= m^t a}\Big) - 4\Big(x^t A m + \tfrac{1}{2}\underbrace{a^t x}_{= x^t a}\Big) =$$

$$= 4m^t \underbrace{\Big(Am + \tfrac{1}{2}a\Big)}_{=0} - 4x^t \underbrace{\Big(Am + \tfrac{1}{2}a\Big)}_{=0} = 0$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diffbar; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x)=0$

und $dF_{(x_0)} \neq 0$. Dann ist die Tangentialhyperebene an $\{x: F(x)=0\}$

im Punkt x_0 gegeben durch $\quad dF_{(x_0)}(x-x_0)=0$

Dabei heißt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diffbar im $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine lineare

Funkt. $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gibt mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)-df(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0$$

$$F(x) = x^t A x + a^t x + a_0$$

Behauptung: $dF(x) = 2x_0^t A + a^t$

BW der Beh.: $\quad |F(x)-F(x_0)-(2x_0^t A + a^t)(x-x_0)|$

$$= |x^t A x + \cancel{a^t x} + \cancel{a_0} - (x_0^t A x_0 + \cancel{a^t x_0} + \cancel{a_0}) - 2x_0^t A x - \cancel{a^t x} + 2x_0^t A x_0 + \cancel{a^t x_0}|$$

$$= |x^t A x + x_0^t A x_0 - 2x_0^t A x| =$$

$$= |\underbrace{\underbrace{x^t A x - x_0^t A x}_{(x-x_0)^t A x}}_{x^t A (x-x_0)} + \underbrace{x_0^t A x_0 - x_0^t A x}_{= x_0^t A(x_0-x) = -x_0^t A(x-x_0)}| =$$

$$= |(x-x_0)^t A (x-x_0)| \leq |x-x_0| \, \|A\| \, |x-x_0| =$$

$$= \|A\| \, |x-x_0|^2$$

$$\frac{|F(x)-F(x_0)-dF(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} \leq \|A\| \, |x-x_0| \to 0 \qquad \square$$

Also: falls p auf Hyperfläche 2. Ordnung ist, dann ist

$p^t A x + \frac{1}{2} a^t x + \frac{1}{2} a^t p + a_0$ die Tangentialhyperebene

Folgerung aus Satz über implizite Fkt

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1, $F(x_0)=0$ und $dF_{(x_0)} \neq 0$

$\Rightarrow$ Tangentialhyperebene an $\{x: F(x)=0\}$ im Punkt x_0 ist

$dF(x_0)(x_0 - x_0) = 0$

$F(x) = x^t A x + a^t x + a_0 \Rightarrow dF_{(x_0)} = 2x_0^t A + a^t = 2(x_0^t A + \frac{1}{2}a^t)$

<u>Proposition</u>: Falls $M=\{x: x^tAx + a^tx + a_0 = 0\}$, $p \in M$, $Ap + \frac{1}{2}a \neq 0$ (also p kein Mittelpunkt), dann ist die Tangentialhyperebene an M im Punkt p gegeben durch

$p^tAx + \frac{1}{2}a^t x + \frac{1}{2}a^t p + a_0 = 0$ ist in diesem Fall die Tangente

<u>Beweis</u>: $0 = \underbrace{dF_{(p)}}_{=2(p^tA+\frac{1}{2}a^t)}(x-p) = 2(p^tA x + \frac{1}{2}a^t x \underbrace{- p^tAp}_{=-a^tp-a_0} - \frac{1}{2}a^t p) =$

$= 2(p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \underline{a^tp} + a_0 - \underline{\frac{1}{2}a^tp}) =$

$= 2(p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0) \Longleftrightarrow$

$p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0 = 0$ □

<u>Def.</u>: Sei $x^tAx + a^tx + a_0 = 0$ eine Hyperfläche 2. Ordnung (M) und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Dann nennt man

$\{x: p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0 = 0\}$ die Polare zu p (an M)

Obere Prop.: $p \in M$, kein Mittelpunkt $\Rightarrow$ Polare zu p ist die Tangente

<u>Hauptsatz der Polarentheorie:</u>

<u>Proposition</u>: Sei $M = \{x: x^tAx + a^tx + a_0 = 0\}$ eine Hyperfläche 2. Ordnung $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ Dann liegt p_1 genau dann auf der Polaren zu p_2, wenn p_2 auf der Polaren zu p_1 liegt.

<u>Beweis</u>: Polare zu p_1: $p_1^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp_1 + a_0 = 0$

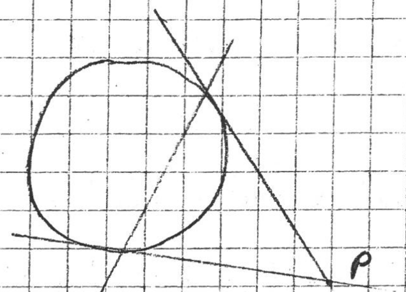
Polare zu p_2: $p_2^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp_2 + a_0 = 0$

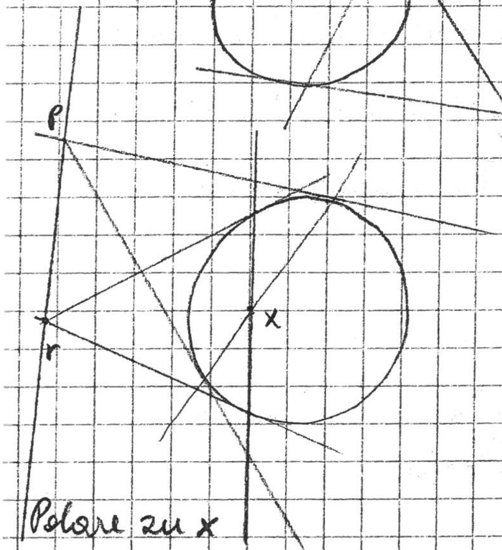
p_2 liegt auf der Polaren zu p_1 $\Leftrightarrow$ $0 = \underbrace{p_1^tAp_2}_{=p_2^t\underbrace{A^t}_{=A}p_1} + \frac{1}{2}a^tp_2 + \frac{1}{2}a^tp_1 + a_0$

$$= p_2^t A p_1 + \frac{1}{2} a^t p_1 + \frac{1}{2} a^t p_2 + a_0$$

$\Leftrightarrow p_1$ liegt auf der Polaren zu p_2 $\square$

Polare zu Punkt p durch Kurve
p liegt auf Tangente in Schnittpunkten





p liegt auf Polaren zu x
r liegt auf Polaren zu x

AFFINE KLASSIFIKATION:

Man darf affine Isomorphismen anwenden
(bijektive affine Abb., also etwas der Form $Sx+b$, wobei S invertierbar)

$x^t A x + a^t x + a_0 = 0$ Man schreibt $x = Sy + b$

$$0 = (Sy+b)^t A (Sy+b) + a^t (Sy+b) + a_0 =$$

$$= y^t \underbrace{S^t A S}\, y + (2b^t AS + a^t S) y + (b^t A b + a^t b + a_0)$$

Da A symm. $\exists$ ONB aus Eigenvektoren $\Rightarrow \exists S$ orthogonal mit

$S^{-1} A S = S^t A S = D$ (Diagonalmatrix)

$$\begin{pmatrix} 5 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \ddots \end{pmatrix}$$

Trägheitssatz von Sylvester

Satz: Sei A eine symm. $n\times n$-Matrix und seien S_1 und S_2 invertierbare Matrizen, sodass $S_1^t A S_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (△)

$S_2^t A S_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \mu_n \end{pmatrix}$. Dann ist

bei beiden gleich viele >0, <0 und 0

$$\text{card}\{j : \lambda_j > 0\} = \text{card}\{j : \mu_j > 0\} \text{ und}$$

$$\text{card}\{j : \lambda_j < 0\} = \text{card}\{j\ \mu_j < 0\}$$

$$(\Rightarrow \text{card}\{j : \lambda_j = 0\} = \text{card}\{j : \mu_j = 0\})$$

Beweis: $S_1 = (v_1 \dots v_n)$

OBdA: $\{j : \lambda_j > 0\} = \{1, 2, \dots p\}$,

$\{j : \lambda_j \neq 0\} = \{1, 2, \dots \overset{\text{rang}}{r}\}$

Setze $V_p := [\{v_1, \dots, v_p\}]$ positiver Raum $V_n := [\{v_{p+1}, \dots, v_r\}]$ negativer Raum

$V_0 := [\{v_{r+1}, \dots, v_n\}]$ Raum mit Nullen

Sei $x \in V_p$: $x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j \Longrightarrow$

$$x^t A x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j^t A x = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_j \alpha_k \overbrace{v_j^t A v_k}^{= (S_1^t A S_1)_{j,k} \ (△)} \overset{j=k \text{ sonst } 0}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 \underbrace{\lambda_j}_{>0} > 0 \quad \text{, sofern } x \neq 0 \qquad \text{0 auch aus } V_p$$

analog für $x \in V_n$, $x \neq 0$ ist $x^t A x < 0$

Weiters analog für $x \in V_0$ ist $x^t A x = 0$ (x muss nicht $\neq 0$ sein) und $Ax = 0$ (*)

Sei $x \in V_p \oplus V_0 \Rightarrow x = \underset{\in V_p}{x_1} + \underset{\in V_0}{x_2}$

$$\Rightarrow x^t A x = \underbrace{x_1^t A x_1}_{\geq 0} + 2 x_1^t \underbrace{A x_2}_{=0} + x_2^t \underbrace{A \cdot x_2}_{=0} \geq 0$$

Beweis (*) $x = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow Ax = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j A v_j$

Ang. $\exists j > r$ mit $Av_j \neq 0 \Rightarrow \underbrace{v_j^t A v_j}_{\neq 0} = \lambda_j = 0$, also

$Av_j = 0 \Rightarrow Ax = 0$. □

BRUNNEN

analog $x \in V_n \oplus V_0 \Rightarrow x^t A x < 0$

ähnlich für $S_2 = (w_1, \dots, w_n)$, $\tilde{p}, \tilde{r}$

$W_p := [\{w_1, \dots w_{\tilde{p}}\}]$, $W_n := [\{w_{\tilde{p}+1}, \dots w_{\tilde{r}}\}]$, $W_0 := [\{w_{\tilde{r}+1}, \dots w_n\}]$

Ang. $\tilde{p} \neq p$ OBdA $\tilde{p} > p$

$$\underbrace{\dim W_p}_{=\tilde{p}} + \underbrace{\dim (V_n \oplus V_0)}_{=n-p} = n - p + \tilde{p} = n + \underbrace{(\tilde{p} - p)}_{>0} > n$$

$\Rightarrow W_p \cap (V_n \oplus V_0) \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \neq 0$ mit $x \in W_p \cap (V_1 \oplus V_0)$

$\underset{x \in W_p}{\Rightarrow} x^t A x > 0$, $x \in V_n \oplus V_0 \Rightarrow x^t A x \leq 0$ $\lightning$

Somit ist $\tilde{p} = p$.

