

# VO MATHE IM ALLTAG

- I. Algebraische Anwendungen
- II. Differenzialgleichungen
- III. Fouriertransformation
- IV. Weitere Anwendungen

## EINLEITUNG

Wir verwenden oft Computer. Probleme, die dabei auftreten können:

- Rundungsfehler
  - Rechenzeit
  - Speicherplatz
  - Hard- und Softwarefehler
  - ungenaue Daten
- } darauf haben wir Einfluss

### Beispiel zur Rechenzeit:

A und B sind  $n \times n$ -Matrizen,  $v \in \mathbb{R}^n$

Frage: Wie viele Multiplikationen kommen vor?

$$(AB)v: n^3 + n^2 \approx n^3$$

$$A(Bv): n^2 + n^2 = 2n^2 \rightarrow \text{diese Methode ist schneller, es kommen weniger Multiplikationen vor}$$

## I. ALGEBRAISCHE ANWENDUNGEN

### 1, Computerzahlen

Der Computer rechnet eigentlich mit Dualzahlen: 0 und 1. Um lange Blöcke mit vielen 0ern oder 1ern besser lesen zu können, gibt es eine Kontrollzahl. Nach 8 Zahlen ist die 9. ein 0er, wenn davor nur 1er waren, bzw. ein 1er, wenn davor nur 0er waren:

Addition:

$$\begin{array}{r} + 1011 \\ \quad 110 \\ \hline 10001 \end{array}$$

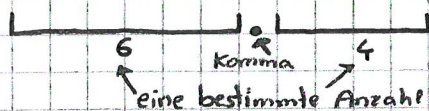
Multiplikation:

$$\begin{array}{r} 1011 \times 110 \\ \underline{1011} \\ 1000010 \end{array}$$

Division:

$$\begin{array}{r} 1011 : 110 = 11 \\ - \underline{110} \\ \quad 1010 \\ - \underline{110} \\ \quad \quad 0100 \end{array}$$

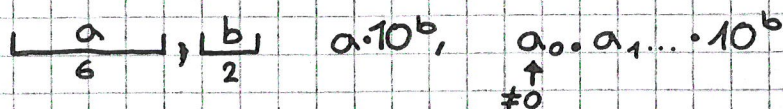
## Fixkommadarstellung:



Problem dieser Darstellung: Es können nur „wenige Zahlen“ dargestellt werden.

Sinnvoll ist sie bei: Geldbeträgen, Zeitmessung im Sport

## Gleitkommadarstellung:



Es sind „viele Zahlen“ darstellbar:



6 Stellen + 2 Stellen Exponent

größte positive Zahl:  $9.999\,99 \cdot 10^{99}$   
kleinste positive Zahl:  $1.000\,00 \cdot 10^{-9}$

Problem dieser Darstellung: Zu große Zahlen führen zur Fehlermeldung,  
zu kleine Zahlen zu 0.

## Beispiel:

Es wird auf 3 Stellen gerundet.  $a = 13,4$ ;  $b = 2,66$ ;  $c = 0,384$

$$\begin{array}{l} (a+b)+c: \quad a+b = 16,1, \quad (a+b)+c = 16,5 \\ a+(b+c): \quad b+c = 3,04, \quad a+(b+c) = 16,4 \end{array} \quad \neq$$

Das Assoziativgesetz für die Addition gilt am Computer nicht!

## Beispiel:

Es wird auf 6 Stellen gerundet.

$$386,493 - 386,421 = 0,072\,0000$$

Phänomen der „Auslöschung“ = Der Computer täuscht eine Genauigkeit vor,  
die eigentlich nicht da ist.

→ sollte vermieden werden, d.h. wenn dann  
am Ende der Rechnung!

## Beispiel:

Es wird auf 6 Stellen gerundet.  $f(x) := \sqrt{x^2 + 4x + 7} - x$

$$\begin{array}{l} f(10^6): \quad 10^{12} + 4 \cdot 10^6 + 7 \approx 10^{12} \\ \quad \sqrt{\dots} \approx 10^6 \\ \Rightarrow f(10^6) \approx 10^6 - 10^6 = 0 \end{array}$$

Was können wir dagegen tun?