Ang $\tilde{r} \neq r$ OBdA $\tilde{r} > r$

$$\underbrace{\dim W_n}_{=\tilde{r}-\tilde{p}=\tilde{r}-p} + \underbrace{\dim (V_p \oplus V_0)}_{=p+n-r} = n + \underbrace{(\tilde{r} - r)}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow W_n \cap (V_p \oplus V_0) \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \neq 0, x \in W_n \cap (V_p \oplus V_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{x \in W_n}{0 >} x^t A x \underset{x \in V_p \oplus V_0}{\geq} 0$ – $\lightning$ Widsp.

Somit ist auch $\tilde{r} = r$. $\square$

Es ist $r = \operatorname{rg} A$ Man nennt p Positivitätsindex von A

Ang $S^t A S = \begin{pmatrix} 5 & & \emptyset \\ & 1 \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \emptyset \\ & 1 \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \emptyset \\ & 1 \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(S \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & & \emptyset \\ & 1 \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \right)^t A \left(S \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & & \emptyset \\ & 1 \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \emptyset & & & \ddots 1 \end{pmatrix}$$

In der Praxis: quadratisch ergänzen

$x_1 x_2$ TRICK: Setze $x_2 = x_1 + y_2$

$x_1 x_2 = x_1 \cdot (x_1 + y_2) = x_1^2 + x_1 \cdot y_2$ und jetzt quad ergänzen

Man darf $x^t A x + a^t x + a_0 = 0$ mit (-1) multiplizieren

(negativ $\longleftrightarrow$ positiv)

Deshalb in Standardform $\quad p \geq r-p$

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{p} & & \emptyset \\ & \overbrace{-1 \cdots -1}^{r-p} & \\ \emptyset & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

lineare Ausdrücke: $\quad y_j^2 + \alpha y_j = \left(y_j + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$

Rest: $\quad \alpha_{r+1} x_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n \overset{\alpha}{=} -y_{r+1}$, falls mindestens ein $\alpha_j \neq 0$

Die Konstante α: $\quad \alpha \in \{0, 1, -1\}$

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{2p}^2 + 1 = 0$$

gleich viele + und negativ kann Fall $\alpha = 1$ ausgeschlossen wer

Bei gleich vielen positiven und negativen kann man $\alpha = 1$ ausschließen

11.12.2012 (20. VO)

Standardformen der affinen Klassifikationen Hyperflächen 2. Ordnung im $\mathbb{R}^n$

$0 \le r \le n$, $\quad 0 \le p \le r$ und $r \le 2p \quad (r-p \le p)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0 \end{array}\right\} \text{immer möglich}$$

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0$ wobei $r < 2p \quad (r-p < p)$

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 - x_{r+1} = 0$ wobei $r < n$

Beginnen mit absteigendem r und absteigendem p

<u>Hauptachsentransformation:</u>

Versuchen Hyperfläche 2. Ordnung durch Bewegung auf „Standardform" abzubilden.

Man sucht ONB von A aus Eigenvektoren und setzt

$x = Sy \qquad (S = (v_1 \dots v_n))$

$(y = S^t x)$

lineare Terme: „Vorsichtige Quadratische Ergänzen" weil wir Längen nicht verändern wollen

z.B.: $4x_1^2 - 16x_1 = 4(x_1 - 2)^2 + \dots$

Zurück zur affinen Klassifikation:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0 \quad \ldots \text{ n-dimensionales Ellipsoid}$$

(beschränkt)

affine Trend: beschränkte Mengen werden auf beschränkte Mengen abgebildet

kann nicht durch affinen Isomorphismus auf Hyperflächen anderer Typen abgebildet werden

---

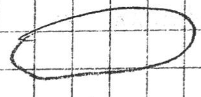
2) KURVEN 2. ORDNUNG

Im $\mathbb{R}^2$ affine Klassifikation

Welche Arten gibt es?

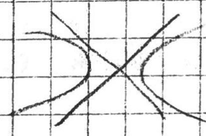
$r=2$

$p=2$ •) $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ Ellipse



•) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ Punkt

•) $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ $\emptyset$



$p=1$ •) $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ Hyperbel

•) $x_1^2 - x_2^2 = 0$

$0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \Rightarrow$

$x_1 + x_2 = 0$ oder $x_1 - x_2 = 0$
zwei schneidende Geraden

$r=1$

$p=1$ •) $x_1^2 - 1 = 0$

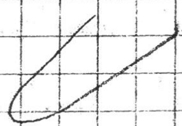
$0 = x_1^2 - 1 = (x_1 + 1)(x_1 - 1) \Leftrightarrow$

$x_1 + 1 = 0$ oder $x_1 - 1 = 0$ zwei parallele Geraden

•) $x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ Gerade (Doppelgerade)

•) $x_1^2 + 1 = 0$ $\emptyset$

Parabel nicht auf Hyperbel abbilden



•) $x_1^2 - x_2 = 0$ Parabel

Warum kann Parabel nicht affin auf Hyperbel abgebildet werden?

Hyperbel hat 2 Teile, Parabel nur einen

Hyperbel hat Mittelpunkt - Parabel nicht

$r=0$ •) $-x_1 = 0$ Gerade

•) $-1 = 0$ $\emptyset$

•) $0 = 0$ $\mathbb{R}^2$ (Ebene)

BSP $15x_1^2 - 8x_2^2 - 14x_1x_2 - 104x_1 + 26x_2 + 169 = 0$

Welche Art Kurve 2. Ordnung ist das?

$$0 = \underbrace{15\left(x_1^2 - \frac{7}{15}x_2 - \frac{52}{15}\right)^2}_{= 15x_1^2 + \frac{49}{15}x_2^2 - 14x_1x_2 - 104x_1 + \frac{728}{15}x_2 + \frac{2704}{15}} - \frac{169}{15}x_2^2 - \frac{338}{15}x_2 - \frac{169}{15}$$

$$= 15\left(x_1 - \frac{7}{15}x_2 - \frac{52}{15}\right)^2 - \frac{169}{15}\underbrace{\left(x_2^2 + 2x_2 + 1\right)}_{=(x_2+1)^2}$$

(2 schneidende Geraden)
pos² & neg²

$$= \frac{1}{15}\left(\left(15x_1 - 7x_2 - 52\right)^2 - \left(13x_2 + 13\right)^2\right) =$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{1}{15}\left(\underbrace{\left(15x_1 + 6x_2 - 39\right)}_{=3(5x_1+2x_2-13)}\underbrace{\left(15x_1 - 20x_2 - 65\right)}_{=5(3x_1-4x_2-13)}\right) =$$

$$= (5x_1 + 2x_2 - 13)\cdot(3x_1 - 4x_2 - 13)$$

Also die beiden schneidenden Geraden: $5x_1 + 2x_2 - 13 = 0$ und $3x_1 - 4x_2 - 13 = 0$

BSP Welche Art Kurve 2. Ordnung ist

$$x_1x_2 - 1 = 0$$

Trick $x_2 = x_1 + y_2$:

$$0 = x_1\underbrace{x_2}_{=x_1+y_2} - 1 = x_1^2 + x_1y_2 - 1 = \underbrace{\left(x_1 + \frac{1}{2}y_2\right)^2}_{=x_1^2 + x_1y_2 + \frac{1}{4}y_2^2} - \frac{1}{4}y_2^2 - 1$$

Prüfung

$\Rightarrow$ Hyperbel

BSP $40x_1^2 + 24x_2^2 - 30x_1x_2 - 340x_1 + 54x_2 + 61 = 0$

Tangenten, die durch $\binom{12}{2}$ gehen, Berührungspunkte, Fläche des Dreiecks

Polare:

$$A = \begin{pmatrix} 40 & -15 \\ -15 & 24 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} -340 \\ 54 \end{pmatrix} \quad a_0 = 61$$

Polare zu $\binom{12}{2}$: $0 = p^t A x + \frac{1}{2}a^t x + \frac{1}{2}a^t p + a_0 =$

$$= (450 \;\; -132)x + (-170 \;\; 27)x + -1986 + 61 =$$

$$= 280x_1 - 105x_2 - 1925$$

$$= 56x_1 - 21x_2 - 385 = 0$$

$$= 8x_1 - 3x_2 - 55 = 0 \qquad x_2 = \frac{8x_1 - 55}{3}$$

BRUNNEN

$$0 = 40x_1^2 + 24\,\frac{64x_1^2 - 880x_1 + 3025}{9} - 30\,\frac{8x_1^2 - 55x_1}{3} - 340x_1 + 54\,\frac{8x_1 - 55}{3} + 61 =$$

$$= 40x_1^2 + \frac{512x_1^2 - 7040x_1 + 24\,200}{3} - 80x_1^2 + 550x_1 - 340x_1 + 144x_1 - 990 + 61 =$$

$$= \frac{392}{3}x_1^2 + 144x_1 - 990 + 61 = \frac{392}{3}x_1^2 - \frac{5978}{3}x_1 + \frac{21\,413}{3}$$

$$= x_1^2 - \frac{61}{4}x_1 + \frac{437}{8}$$

$$x_1 = \frac{61}{8} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{3721}{64} - \frac{437}{8}}_{\frac{225}{64}}} = \frac{61}{8} \pm \frac{15}{8}$$

$$x_1 = \frac{19}{2}, \quad \frac{23}{4}$$

•) $x_1 = \frac{19}{2} \Rightarrow x_2 = 7$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ 1. Berührpunkt, Verbindungsvektor zu p: $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 5 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{5}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} : \; 2x_1 + x_2 - 26 = 0 \qquad \text{(1. Tangente)}$$