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+4x+7}-x)(\sqrt{x^2+4x+7}+x)}{\sqrt{x^2+4x+7}+x} = \frac{(x^2+4x+7)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+7}+x} = \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+4x+7}+x}$$

$$f(10^6) \approx \frac{4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} \approx 2$$

$$\begin{aligned} &\approx \sqrt{x^2+4x+7}+x = \\ &= (x+2)+x = 2x+2 \approx 2x \end{aligned}$$

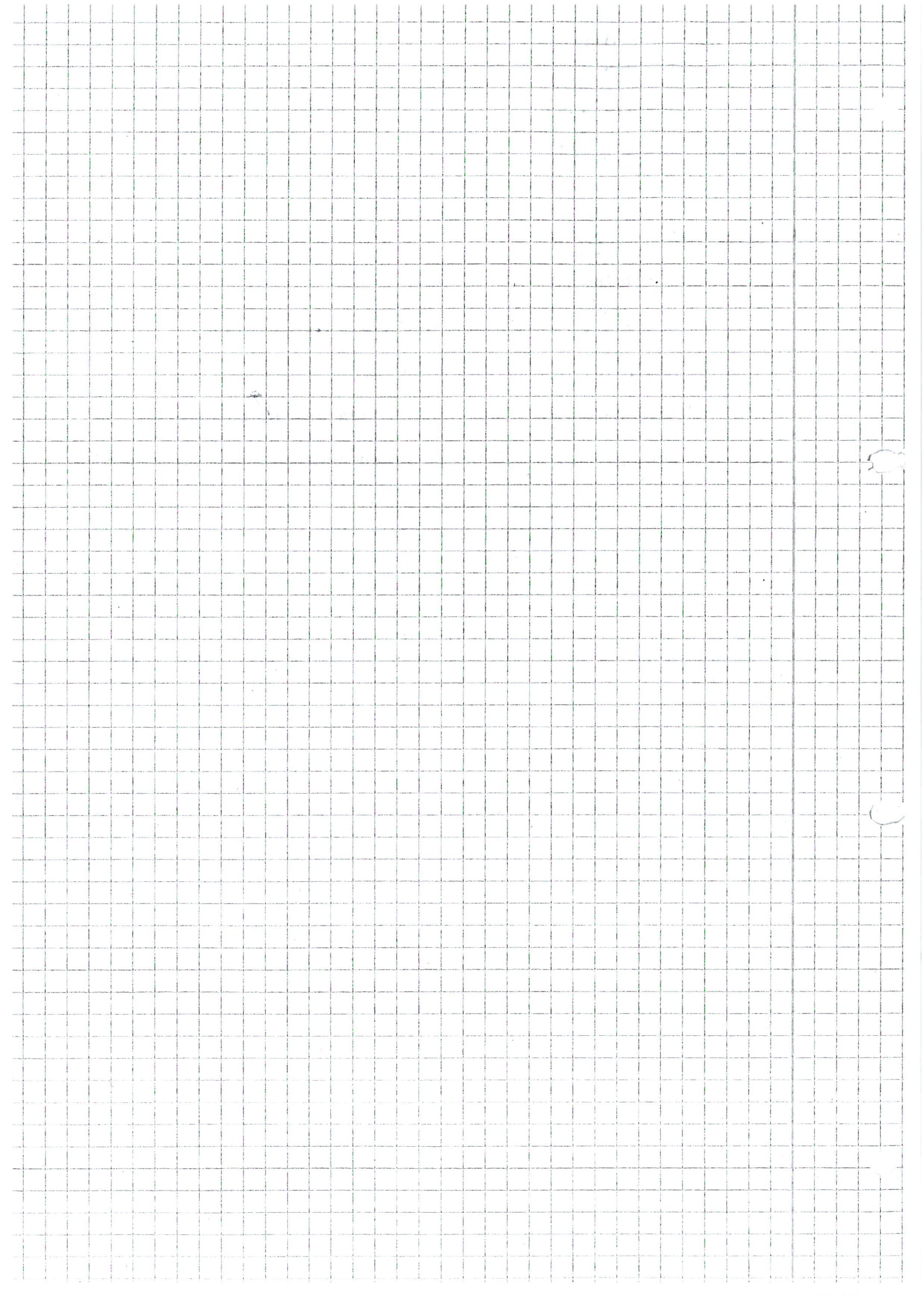
Beispiel Reihe:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Es wird auf 2 Stellen gerundet.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...	20	21
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	1,0	1,5	1,8	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7		3,9	3,9

Abbruchbedingung: wenn 2 aufeinander folgende Werte gleich sind

Der Computer sagt also:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 3,9$ , obwohl wir wissen, dass die Reihe divergiert.



## 2, Lineare Gleichungssysteme

... am Besten mit Gauß lösen

Beispiel Marssonde:

4 Stellen

$$\begin{aligned} 3,814 \cdot 10^{-4} x_1 + 0,7128 x_2 &= 8,586 \\ 0,1872 x_1 + 0,1626 x_2 &= 9,612 \end{aligned} \quad \left( \text{„exakte“ Lösung} \approx \begin{pmatrix} 40,9126 \\ 12,0236 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{array}{cc|c} 3,814 \cdot 10^{-4} & 0,7128 & 8,586 \\ 0,1875 & 0,1626 & 9,612 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 3,814 \cdot 10^{-4} & 0,7128 & 8,586 \\ 0 & 349,8 & 4214 \end{array}$$

$-\frac{0,1875}{3,814 \cdot 10^{-4}} \cdot 1. \text{Zeile}$

Die Lösung weicht stark vom exakten Ergebnis ab, wegen hohen Zwischenergebnissen.

Vermeiden kann man das durch Pivotsuche: Betragsgrößtes Element der Koeffizientenmatrix nach „links oben“ bringen.

$$\begin{array}{cc|c} 3,814 \cdot 10^{-4} & \boxed{0,7128} & 8,586 \\ 0,1875 & 0,1626 & 9,612 \end{array}$$

$x_1 \quad x_2$

$$\begin{array}{cc|c} 0,7128 & 3,814 \cdot 10^{-4} & 8,586 \\ 0,1626 & 0,1875 & 9,612 \end{array}$$

$x_2 \quad x_1$

$$\text{Faktor: } \frac{0,1626}{0,7128} = 0,2281$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|c} 0,1871 & 7,654 \\ \hline x_1 & \end{array}$$

$$x_1 = \frac{7,654}{0,1871} = 40,91$$

$$x_2 = \frac{8,586 - 3,814 \cdot 10^{-4} \cdot 40,91}{0,7128} = 12,02$$

also  $X = \begin{pmatrix} 40,91 \\ 12,02 \end{pmatrix}$  ist nahe an der exakten Lösung

|| Keine Pivotsuche ist notwendig bei diagonaldominanten Matrizen und positiv definiten Matrizen.

## 3) Überbestimmte Gleichungssysteme

Marssonde: 3. Gleichung:  $0,1392 x_1 + 0,3485 x_2 = 9,891$

„beste Lösung“:  $\|Ax - b\|$  soll minimal werden,  $A^t Ax = A^t b$

$$A = \begin{pmatrix} 3,814 \cdot 10^{-4} & 0,7128 \\ 0,1872 & 0,1626 \\ 0,1392 & 0,3485 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8,586 \\ 9,612 \\ 9,891 \end{pmatrix}$$

$$A^e A = \begin{pmatrix} 5,442 \cdot 10^{-2} & 7,922 \cdot 10^{-2} \\ 7,922 \cdot 10^{-2} & 0,6560 \end{pmatrix}, \quad A^e b = \begin{pmatrix} 3,179 \\ 11,13 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 40,92 \\ 12,02 \end{pmatrix}$$