•) $x_1 = \frac{23}{4} \Rightarrow x_2 = -3$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{23}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$ 2. Berührpunkt, Verbindungsvektor zu p:

$$\begin{pmatrix} -\frac{25}{4} \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{5}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} : \; 4x_1 - 5x_2 - 38 = 0 \qquad \text{(2. Tangente)}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 - \langle a,b \rangle^2} \qquad |a|^2 = \frac{125}{4} \qquad |b|^2 = \frac{625}{16} + 25 = \frac{1025}{16}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{128\,125}{64} - \frac{25 \cdot 225}{64}} = \frac{175}{8} \qquad \langle a,b \rangle = \frac{125}{8} - 25 = -\frac{75}{8}$$

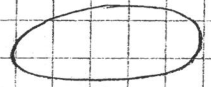
17.12.12
(21. VO)

1. Hauptlage:

Ellipse: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - 1 = 0 \quad , \; a \geq b > 0$

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$, Brennpunkte: $f_1 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ $\; f_2 = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix}$

$e = \frac{1}{2}|f_1 - f_2| < a$



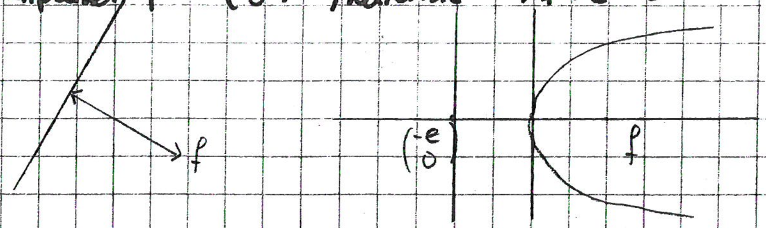
Hyperbel: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - 1 = 0 \qquad a, b > 0$

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$, Brennpunkte: $f_1 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix}$

$e = \frac{1}{2}|f_1 - f_2| > a$

Parabel: $x_2^2 = 4ex_1$, $e > 0$

Brennpunkt $f = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$, Leitlinie: $x_1 + e = 0$



Prüfung

BSP $\quad 40x_1^2 + 24x_2^2 - 30x_1x_2 - 340x_1 + 54x_2 + 61 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 40 & -15 \\ -15 & 24 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} -340 \\ 54 \end{pmatrix} \qquad a_0 = 61$$

Bestimme 1. Hauptlage, Brennpunkte (ursprünglich), Bewegung die Kurve in 1. Hauptlage abbildet.

$$p(x) = \det(A - x\,id) = \det\begin{pmatrix} 40-x & -15 \\ -15 & 24-x \end{pmatrix} = x^2 - 64x + 960 - 225 = x^2 - 64x + 735 = 0$$

$$x = 32 \pm \sqrt{1024 - 735} = 32 \pm 17 = 49,\ 15$$

EV zu 49: $\begin{array}{cc|c} -9 & -15 & 0 \\ -15 & -25 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

EV zu 15: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ weil: A symmetrisch $\rightarrow$ Basis aus orthogonalen EV, also $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normieren: $\left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{34}$ Setze $S := \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (orthogonal) und $x = Sz$

$$(\Rightarrow z = \underbrace{S^{-1}}_{= S^t \text{ orthogonal}} x = S^t x)$$

$$0 = x^t A \underbrace{x}_{= Sz} + a^t x + a_0 = z^t \underbrace{S^t A S}_{= \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}_{EW}} z + \underbrace{a^t S}_{= \frac{1}{\sqrt{34}}(1862,\ -750)} z + a_0 =$$

$$= 49z_1^2 + 15z_2^2 + \frac{1862}{\sqrt{34}} z_1 - \frac{750}{\sqrt{34}} z_2 + 61 =$$

$$= 49\left(z_1^2 + \frac{38}{\sqrt{34}} z_1\right) + 15\left(z_2^2 - \frac{50}{\sqrt{34}} z_2\right) + 61 =$$

$$= 49\underbrace{\left(z_1 + \frac{19}{\sqrt{34}}\right)^2}_{y_2} + 15\underbrace{\left(z_2 - \frac{25}{\sqrt{34}}\right)^2}_{y_1} \underbrace{- \frac{49 \cdot 361}{34} - \frac{15 \cdot 625}{34} + 61}_{= -735} =$$

$$y := \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -25 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\text{(xx)} \quad \left(\Rightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -19 \\ 25 \end{pmatrix}\right)$$

$$15y_1^2 + 49y_2^2 - 735 = 0 \iff \left(\frac{y_1}{7}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{15}}\right)^2 - 1 = 0$$

1. Hauptlage einer Ellipse $\quad \underbrace{a = 7,\quad b = \sqrt{15},\quad e = \sqrt{49 - 15} = \sqrt{34}}_{\text{IMMER ANGEBEN}}$

Brennpunkte: $\cdot)$ $\begin{pmatrix}\sqrt{34}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}34\\0\end{pmatrix}$ (X)

in y-Koord.

$\cdot)$ $\begin{pmatrix}-\sqrt{34}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-34\\0\end{pmatrix}$

in z-Koord.

$\cdot)$ $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-19\\59\end{pmatrix}$ (X) in (XX) einsetzen

$\cdot)$ $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-19\\-9\end{pmatrix}$

ursprüngliche x-Koordinaten: $x = Sz$

$\cdot)$ $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-5&3\\3&5\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-19\\59\end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix}272\\238\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$

$\cdot)$ $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-5&3\\3&5\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-19\\-9\end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix}68\\-102\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Die Brennpunkte dieser Ellipse sind $f_1 = \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Bewegung in 1. Hauptlage:

$$y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_2\\z_1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-25\\19\end{pmatrix} = \qquad z = S^t x = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-5&3\\3&5\end{pmatrix}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{34}}\left(\begin{pmatrix}3&5\\-5&3\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}-25\\19\end{pmatrix}\right),$$

also $T(x) = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(\begin{pmatrix}3&5\\-5&3\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}-25\\19\end{pmatrix}\right)$

Beispiel Ende

Vorteil Hauptachsentransformation (Bsp.)

Proposition: $T: A \to B\ (A)$, $f: B \to \mathbb{R}$, Definieren $M := \{x \in B : f(x) = 0\}$

(1) $T^{-1}(M) = \{x \in A : f(T(x)) = 0\}$

(2) Falls $B = A$ und T bijektiv, dann ist $T(M) = \{x \in A : f(T^{-1}(x)) = 0\}$

Beweis: (1) $x \in T^{-1}(M) \to T(x) \in M \to f(T(x)) = 0$

$\Rightarrow T(x) \in M \Rightarrow x \in T^{-1}(M)$.

(2) $(T^{-1})^{-1} = T$

$T(M) = (T^{-1})^{-1}(M) \overset{(1)}{=} \{x \in A : f(T^{-1}(x)) = 0\}$ $\square$

ELLIPSE: Es seien $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ (nicht notwendigerweise verschieden) (Brennpunkte)

$a \in \mathbb{R}$, $a > e = \frac{1}{2}|f_1 - f_2|$

$\{x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{|x - f_1| + |x - f_2|}_{\geq |f_1 - f_2|} = 2a\}$

Δ-Ungl.

$(b := \sqrt{a^2 - e^2})$

Wir ZEIGEN: Jede Ellipse ist eine Kurve 2. Ordnung:

$x \in M \iff |x-f_1| + |x-f_2| = 2a$

$\iff (|x-f_1| + |x-f_2|)^2 = 4a^2$ weil $|x-f_1| + |x-f_2| \geq 0$

und $2a \geq 0$

$\underset{(1)}{\iff} 2|x-f_1|\,|x-f_2| = 4a^2 - (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2)$

$\underset{(2)}{\Rightarrow} 4|x-f_1|^2\,|x-f_2|^2 = (4a^2 - (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2))^2$

$2|x-f_1|\,|x-f_2| \geq 0$

Ang. rechte Seite $\ngeq 0 \Rightarrow (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2) - 4a^2 > 0$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} 2|x-f_1|\,|x-f_2| = (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2) - 4a^2$

$\Rightarrow \underset{(2a)^2}{4a^2} = |x-f_1|^2 - 2|x-f_1||x-f_2| + |x-f_2|^2 = (|x-f_1| - |x-f_2|)^2 =$

$= \underbrace{\big||x-f_1| - |x-f_2|\big|^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow 2a = \big||x-f_1| - |x-f_2|\big| \leq |\underbrace{(x-f_1) - (x-f_2)}_{= f_2 - f_1}| = 2e$

$\Rightarrow a \leq e$ ↯ Widerspr. zu Annahme: $a > e$

Somit ist $4a^2 - (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2) \geq 0$ und daher $(1) \iff (2)$

$4|x-f_1|^2\,|x-f_2|^2 = 16a^4 - 8a^2(|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2) + (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2)^2$

$\iff 0 = 16a^4 - 8a^2(|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2) + (|x-f_1|^2 - |x-f_2|^2)^2 =$

$= 16a^4 - 8a^2(|x|^2 - 2\langle x, f_1\rangle + |f_1|^2 + |x|^2 - 2\langle x, f_2\rangle + |f_2|^2) +$

$+ (\underbrace{(\cancel{|x|^2} - 2\langle x, f_1\rangle + |f_1|^2) - (\cancel{|x|^2} - 2\langle x, f_2\rangle + |f_2|^2)}_{= 2\langle x, f_2 - f_1\rangle + (|f_1|^2 - |f_2|^2)})^2 =$

$= -16a^2|x|^2 + 4\langle x, f_2 - f_1\rangle^2 + 16a^2\langle x, f_1 + f_2\rangle + 4(|f_1|^2 - |f_2|^2)\langle x, f_2 - f_1\rangle +$

$+ 16a^4 - 8a^2(|f_1|^2 + |f_2|^2) + (|f_1|^2 - |f_2|^2)^2$ □

PARABEL: Es sei $f \in \mathbb{R}^2$ und Gerade g $\left(\langle x - p, n\rangle \underset{n\neq 0}{=} 0\right)$, $p \in \mathbb{R}^2$

wobei $f \notin g$

$\Rightarrow$ Parabel ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$, bei denen der Abstand von x zu f gleich dem Abstand von x zu g ist.

f... Brennpunkt
g... Leitlinie

Hier ist e die Hälfte des Abstands von f zu g.

Jetzt ZEIGEN wir, dass jede Parabel eine Kurve 2. Ordnung ist.