↗ positiv definit, daher keine Pivotsuche notwendig

$Ax = b$ , die eindeutige Lösung bestimmen:

1. Lösen mit Gauß:  $Ax = b$  ⊕ schneller

2. Bestimme „beste Lösung“:  $A^e Ax = A^e b$  ⊕ numerisch stabiler weil Matrix positiv definit ist

## 4.) Lineare Algebra

• Vektorraum (über einem Körper  $K$ , normalerweise  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ).

$$V \neq \emptyset \quad v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$$

$$\lambda \in K, v \in V \Rightarrow \lambda v \in V$$

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

$$\exists 0: 0 + v = v$$

$$\forall v \exists -v: (-v) + v = 0$$

$$\lambda_1 (\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$$

$$\lambda (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$1 \cdot v = v$$

Folgerungen:  $0 \cdot v = 0, \lambda \cdot 0 = 0$

Beispiele: •  $\mathbb{R}^n$  (klassische Vektoren)  
• Funktionen (Matrizen)

•  $M$  heißt Teilraum ( $M \neq \emptyset$ ), falls  $\forall v_1, v_2 \in M, \lambda \in K: \lambda v_1 + v_2 \in M$ .

•  $M \subseteq V, [M] := \left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j}_{\text{Linearkombination}} : \lambda_j \in K, v_j \in M \right\}$  heißt Erzeugnis von  $M$   
↗ Teilmenge

•  $\{v_1, \dots, v_n\}$  heißt linear unabhängig (l.u.), falls  $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Beispiele: •  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  l.u., weil  $0 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

•  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  l.u.

•  $\{v_1, \dots, v_n\}$  heißt Basis, falls  $\{v_1, \dots, v_n\}$  l.u. und  $[\{v_1, \dots, v_n\}] = V$ .

• Dimension: Wir sagen  $\dim V = n$  ( $\dim_K V$ ), falls es eine Basis mit  $n$  Elementen gibt.

Satz:  $V$  Vektorraum,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  l.u.,  $M \subseteq V$  und  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq [M]$ .

Dann gibt es  $n$  verschiedene Vektoren  $\omega_1, \dots, \omega_n \in M \setminus \{0\}$ , sodass

$$[(M \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_n\}) \cup \{v_1, \dots, v_n\}] = [M].$$

## Beweis:

### • 1. Schritt: (einfacher Austauschsatz)

$$v \in V, v \neq 0, v \in M, v = \lambda \omega + \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_n \omega_n, \text{ wobei } \lambda \neq 0.$$

$$\text{Dann ist } [(M \setminus \{\omega\}) \cup \{v\}] = [M].$$

### Beweis der Behauptung:

$$[(M \setminus \{\omega\}) \cup \{v\}] = [M] \Rightarrow [(M \setminus \{\omega\}) \cup \{v\}] \subseteq [M]$$

$$\text{Sei } u \in [M] \Rightarrow u = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$$

$$1. \text{ Fall: } \omega \notin \{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow u \in [(M \setminus \{\omega\}) \cup \{v\}]$$

$$2. \text{ Fall: } \omega \in \{u_1, \dots, u_k\} \text{ O.B.d.A. } \omega = u_1$$

$$u = \mu_1 \omega + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_k u_k = \frac{\mu_1}{\lambda} v - \frac{\mu_1 \lambda_1}{\lambda} \omega_1 - \dots - \frac{\mu_1 \lambda_n}{\lambda} \omega_n + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_k u_k$$
$$= \frac{1}{\lambda} v - \frac{\lambda_1}{\lambda} \omega_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \omega_n + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_k u_k$$

$\in M \setminus \{\omega\} \quad \in [(M \setminus \{\omega\}) \cup \{v\}]$

### • 2. Schritt: Induktion nach n:

$$n=1: v_1 = \sum_{j=1}^k \lambda_j \omega_j \text{ O.B.d.A. } \lambda_1 \neq 0$$

$$\stackrel{1. \text{ Schritt}}{\Rightarrow} \exists \omega_1 \in M \setminus \{0\}, \text{ sodass } [(M \setminus \{\omega_1\}) \cup \{v_1\}] = [M].$$

$$\text{Sei } n > 1: \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \text{ l.u.} \stackrel{i.V.}{\Rightarrow} \exists \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \text{ sodass}$$

$$[(M \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}) \cup \{v_1, \dots, v_{n-1}\}] = [M]$$