$x \in M \Leftrightarrow |x-f| = \dfrac{|\langle x-p,n\rangle|}{|n|}$ Hessesche Normalform

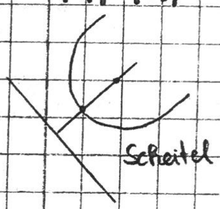
weil $|x-f| \geq 0$ und $\dfrac{|\langle x-p,n\rangle|}{|n|} \geq 0$

$\Leftrightarrow |x-f|^2 = \dfrac{\langle x-p,n\rangle^2}{|n|^2} \Leftrightarrow |n|^2 \underbrace{|x-f|^2}_{=\langle x-f,\, x-f\rangle} - \langle x-p,n\rangle^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = |n|^2 \left(|x|^2 - 2\langle x,f\rangle + |f|^2\right) - \left(\langle x,n\rangle^2 - 2\langle p,n\rangle\langle x,n\rangle + \langle p,n\rangle^2\right) =$$

$$= |n|^2|x|^2 - \langle x,n\rangle^2 - 2|n|^2\langle x,f\rangle + 2\langle p,n\rangle\langle x,n\rangle + |n|^2|f|^2 - \langle p,n\rangle^2 \ ?$$

$\square$



1. Hauptlage: Scheitel $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Proposition: Sei $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung

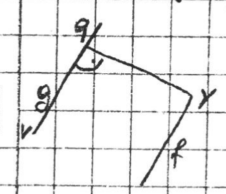
(1) Falls M eine Ellipse mit Brennpunkten f_1 und f_2 und großer Halbachse a ist, dann ist $T(M)$ eine Ellipse mit Brennpunkten $T(f_1)$ und $T(f_2)$ und großer Halbachse a

(2) Falls M eine Hyperbel mit Brennpunkten f_1 und f_2 und großer Halbachse a ist, dann ist $T(M)$ eine Hyperbel mit Brennpunkten $T(f_1)$ und $T(f_2)$ und großer Halbachse a.

(3) Falls M eine Parabel mit Brennpunkt f und Leitlinie g ist, dann ist $T(M)$ eine Parabel mit Brennpunkt $T(f)$ und Leitlinie $T(g)$

Beweis: (1) und (2): Proseminar

(3) Sei $x \in T(M) \Rightarrow \exists\, y \in M$ mit $x = T(y)$

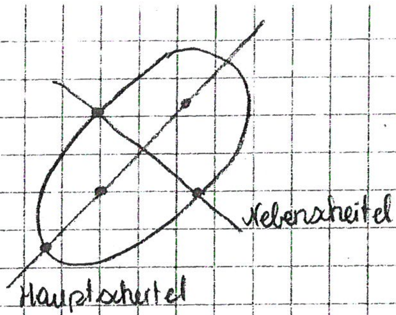


Es sei q die Orthogonalprojektion von y auf g

$\langle y-q, v\rangle = 0$

Abstand von y zu g ist gleich $|y-q|$

18.12.2012
(22. VO)



Alle Ellipsen außer Kreis haben Haupt- und Nebenscheitel, Kreis = spezielle Ellipse

in 1. Hauptlage Hauptscheitel $\binom{a}{0}$ und $\binom{-a}{0}$

Nebenscheitel $\binom{0}{b}$ und $\binom{0}{-b}$

HYPERBEL: Seien $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, f_1, f_2 ... Brennpunkte

$a < e = \frac{1}{2}|f_1 - f_2|$; Dann ist die Hyperbel

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{||x-f_1|-|x-f_2||}_{\le |f_1-f_2|} = 2a\}, \quad b = \sqrt{e^2-a^2}$$

Wir ZEIGEN jetzt, dass jede Hyperbel eine Kurve 2. Ordnung ist

$x \in M \iff ||x-f_1|-|x-f_2|| = 2a$

$\iff ||x-f_1|-|x-f_2||^2 = 4a^2$, weil $2a \ge 0$, $||x-f_1|-|x-f_2|| \ge 0$

$\iff 4a^2 = |x-f_1|^2 + |x-f_2|^2 - 2|x-f_1||x-f_2|$

$\underset{(1)}{\iff} 2|x-f_1|^2|x-f_2|^2 = |x-f_1|^2 + |x-f_2|^2 - 4a^2$

$\underset{(2)}{\Rightarrow} 4|x-f_1|^2|x-f_2|^2 = (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2 - 4a^2)^2$

$2|x-f_1||x-f_2| \ge 0$

Angenommen r.S. $\ngeq 0 \Rightarrow 4a^2 - (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2) > 0$

$\underset{(2)}{\Rightarrow} 2|x-f_1||x-f_2| = 4a^2 - (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2)$

$\Rightarrow (|x-f_1| + |x-f_2|)^2 = 4a^2$, weil $|x-f_1| + |x-f_2| \ge 0$, $2a \ge 0$

$\Rightarrow 2a = \underbrace{|x-f_1|}_{=|f_1-x|} + |x-f_2| \ge |(f_1-x)+(x-f_2)| = |f_1-f_2| = 2e$

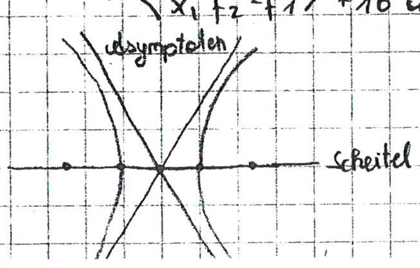
$\Rightarrow e \le a$ ↯ Widersp. zu $a<e$

Daher ist $|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2 - 4a^2 \ge 0$ und somit (1) $\iff$ (2)

(2): $4|x-f_1|^2|x-f_2|^2 = (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2 - 4a^2)^2 = (4a^2 - (|x-f_1|^2 + |x-f_2|^2))$

$\iff 0 = -16a^2|x|^2 + 4\langle x, f_2-f_1\rangle^2 + 16a^2\langle x, f_1+f_2\rangle + 4(|f_1|^2 - |f_2|^2) +$

$+ \langle x, f_2-f_1\rangle + 16a^4 - 8a^2(|f_1|^2 + |f_2|^2) + (|f_1|^2 - |f_2|^2)^2$ □



In 1. Hauptlage: Scheitel $\binom{a}{0}$ und $\binom{-a}{0}$

Asymptoten: $bx_1 + ax_2 = 0$

$bx_1 - ax_2 = 0$

Damit ist $|y-q| = |y-f|$

$$|\underbrace{x}_{=T(y)} - T(q)| = |T(y) - T(q)| = |y-q| = |y-f| = |\underbrace{T(y)}_{=x} - T(f)| =$$

$$= |x - T(f)| \qquad T(q) \in T(g)$$

Richtungsvektor von $T(g)$: $T(p+v) - T(p)$

$$\langle \underbrace{x}_{=T(y)} - T(q), T(p+v) - T(p) \rangle = \langle y-q, \underbrace{p+v-p}_{\text{weil } T \text{ Bewegung} = v} \rangle = 0$$

Somit ist $T(q)$ die Orthogonalprojektion von x auf $T(g)$ und deshalb ist $|x-T(q)|$ der Abstand von x zu $T(g)$

Daher liegt x auf der Parabel mit Brennpunkt $T(f)$ und Leitlinie $T(g)$ □

3) HYPERFLÄCHEN 2. ORDNUNG IM $\mathbb{R}^3$

IM $\mathbb{R}^3$: Affine Klassifikation

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	→ Ellipsoid	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	→ hyperbolischer Zylinder
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	→ Punkt	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	→ 2 schneidende Ebenen
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	→ Leere Menge $\emptyset$	$x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$	→ hyperbolisches Paraboloid
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	→ einschaliges Hyperboloid	$x_1^2 - 1 = 0$	→ 2 parallele Ebenen
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	→ zweischaliges Hyperboloid	$x_1^2 = 0$	→ Ebene (Doppelebene)
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	→ Kegel	$x_1^2 + 1 = 0$	→ Leere Menge $\emptyset$
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	→ elliptischer Zylinder	$x_1^2 - x_2 = 0$	→ parabolischer Zylinder
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	→ Gerade	$-x_1 = 0$	→ Ebene
$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	→ Leere Menge $\emptyset$	$1 = 0$	→ Leere Menge $\emptyset$
$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$	→ elliptisches Paraboloid	$0 = 0$	→ $\mathbb{R}^3$

07. 01. 2013
(23. VO)

9 nicht-ausgeartete Flächen 2. Ordnung

(beschränkt)
Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, einschaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid, hyperbolisches Paraboloid, Kegel, elliptischer Zylinder, hyperbolischer Zylinder, parabolischer Zylinder

Bei den ausgearteten Flächen 2. Ordnung:

enthalten Ebene (daher nicht zu den nicht-ausgearteten äquivalent)

einzelne Gerade (nicht äquivalent)

einzelner Punkt (nicht äquivalent)

$\emptyset$ (— " —)

ganz $\mathbb{R}^3$ (— " —)

affine Transf. ineinander übergeführt werden kann

→ Ellipsoid ist zu den acht anderen nicht äquivalent, weil es beschränkt ist, die anderen 8 aber nicht.

→ Auf zweischaligen Hyperboloid und elliptischen Paraboloid gibt es keine Geraden, auf den 6 anderen schon, daher sind diese zwei nicht zu den anderen 6 äquivalent. (*)

→ Das zweischalige Hyperboloid hat einen Mittelpunkt, das elliptische Paraboloid nicht, daher sind diese beiden nicht zueinander äquivalent.

(*) einschal. Hyp. $(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

hyp. Paraboloid $(x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0)$

$$t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

x_3-Koordinate egal

elliptischer Zylinder $(x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

→ Kegel besitzt Mittelpunkt auf dem Kegel, während die anderen nicht-ausgearteten Flächen 2. Ordnung keinen Mittelpunkt haben, oder den Mittelpunkt nicht auf der Fläche haben, daher ist der Kegel nicht zu diesen äquivalent.

→ Beim einschaligen Hyperboloid und beim hyperbolischen Paraboloid gibt es durch einen Punkt zwei auf der Fläche liegenden Geraden, während es bei den Zylindern nur eine Gerade auf der Fläche durch einen Pkt. gibt, daher sind diese beiden nicht äquivalent zu den Zylindern.

- Das einschalige Hyperboloid hat einen Mittelpunkt, das hyperbolische Paraboloid nicht, daher sind diese beiden nicht äquivalent zueinander.

- Parabolischer Zylinder hat keinen Mittelpunkt, die anderen beiden Zylinder schon. Elliptischer Zylinder besteht aus einem Teil, hyperbolischer Zylinder aus zwei Teilen.
Daher sind auch die 3 Zylinder nicht zueinander äquivalent.

Was ist der Schnitt eines Kegels mit einer Ebene?

O. B. d. A Kegel $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

Durch eine Drehung um die x_3-Achse können wir erreichen, dass in der Ebenengleichung x_2 nicht vorkommt

also O. B. d. A. Ebenengl. $x_3 = cx_1 + d$ oder

$x_1 = d$

Weiters $d \geq 0$ und durch Spiegelung an $x_1 - x_2$ - Ebene. $c \geq 0$

$c > 0,\ d > 0$:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 - \underbrace{(cx_1+d)^2}_{= c^2x_1^2 + 2cdx_1 + d^2}$$

$$= (1-c^2)x_1^2 + 2cd\,x_1 + x_2^2 - d^2 =$$

$$= (1-c^2)\left(x_1 + \frac{cd}{1-c^2}\right)^2 + x_2^2 - d^2 - \frac{c^2d^2}{1-c^2}$$

$c < 1$: Ellipse

$c > 1$: Hyperbel

$c = 1$: $2cdx_1 + x_2^2 - d^2 = 0$, also Parabel

$c = 0$: $x_3 = d$

$d > 0$: $0 = x_1^2 + x_2^2 + d^2$, also Ellipse

$d = 0$: $x_3 = 0$: $0 = x_1^2 + x_2^2$, also Punkt

$d = 0$ $x_3 = cx_1$ $0 = x_1^2 + x_2^2 - c^2x_1^2 = (1-c^2)x_1^2 + x_2^2$

$0 \leq c < 1$: Punkt

$c = 1$: Gerade

$c > 1$: 2 schneidende Geraden

$x_1 = d$: $\quad d^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

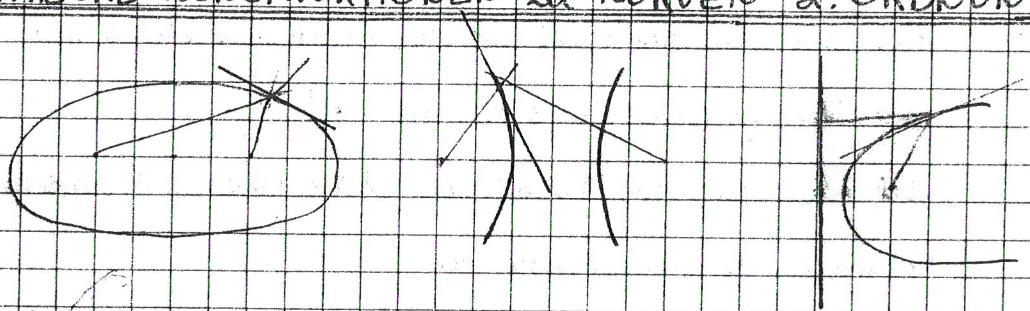
$d > 0$: Hyperbel

$d = 0$: 2 schneidende Geraden

Man kann auch wieder eine Hauptachsentransformation durchführen (keine Brennpunkte ; Frage, was ist 1. Hauptlage).

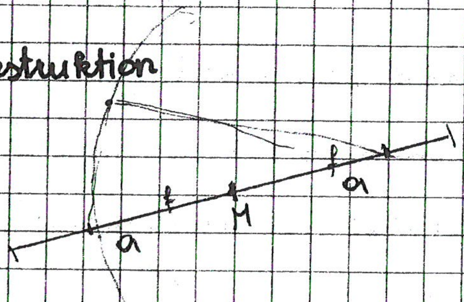
4) Geometrische Konstruktionen zu Kurven 2. Ordnung

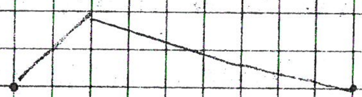
Tangenten:



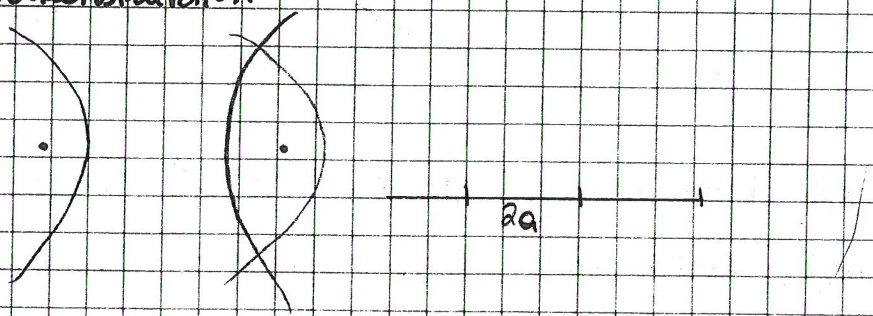
→ Ellipsenkonstruktion

08.01.2013
(24. Vo)

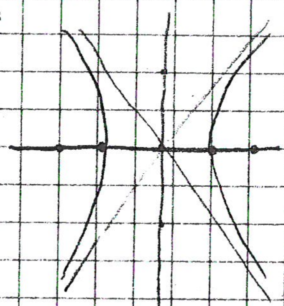




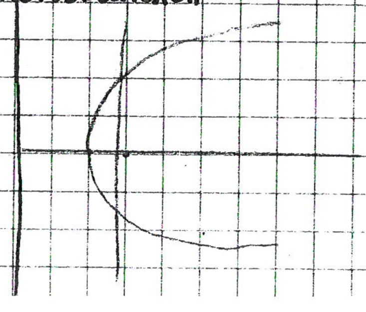
→ Hyperbelkonstruktion



Asymptoten:

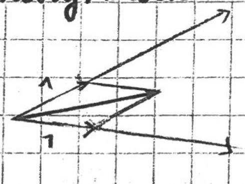


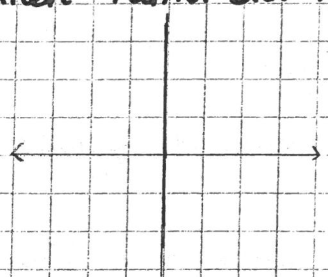
→ Parabelkonstruktion



→ Konstruktion der Tangenten an einen Punkt der Kurve:

Winkelsymmetrale:





Winkelsymmetrale von a, b $(\in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ ist durch $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$ gegeben,

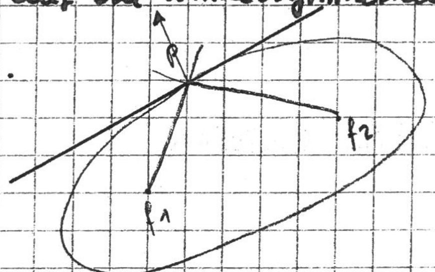
außer $b = \lambda a$ für ein $\lambda < 0$ ist.

Für den Ausnahmefall (180°) ist der Richtungsvektor der Winkelsymmetrale der Normalvektor auf a (bzw. b)

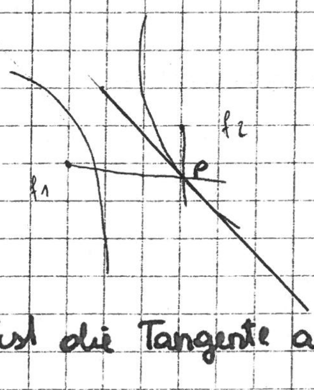
Bei den Beweisen kann man stets O.B.d.A annehmen, dass die Kurve in 1. Hauptlage ist.

Proposition: Sei M eine Kurve 2. Ordnung und $p \in M$.

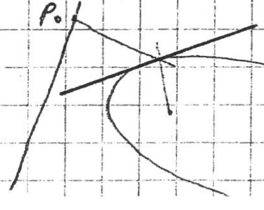
(1) Falls M eine Ellipse ist, dann ist die Tangente an M im Punkt p gleich der Normalen auf die Winkelsymmetrale von $p-f_1$ und $p-f_2$ durch p.



(2) Falls M eine Hyperbel ist, dann ist die Tangente an M im Punkt p gleich der Winkelsymmetrale von $p-f_1$ und $p-f_2$ durch p



(3) Falls M eine Parabel ist, dann ist die Tangente an M im Punkt p gleich der Winkelsymmetrale von $p-f$ und $p-p_0$ durch p, wobei p_0 die Orthogonalprojektion von p auf die Leitlinie ist.



Beweis: (1) O.B.d.A. $\quad 0 = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - 1 = \frac{1}{a^2} x_1^2 + \frac{1}{b^2} x_2^2 - 1$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_0 = -1$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{a^2} p_1^2 + \frac{1}{b^2} p_2^2 - 1 = 0$$

und Tangente an p ist die Polare: $0 = p^t A x + \frac{1}{2} a^t x + \frac{1}{2} a^t p + a_0 =$

$$= \frac{1}{a^2} p_1 x_1 + \frac{1}{b^2} x_2 - 1 .$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p - f_1 = \begin{pmatrix} p_1 - e \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad p - f_2 = \begin{pmatrix} p_1 + e \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{e}{a} p_1\right| = \underbrace{\frac{e}{a}}_{\leq} |p_1| \leq |p_1| \leq a \text{, weil } \frac{1}{a^2} p_1^2 = 1 - \underbrace{\frac{1}{b^2} p_2^2}_{\geq 0} \leq 1$$

und somit $\quad a - \frac{e}{a} p_1 \geq 0 \quad$ und $\quad a + \frac{e}{a} p_1 \geq 0$

$$|p - f_1| = \sqrt{(p_1 - e)^2 + p_2^2} = \sqrt{p_1^2 + \underbrace{p_2^2}_{= b^2 - \frac{b^2}{a^2} p_1^2} - 2ep_1 + e^2} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}_{= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2}} p_1^2 - 2ep_1 + \underbrace{e^2 + b^2}_{= a^2}} = \sqrt{\left(\frac{e}{a} p_1\right)^2 - 2ep_1 + a^2} =$$

$$= a - \frac{e}{a} p_1$$

analog $|p - f_2| = a + \frac{e}{a} p_1$

Richtungsvektor der Winkelsymmetrale

$$\frac{1}{|p-f_1|}(p - f_1) + \frac{1}{|p-f_2|}(p - f_2) = \frac{1}{|p-f_1||p-f_2|}\Big(|p-f_2|(p-f_1) + |p-f_1|(p-f_2)\Big)$$