$\tilde{M}$

$$v_n \in [M] = [\tilde{M}] \Rightarrow v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$$

$\in M \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$

Behauptung:  $\exists j: \mu_j \neq 0$  und  $u_j \neq 0$

### Beweis der Behauptung:

$$\text{Angenommen } \forall j: \mu_j = 0 \text{ oder } u_j = 0. \Rightarrow \mu_j u_j = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_n$$

Widerspruch zu  $\{v_1, \dots, v_n\}$  l.u.  $\square$

$$\text{Setze } \omega_u := u_j \stackrel{1. \text{ Schritt}}{\Rightarrow} [(M \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_n\}) \cup \{v_1, \dots, v_n\}] = [M]. \quad \square$$

|| Korollar: M Teilraum eines Vektorraums V der dim n.

$$\dim M = n \Rightarrow M = V$$

### Beweis:

$\exists$  Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ ,

$\exists$  Basis  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  von  $M$ .

$\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq [\{v_1, \dots, v_n\}] = V$  l.u.

$\Rightarrow V = [\{v_1, \dots, v_n\}] = [\{\omega_1, \dots, \omega_n\}] = M \quad \square$

•  $\varphi: V \rightarrow W$  heißt linear, falls  $\varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda \varphi(v_2)$ .

im endlichdimensionalen:  $\varphi(v) = A \overset{\leftarrow \text{Matrix}}{v}$

•  $\ker \varphi := \{v: \varphi(v) = 0\}$  Teilraum von  $V$  ... Kern von  $\varphi$

•  $\text{im } \varphi := \varphi(V) = \{\omega: \exists v \in V: \omega = \varphi(v)\}$  Teilraum von  $W$  ... Bild von  $\varphi$

|| Satz:  $V$  endlichdimensional,  $\varphi: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt  
 $\dim \{v: \varphi(v) = 0\} + \dim \varphi(V) = \dim V$ .

### Beweis:

$\dim \{v: \varphi(v) = 0\} = s \Rightarrow \exists$  Basis  $\{v_1, \dots, v_s\}$  von  $\{v: \varphi(v) = 0\}$

$\Rightarrow \exists$  Basis von  $V$   $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ .

Wir zeigen, dass  $\{\varphi(v_{s+1}), \dots, \varphi(v_n)\}$  eine Basis von  $\varphi(V)$  ist.

Sei  $\omega \in \varphi(V) \Rightarrow \exists v \in V$  mit  $\omega = \varphi(v)$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow \omega = \varphi(v) = \lambda_1 \underbrace{\varphi(v_1)}_{=0} + \dots + \lambda_s \underbrace{\varphi(v_s)}_{=0} + \lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) =$

$= \lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) \Rightarrow [\{\varphi(v_{s+1}), \dots, \varphi(v_n)\}] = \varphi(V)$

Seien  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$  so dass  $0 = \lambda_{s+1} \varphi(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) = \varphi(\lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_n v_n)$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s$  mit  $\lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$

$\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s - \lambda_{s+1} v_{s+1} - \dots - \lambda_n v_n$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , also  $\{\varphi(v_{s+1}), \dots, \varphi(v_n)\}$  ist Basis von  $\varphi(V)$ .

$\dim \varphi(V) = n - s = \dim V - \dim \{v: \varphi(v) = 0\} \quad \square$



27.3.

Def: Für eine Matrix  $A$  heißt die Maximalanzahl l.u. Spaltenvektoren der Rang von  $A$ , kurz  $\text{rg } A$ .