$$= \frac{1}{|p-f_1||p-f_2|}\left(\left(a + \frac{e}{a} p_1\right)\begin{pmatrix} p_1 - e \\ p_2 \end{pmatrix} + \left(a - \frac{e}{a} p_1\right)\begin{pmatrix} p_1 + e \\ p_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{|p-f_1||p-f_2|}\begin{pmatrix} \left(ap_1 + \cancel{\frac{e}{a} p_1^2} - \cancel{ae} - \frac{e^2}{a} p_1\right) + \left(ap_1 - \cancel{\frac{e}{a} p_1^2} + \cancel{ae} - \frac{e^2}{a} p_1\right) \\ \left(ap_2 + \cancel{\frac{e}{a} p_1 p_2}\right) + \left(ap_2 - \cancel{\frac{e}{a} p_1 p_2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|p-f_1||p-f_2|}\begin{pmatrix} \left(2a - 2\frac{e^2}{a}\right) p_1 \\ 2a p_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{a|p-f_1||p-f_2|}\begin{pmatrix} (\overbrace{a^2 - e^2}^{= b^2}) p_1 \\ a^2 p_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2a^2 b^2}{|p-f_1| \cdot |p-f_2|}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} p_1 \\ \frac{1}{b^2} p_2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Normale auf die Winkelsymmetrale: $\frac{1}{a^2} p_1 x_1 + \frac{1}{b^2} p_2 x_2 = \frac{1}{a^2} p_1^2 + \frac{1}{b^2} p$

-1

(2) Proseminar $\left|\frac{e}{a} p_1\right| \geq a \Rightarrow \operatorname{sgn} p_1 \left(\frac{e}{a} p_1 - a\right) \geq 0$ und

$$\operatorname{sgn} p_1 \left(\frac{e}{a} p_1 + a\right) \geq 0$$

(3) O.B.d.A: $x_2^2 - 4e x_1 = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -4e \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_0 = 0$$

$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in M$: $\quad p_2^2 - 4e p_1 = 0 \quad f = \binom{e}{0}$, Leitlinie $x_2 + e = 0$

Tangente an p ist die Polare, also

$$0 = \underbrace{p^t A}_{(0,\, p_2)} x + \frac{1}{2} \underbrace{a^t x}_{(-4e x_1)} + \frac{1}{2} \underbrace{a^t p}_{(-4e p_1)} + a_0 = p_2 x_2 - 2e x_1 - 2e p_1$$

p_0 ... Orthogonalprojektion von p auf Leitlinie: $p_0 = \binom{-e}{p_2}$, also

$$p - f = \binom{p_1 - e}{p_2}, \quad p - p_0 \binom{p_1 + e}{0}$$

$$|p - p_0| = p_1 + e \qquad |p - f| = \sqrt{(p_1 - e)^2 + p_2^2} = \sqrt{p_1^2 + \underbrace{p_2^2}_{=4ep_1} - 2ep_1 + e^2} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{p_1^2 + 2ep_1 + e^2}_{\underbrace{(p_1+e)^2}_{\geq 0}}} = p_1 + e$$

Winkelsymmetrale $\frac{1}{|p-f|}(p-f) + \frac{1}{|p-p_0|}(p-p_0) = \underbrace{\frac{1}{|p-f||p-p_0|}}_{\frac{1}{(p_1+e)^2}} \left((p_1+e) \binom{p_1 - e}{p_2} + (p_2 + e) \binom{p_1 + e}{0} \right)$

$$= \frac{1}{p_1 + e} \binom{2p_1}{p_2} = \frac{1}{2e(p_1+e)} \binom{4ep_1}{2ep_2} = \frac{p_2}{2e(p_1+e)} \binom{p_2}{2e}$$

Für $p_2 \neq 0$ ist $\binom{p_2}{2e}$ Richtungsvektor der Winkelsymmetralen

und daher ist die Winkelsymmetrale:

$$2e x_1 - p_2 x_2 = 2ep_1 \underbrace{- p_2^2}_{=4ep_1} = -2ep_1$$

Schließlich sei $p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \qquad p - f = \binom{-e}{0}, \ \underbrace{p - p_0}_{\binom{-e}{0}} = \binom{e}{0}$

Richtungsvektor der Winkelsym. ist $\binom{0}{1}$

Daher: Winkelsymm.: $x_1 = 0 \Rightarrow 0 = x_1 = -\frac{p_2}{2e} x_2 + x_1 + p_1$

$$\Rightarrow 0 = p_2 x_2 - 2e x_1 - 2e p_1 \qquad \square$$

5) PROJEKTIVE KLASSIFIKATION

14.01
(25. VO)

BSP $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_1 + 8x_2 - 12 = 0$

projektiv: $\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 4\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 + 4\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} + 6\frac{x_1}{x_0} + 8\frac{x_2}{x_0} - 12 = 0$

$\Rightarrow x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_0^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_0 + 8x_2x_0 = 0$

Umgekehrt: $x_0 = 1$: $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_1 + 8x_2 - 12 = 0$

Bei einer projektiven Hyperfläche 2. Ordnung treten nur 2. Potenzen auf

$\bar{x}^t A \bar{x} = 0$

$x^t A x + a^t x + a_0 = 0 \quad \ldots \quad \bar{x}^t \left(\begin{array}{c|c} a_0 & \frac{1}{2}a^t \\ \hline \frac{1}{2}a & A \end{array}\right) \bar{x} = 0$, wobei $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}$

Zur Klassifikation sieht man sich Rang r und Positivitätsindex p von A_0 an

Dabei kann man $p \geq \frac{r}{2}$ voraussetzen

...o können nicht
...e 0 sein
...l es so kein
...jektiver
...ht
...ou

Projektive Klassifikation Kurven 2. Ordnung

TYP	NAME	AFFINER TYP
$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	leere Menge	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ $(\emptyset)$
$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	Ellipse	Ellipse $(x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0)$; Hyperbel $(x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0)$, Parabel $(x_1^2 - x_2 = 0)$
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Punkt	$x_1^2 + x_2^2 = 0$ (Punkt), $x_1^2 + 1 = 0$ $(\emptyset)$ Fernpunkt
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 schneidende Geraden	$x_1^2 - x_2^2 = 0$ (2 schneid. Geraden), $x_1^2 - 1 = 0$ (2 parallele Geraden) $-x_2 = 0$ (Gerade
$x_1^2 = 0$	Gerade	$x_1^2 = 0$ (Gerade), $-1 = 0$ $(\emptyset)$ Ferngerade!
$0 = 0$	Ebene	Ebene $(0 = 0)$

Ellipse: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ $\quad \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$

Hyperbel $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ $\quad \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$

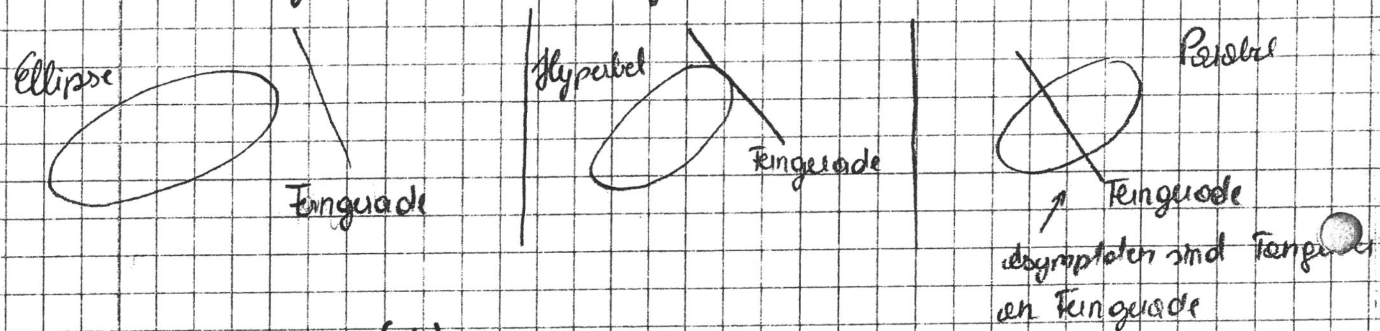
Parabel: $x_1^2 - x_2 = 0$ $\qquad \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \frac{x_2}{x_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2 x_0 = 0 \qquad x_2 = y_2 + x_0$

$$x_1^2 - (y_2 + x_0)x_0 = x_1^2 - x_0^2 - x_0 y_2 = x_1^2 - \underbrace{\left(x_0 + \frac{1}{2}y_2\right)^2}_{x_0^2 + x_0 y_2 + \frac{1}{4}y_2^2} + \frac{1}{4}y_2^2 =$$

$$= u_1^2 + u_2^2 - u_0^2$$

So ein linearer Term bewirkt im projektiven zusätzlich 1 positives und ein negatives Quadrat (Rang erhöht sich um 2, Positivitätsindex um 1)



$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ $\quad (\emptyset) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ ✓

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ $\quad$ (Punkt) $\qquad x_1^2 + x_2^2 = 0$

$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ ✓

$x_1^2 - x_2^2 = 0$ $\quad$ (2 schneidende Geraden)

$x_1^2 + 1 = 0$ $\quad (\emptyset) \qquad x_1^2 + x_0^2 = 0$

$x_1^2 - 1 = 0$ $\quad$ (2 parallele Geraden) $\qquad x_1^2 - x_0^2 = 0$

$x_1^2 = 0$ $\quad$ (Gerade)

$x_1^2 - x_2 = 0$ ✓

$-1 = 0$ $\quad (\emptyset) \qquad -x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 0$

$0 = 0$ $\quad$ (Ebene)

$-x_1 = 0$ $\quad$ (Gerade) $\qquad x_1^2 - x_2^2 = 0$

BRUNNEN

Projektive Klassifikation Flächen 2. Ordnung

TYP	NAME	AFFINE TYPEN
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2=0$	leere Menge	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$ ($\emptyset$)
$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0$	Ellipsoid	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$ (Ellipsoid); $x_1^2+x_2^2-x_3^2+1=0$ (2schaliges Hyperboloid) $x_1^2+x_2^2-x_3=0$ (ellipt. Paraboloid)
$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_0^2=0$	einschaliges Hyperboloid	$x_1^2+x_2^2-x_3^2-1=0$ (einschaliges Hypab.) $x_1^2-x_2^2-x_3=0$ (hyperbolisches Paraboloid).
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	Punkt	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ (Punkt), $x_1^2+x_2^2+1=0$ ($\emptyset$) Tempel
$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	Kegel / Zylinder	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ (Kegel); $x_1^2+x_2^2-1=0$ (elliptischer Zylinder) $x_1^2-x_2^2-1=0$ (hyperbolischer Zylinder) $x_1^2-x_2=0$ (parabolischer Zylinder)
$x_1^2+x_2^2=0$	Gerade	$x_1^2+x_2^2=0$ (Gerade) $x_1^2+1=0$ ($\emptyset$)
$x_1^2-x_2^2=0$	2 schneidende Ebene	$x_1^2-x_2^2=0$ (2 schneidende Ebenen) $x_1^2-1=0$ (2 parallele Ebenen); $-x_1=0$ (Ebene)
$x_1^2=0$	Ebene	$x_1^2=0$ (Ebene) $-1=0$ ($\emptyset$)
$0=0$	Raum	$0=0$ (Raum)

affin: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$ ($\emptyset$) $\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2=0$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ (Punkt)

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$ (Ellipsoid) $\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0$

$x_1^2+x_2^2-x_3^2+1=0$ (2schaliges Hyperboloid) $\quad x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_0^2=0$

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ (Kegel)

$x_1^2+x_2^2-x_3^2-1=0$ (einschaliges Hyper) $\quad x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_0^2=0$

$x_1^2+x_2^2+1=0$ ($\emptyset$) $\quad x_1^2+x_2^2+x_0^2=0$

$x_1^2+x_2^2=0$ (Gerade)

$x_1^2+x_2^2-1=0$ (elliptischer Zylinder) $\quad x_1^2+x_2^2-x_0^2=0$

$x_1^2+x_2^2-x_3=0$ (— " — Paraboloid) $\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0$

$x_1^2 - x_2^2 = 0$ (2 schneidende Ebenen)

$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ (hyperbolischer Zylinder) $x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$

$x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$ (— " — Paraboloid) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$

$x_1^2 - 1 = 0$ (2 parallele Ebenen) $x_1^2 - x_0^2 = 0$

$x_1^2 = 0$ (Ebene)

$x_1^2 + 1 = 0$ ($\emptyset$) $x_1^2 + x_0^2 = 0$

$x_1^2 - x_2 = 0$ (parabolischer Zylinder) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

$-1 = 0$ ($\emptyset$) $x_0^2 = 0$

$0 = 0$ (Raum)

$-x_1 = 0$ (Ebene) $x_1^2 - x_2^2 = 0$

15.01.2012
(26. VO)

Bsp Betrieb, stellt Produkte A und B her

1. Maschine: A benötigt 11 Minuten, B 15 Minuten Bearbeitungszeit an einem Tag höchstens 420 Minuten insgesamt.

2. Maschine: A 17 Minuten, B 11 Minuten, insgesamt höchstens 442 Minuten pro Tag möglich

Gewinn bei A: 72€, bei B: 56 €

Wieviel Stück A und B müssen erzeugt werden, damit der tägliche Gewinn maximal wird und wie groß ist dieser Gewinn?

x_1... Stückzahl von A (an einem Tag)

x_2... — " — B

Zielfunktion: $\underset{\binom{x_1}{x_2}}{f(x)} = 72x_1 + 56x_2$ (Extrema liegen am Rand)

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

$11x_1 + 15x_2 \leq 420,$

$17x_1 + 11x_2 \leq 442$

allgemeines Problem : f lineare Zielfunkt.

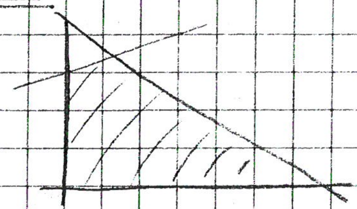
$Ax \leq b$

Matrix Vektor

bei uns: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 11 & 15 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 420 \\ 442 \end{pmatrix}$

Man sucht Maximum oder Minimum von f.

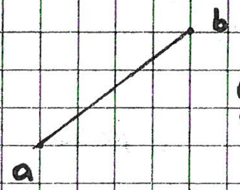
1) THEORETISCHE GRUNDLAGEN



$M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

Def.: Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ (oder von einem Vektorraum über $\mathbb{R}$) heißt **konvex**, falls $\forall a, b \in M$:

$ta + (1-t)b \in M \quad \forall t \in [0,1]$



Geradenstück zwischen a und b

Prop.: M ist konvex.

Beweis: Seien $x, y \in M$; $t \in [0,1] \Rightarrow Ax \leq b$, $Ay \leq b$

$$A(tx + (1-t)y) = \underbrace{t\underbrace{Ax}_{\leq b}}_{\leq tb,\ \text{weil } t \geq 0} + \underbrace{(1-t)\underbrace{Ay}_{\leq b}}_{\leq (1-t)b,\ \text{weil } 1-t \geq 0 \text{ wegen } t \leq 1}$$

$\leq tb + (1-t)b = b \Rightarrow tx + (1-t)y \in M$, also M konvex $\square$

Analysis: M heißt abgeschlossen, falls für jede Folge $(x_n) \in M$; $x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in M$

Proposition: M ist abgeschlossen

Beweis: $(x_n) \in M \Rightarrow Ax_n \leq b \quad \forall n$,

$x_n \to x_0 \Rightarrow A\underset{x_0}{\underset{\downarrow}{x_n}} \to Ax_0 \qquad Ax_0 = \lim_{n \to \infty} \underbrace{Ax_n}_{\leq b} \leq b$

$\Rightarrow x_0 \in M$ $\square$ $\square$

→ Eine lineare Optimierung muss keine Lösung haben, weil M unbeschränkt sein kann

Falls M beschränkt ist: $M \subseteq \mathbb{R}^n$, beschränkt und abgeschlossen

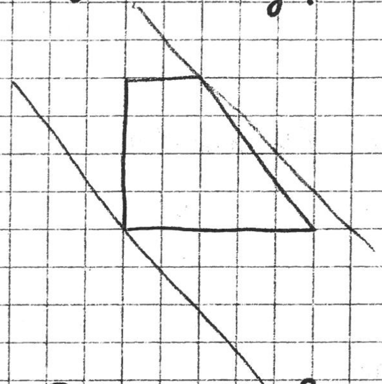
$\iff$ M kompakt

Satz vom Minimum und Maximum: $\underset{\text{stetig}}{f}: \underbrace{M}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$ besitzt

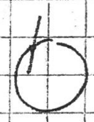
ein Minimum und ein Maximum

f linear $(f(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) \Rightarrow f$ stetig (gilt nur im endlich-dim)

Falls M beschränkt, dann hat lineares Optimierungsproblem stets eine Lösung.

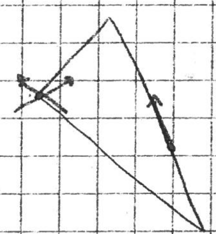


Für beliebige konvexe Mengen nennt man die, wie unten definierten Punkte Extremalpunkte



Def.: $x \in M = \{y : Ay \leq b\}$ heißt Eckpunkt von M, falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\exists \delta > 0$: $x + tv \notin M$ $\forall t \in (0, \delta)$ oder $\forall t \in (-\delta, 0)$

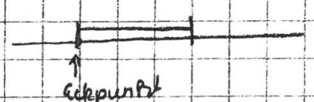


Proposition: Eine nicht leere Menge der Form $M = \{x : Ax \leq b\}$ besitzt Eckpunkte

Beweis: $M \subseteq \mathbb{R}^n$

Induktion nach n:

$n = 1$



Sei $n > 1$: Wähle $x \in M$ Falls x Eckpunkt ✓

Somit $\exists v \neq 0$ mit $x + tv \in M$ $\forall t \in (-\delta, \delta)$
$\exists \delta > 0$

$\{v : \exists \delta > 0 : x + tw \in M \ \ \forall t \in (-\delta, \delta)\} \cup \{0\}$ ist

ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$

w_1, w_2 darinnen: $\exists \delta_1, \delta_2$: $x + tw_1 \in M$ $\forall t \in (-\delta_1, \delta_1)$

$x + tw_2 \in M$ $\forall t \in (-\delta_2, \delta_2)$

$\delta := \frac{1}{2} \min\{\delta_1, \delta_2\} : t \in (-\delta, \delta)$

$$x + t(w_1 + w_2) = x + tw_1 + tw_2 = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(x + 2tw_1)}_{\in M} + \underbrace{(x + 2tw_2)}_{\in M}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}(x + 2tw_1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(x + 2tw_2) \in M, \text{ weil } M \text{ konvex}$$

OBdA: x liegt am Rand von $M \Rightarrow V := \{w : \exists \delta > 0 : x + tw \in M \ \forall t \in (-\delta, \delta)\} \neq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow x + V$ affiner Teilraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim V < n$.

$M \cap \{x + V\}$ Nach I.V besitzt $M \cap \{x + V\}$ einen Eckpunkt y.

Das ist auch Eckpunkt von M $\square$

21.01.2013
(27. VO)

Proposition: Die Menge $M = \{x : Ax \leq b\}$ sei beschränkt und f sei linear. Dann hat f ihr Maximum (und Minimum) in M in einem der Eckpkte von M (möglicherweise auch noch in einigen anderen Punkten)

Beweis: Wir wissen bereits: $\exists x_0 \in M$, sodass f das Maximum auf M in x_0 hat.

Setze $M_0 = \{x \in M : f(x) = f(x_0)\}$.