Analog: Zeilenrang und es gilt Spaltenrang = Zeilenrang

$$\dim \{Ax: x \in \mathbb{R}^n\} = \text{rg } A$$

$$Ax=b, \text{ erweiterte Matrix } A' = (A, b)$$

Satz:  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann gelten:

(1) Die Gleichung  $Ax=b$  hat genau dann eine Lösung, wenn  $\text{rg } A = \text{rg } A'$ .

(2) Falls  $x_s$  eine Lösung von  $Ax=b$ , dann ist  $x$  genau dann eine Lösung von  $Ax=b$ , wenn es eine Lösung  $y$  von  $Ax=0$  gibt, sodass  $x = x_s + y$ .

(3) Falls es Lösungen gibt, dann ist die Dimension des Lösungsraums gleich  $n - \text{rg } A$ .

Beweis:

$$(1) \Rightarrow: \exists x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } Ax=b \Rightarrow b = \sum_{j=1}^n x_j a_j \Rightarrow \text{rg } A' = \text{rg } A = (a_1 \dots a_n)$$

$$\Leftarrow: \text{rg } A' = \text{rg } A \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n, \text{ sodass } b = \sum_{j=1}^n x_j a_j. \text{ Setze } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax=b.$$

$$(2) \Leftarrow: Ax = Ax_s + Ay = b. \text{ (} y \text{ ist Lösung vom homogenen System!)} \\ = x_s + y = b \quad = 0$$

$$\Rightarrow: \text{Setze } y := x - x_s \Rightarrow x = x_s + y \text{ und } Ay = Ax - Ax_s = 0. \\ = x - x_s = b \quad = b$$

(3) Dimension des Lösungsraums ist  $\dim \{y: Ay=0\}$

$$n = \dim \{y: Ay=0\} + \underbrace{\dim \{Ax: x \in \mathbb{R}^n\}}_{\text{rg } A} \quad \square$$

man muss es nur noch umformen:  $\dim = n - \text{rg } A$

$V$  Vektorraum,  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm, falls:

(1)  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

(2)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$

(3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda, \forall x \in V$

(4)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$  (Dreiecksungleichung)

linker Teil der Dreiecksungleichung:  $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Es ist dann  $d(x,y) = \|x-y\|$  eine Metrik.  
Abstand kann Abstände messen

Beispiel:

$$\|x\|_2 = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f|^2} \quad \text{Zweinorm}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad \text{Unendlichnorm}$$

Man kann mit Norm Längen messen. Um Winkel messen zu können, brauchen wir das innere Produkt.

Inneres Produkt:  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\rightarrow \mathbb{C}$

(1)  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$

(2)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

(3)  $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$  Linear im 1. Komponenten

(4)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$   
 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  konjugiert

$\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$  Bei Komplexen: Problem mit Linearität der 2. Komponente.

Man erhält durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm.

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Beweis:

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle$$

Setze  $\lambda := \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ :

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \square$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{= \langle x, y \rangle}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}_{\leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

### Beispiele für wichtige innere Produkte:

$$\bullet \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j = y^T x$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j} = y^* x$$

$$\bullet \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\bullet \star \langle x, y \rangle := \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad \text{Winkel messen}$$

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$$

### Orthogonalprojektion von $x$ auf Teilraum $M$ :

$$\pi: V \rightarrow M \quad (\text{linear})$$

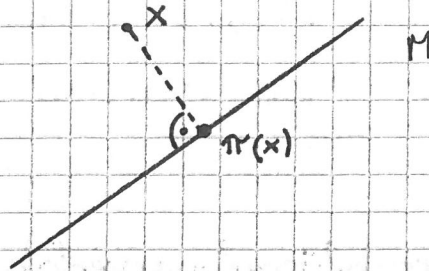
$$\pi(y) = y \quad \forall y \in M$$

$$\langle x - \pi(x), y \rangle = 0 \quad \forall x \in V, \forall y \in M$$

Orthonormalbasis  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ .

$$\langle v_j, v_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k$$

$$\|v_j\| = 1 \quad \forall j$$



## 5) Grundlagen aus Algebra und Zahlentheorie

Wenn wir  $\text{mod } n: \mathbb{Z}_n$   
modulo n

$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n: \overset{\text{ggT}}{\text{gcd}}(k, n) = 1\}$  prime Restklasse bildet bezüglich  $\times$