Die Menge M_0 besitzt einen Eckpunkt m. Dann ist m auch ein Eckpunkt von M

$f(m) = f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in M$ $\square$

Lösungsmethode: Bestimme alle Eckpunkte von M, berechne die Funktionswerte davon. Beim größten Funktionswert haben wir das Maximum, beim kleinsten das Minimum

2) GRAPHISCHE METHODE

Geht nur im $\mathbb{R}^2$

BSP von 26. VO: $f(x) = 72x_1 + 56x_2$

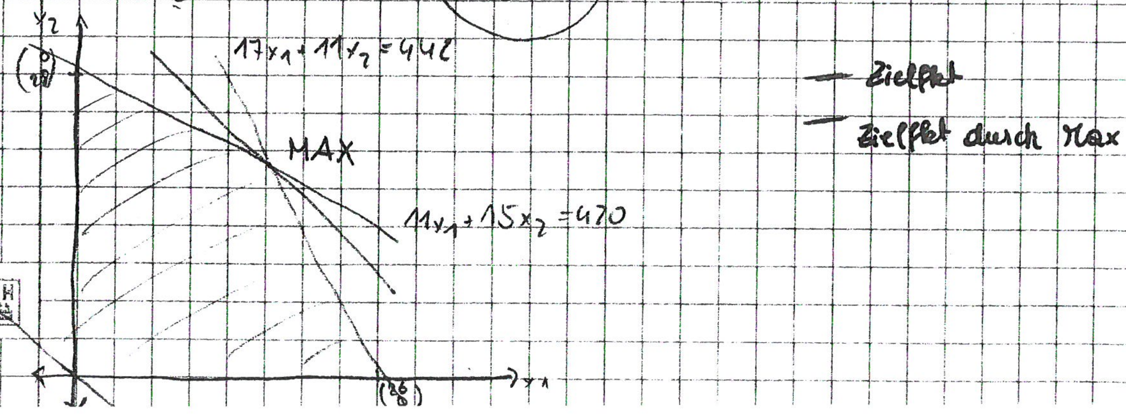
$11x_1 + 15x_2 \leq 420$

$17x_1 + 11x_2 \leq 442$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

muss immer gelten



Wir bestimmen den Schnittpunkt von $17x_1+11x_2=442$ mit $11x_1+15x_2=420$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 17 & 11 & 442 \\ 11 & 15 & 420 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 17 & 11 & 442 \\ 0 & 134 & 2278 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 17 & 11 & 442 \\ 0 & 1 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

Schnittpkt ist $\binom{15}{17}$, $f\binom{15}{17}=2032$ (ausrechnen)

Um den momentanen täglichen Gewinn zu erzielen, müssen 15 Stück A und 17 Stück B pro Tag erzeugt werden, der tägliche Gewinn ist 2032 €

3) DAS SIMPLEX-VERFAHREN

Grob: Man hat eine Ecke (z.B. mit $\binom{0}{0}$), jetzt sucht man eine, die von dieser erreichbar ist, wo f größer ist.

Klassisch hat man $Ax=b$ $(x\geq 0)$.

Um aus $Ax\leq b$ eine Gleichung zu erhalten führt man „Schlupfvariable" ein

$a_1x_1+\ldots+a_nx_n\leq b_1$, „Schlupfvariable" $x_{n+1}\geq 0$:

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n+x_{n+1}=b_1$$

$$(\text{formal: } x_{n+1}=b_1-(a_1x_1+\ldots+a_nx_n))$$

BSP „Schlupfvariable": x_3, x_4

$$11x_1+15x_2+x_3=420$$
$$17x_1+11x_2+x_4=442$$

$x_1\geq 0$
$x_2\geq 0$
$x_3\geq 0$
$x_4\geq 0$

Startecke: $\binom{0}{0}$, also $\begin{pmatrix}0\\0\\420\\442\end{pmatrix}_{f=0}$ „Variablen, die 0 sind": x_1, x_2

Wir drücken die Gleichungen und f durch x_1, x_2 aus:

$x_3=420-11x_1-15x_2$,

$x_4=442-17x_1-11x_2$,

$f=72x_1+56x_2$

Wir erhöhen x_1 (x_2 wäre genauso möglich)

$$x_1 \leq \frac{420}{11} \approx 38,\overline{18}$$

$$x_1 \leq 26$$

Wir können x_1 auf 26 erhöhen, es wird dann $x_4 = 0$

„Variable, die 0 wird": x_2, x_4

Wir drücken Gleichungen und f durch x_2, x_4 aus:

$$\left(x_1 = 26 - \frac{11}{17}x_2 - \frac{1}{17}x_4\right)$$

$$x_3 = 420 - 11\left(26 - \frac{11}{17}x_2 - \frac{1}{17}x_4\right) - 15x_2 =$$

$$= 134 - \frac{134}{17}x_2 + \frac{11}{17}x_4$$

$$x_1 = 26 - \frac{11}{17}x_2 - \frac{1}{17}x_4$$

$$f = 72\left(26 - \frac{11}{17}x_2 - \frac{1}{17}x_4\right) + 56x_2 =$$

$$= 1872 + \frac{160}{17}x_2 - \frac{72}{17}x_4.$$

Eckpunkt: $\begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 134 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} 26 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $f = 1872$

urspr. Koor. - ohne „Schlupfvariable"

Um f zu erhöhen, müssen wir x_2 erhöhen:

$$x_2 \leq 17, \quad x_2 \leq \frac{26 \cdot 17}{11} = \frac{442}{11} = 40,\overline{18}$$

Wir können x_2 auf 17 erhöhen, es wird dann x_3 Null.

„Variablen, die 0 sind": x_3, x_4

Wir drücken die Gleichungen und f durch x_3 und x_4 aus:

$$\left(x_2 = 17 - \frac{17}{134}x_3 + \frac{11}{134}x_4\right)$$

$$x_2 = 17 - \frac{17}{134}x_3 + \frac{11}{134}x_4,$$

$$x_1 = 26 - \frac{11}{17}\left(17 - \frac{17}{134}x_3 + \frac{11}{134}x_4\right) - \frac{1}{17}x_4 = 15 + \frac{11}{134}x_3 - \frac{15}{134}x_4,$$

$$f = 1872 + \frac{160}{17}\left(17 - \frac{17}{134}x_3 + \frac{11}{134}x_4\right) - \frac{72}{17}x_4 =$$

$$= 2032 - \frac{80}{67}x_3 - \frac{232}{67}x_4$$

Neuer Eckpunkt: $\begin{pmatrix}15\\17\\0\\0\end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix}15\\17\end{pmatrix}\right)$, $f = 2032$

Weil es jetzt unmöglich ist f zu erhöhen, sind wir bei einem Maximum angekommen.

Das Maximum ist bei $\begin{pmatrix}15\\17\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}15\\17\end{pmatrix} = 2032$.

	Graphisch	Simplex
+	schneller	alle Werte auf Rechenweg berechnet
−	nur im $\mathbb{R}^2$ möglich	langsamer, kann mühsam werden

WEITERE KAPITEL AUS LINEARER ALGEBRA

(kommt nicht zur mündlichen Prüfung)

TENSOREN

$(a_{j_1, j_2, \dots, j_n})_{j_1, \dots, j_n = 1}^{K}$

formale Def.: V Vektorraum über $\mathbb{R}$ (K), $r \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Menge aller multilinearen (r-linearen) Abbildungen von $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R}$ die Menge der Tensoren r-ten Stufe.

allgemein: $V_1, V_2, \dots, V_r$ Vektorraum

multilineare Abb.: $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \to \mathbb{R}$

V Vr. $\quad r, s \in \mathbb{N}_0$

Ein Tensor r-fach kontravariant und s-fach kovariant ist eine multilineare Abbildung von $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-fach}} \to \mathbb{R}$

(V^* Dualraum zu V)

$a^{j_1, \dots, j_r}_{k_1, \dots, k_s}$

$$a^{j_1, j, j_3}_{j, k_2} = \sum_{j=1}^{n} a^{j_1, j, j_3}_{j, k_2}$$

Einstein'sche Summationskonvention

DIFFERENZIALFORMEN

Eine Differentialform r-ter Stufe ist eine alternierende r-lineare (multilineare) Abbildung: $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R}$

Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$

Differenzialformen auf $\mathbb{R}^n$

0-Formen: Zahlen $\quad (\dim = 1 = \binom{n}{0})$

1-Formen: Vektoren, darstellen bezügl. der Standardbasis

$\{dx_1, dx_2, \dots dx_n\} \quad (\dim = n = \binom{n}{1})$

2-Formen: Basis: $\{dx_1 \overset{\text{Hack}}{\wedge} dx_2, dx_1 \wedge dx_3, \dots, dx_1 \wedge dx_n,$

$dx_2 \wedge dx_3, \dots, dx_{n-1} \wedge dx_n\} \quad (\dim = \binom{n}{2})$

allg. k-Formen $\quad \dim = \binom{n}{k}$

n-Formen $\quad \dim = \binom{n}{n} = 1 \quad$ Basis $\{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n\}$

(im Wesentlichen Determinante)

k-Formen für $k > n$: nur die Nullabbildung

Treten in Differenzialgeometrie auf

Für eine r-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist eine Differentialform eine Funktion $f: M \to \underbrace{\Lambda^r(\mathbb{R}^n)}_{\substack{\text{großes Lambda} \\ \text{r-Formen}}}$

$f = f_{1,2,3}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + f_{1,2,4}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \dots$

zwischen Differentialformen $\quad f_1 \wedge f_2$

$(f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2) \wedge (g_1\, dx_2 \wedge dx_3 + g_2\, dx_3 \wedge dx_4) \dots =$

$= f_1 g_1\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \underbrace{f_2 g_2\, dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3}_{=0} +$

$+ f_1 g_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + f_2 g_2\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$

„Differenzieren" $df \qquad d: \Lambda^r \to \Lambda^{r+1}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \wedge dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \wedge dx_n$$

BSP $\quad f = x_1^2\, dx_1 + x_1 x_2 x_3\, dx_2 + x_2\, dx_3$

$$df = \underbrace{2x_1\, dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + \underbrace{0 \cdot dx_1 \wedge dx_2}_{=0} + \underbrace{0 \cdot dx_1 \wedge dx_3}_{=0} +$$

$$+ x_2 x_3 \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{=-dx_1 \wedge dx_2} + \underbrace{x_1 \cdot x_3 \cdot dx_2 \wedge dx_2}_{=0} + x_1 x_2\, dx_2 \wedge dx_3 +$$

$$+ \underbrace{0 \cdot dx_3 \wedge dx_1}_{=0} + 1 \cdot \underbrace{dx_3 \wedge dx_2}_{=-dx_2 \wedge dx_3} + \underbrace{0 \cdot dx_3 \wedge dx_3}_{=0} =$$

$$= -x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 x_2 - 1)\, dx_2 \wedge dx_3$$

$d(df) = 0$

allg. Satz von Stokes: $\quad \int_{\partial G} f = \int_G df$

$$f(b) - f(a) \qquad \int_{\{a,b\}} f = \int_{[a,b]} f' = \int_a^b f'$$

BRUNNEN