Abel'sche Gruppe:  $(ab)c = a(bc)$   
 $ab = ba$

$$\exists 1: 1a = a \quad \forall a$$

$$\forall a \exists a^{-1} \text{ mit } a^{-1}a = 1.$$

### Euler'sche Funktion:

$\varphi: \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\varphi(n) := \overset{\text{Kardinalität}}{\text{card}}(\mathbb{Z}_n^*)$ .

$$\text{gcd}(n, m) = 1 \Rightarrow \varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \varphi(m)$$

$$\varphi(p) = p-1, \text{ falls } p \in \mathbb{P} \quad \text{Primzahl}$$

$$\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$$

Def:  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$  heißt Primitivwurzel, falls  $\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_n^*$

Satz:  $\mathbb{Z}_n^*$  hat eine Primitivwurzel, genau dann, wenn  $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha, p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \alpha \in \mathbb{N}\}$

Satz: Kleiner Fermat:

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n^* : x^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$$

Beweis:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a_1, \dots, a_{\varphi(n)}\} = \{x a_1, \dots, x a_{\varphi(n)}\}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)} = (x a_1)(x a_2) \cdot \dots \cdot (x a_{\varphi(n)}) = x^{\varphi(n)} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)}$$

$$\Rightarrow 1 = x^{\varphi(n)}$$

## 6) Verschlüsselungsverfahren

RSA-Verfahren:

$p \neq q$  Primzahlen,  $n = p \cdot q$

$$\varphi(n) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = (p-1)(q-1)$$

$$c \in \mathbb{Z}_n^*, d \in \mathbb{Z}_n^* : c \cdot d = 1 \pmod{\varphi(n)}$$

öffentliche Schlüssel:  $(n, c)$   
Modulo-Schlüssel

geheime Schlüssel:  $d$

Nachricht  $x$  soll verschlüsselt werden:  $y := x^c \pmod{n}$

Es wird  $y$  verschickt.

$$\text{Wir wollen das entschlüsseln: } y^d = (x^c)^d = x^{c \cdot d} = x^{1+s \cdot \varphi(n)} = x \underbrace{(x^{\varphi(n)})^s}_{=1} = x \pmod{n}$$

← kleiner Fermat

Beispiel:

$$p=11, q=5$$

$$n=55, \varphi(n)=40$$

$$c=7, d=23$$

öffentlicher Schlüssel:  $(55, 7)$

wollen  $x=9$  versenden:  $9^7 \pmod{55}$

$$9^2 = 81 \equiv 26, 9^4 = (9^2)^2 = 26^2 = 676 \equiv 16, 9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9 \equiv 279 \equiv 4 \pmod{55}$$

verschicken  $y=4$

Durch  $4^{23} = 9$

$$\begin{array}{c} \underbrace{16 \cdot 26}_{416} \equiv 31 \end{array}$$

## El Gamal-Verfahren:

$n \in \mathbb{P}$ ,  $\alpha$  Primitivwurzel von  $\mathbb{Z}_n^*$

$a \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ , setze  $\beta := \alpha^a \pmod{n}$

öffentlicher Schlüssel:  $(n, \alpha, \beta)$

privater (geheimer) Schlüssel:  $a$  ( $-a = n-1-a$ )

Wir wollen  $x$  verschlüsseln: Es wird zufällig  $k \in \{2, 3, \dots, n-2\}$  gewählt

Versendet:  $(\alpha^k, x\beta^k)$

Wir entschlüsseln das durch:  $(x\beta^k)(\alpha^k)^{-a} = x\beta^k \cdot \frac{1}{(\alpha^a)^k} = x$   
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{=\beta}$

### Beispiel:

$n=29$ ,  $\alpha=3$ ,  $a=11$  <sup>Primitivwurzel</sup>  $\Rightarrow \beta=15 \pmod{29}$

öffentlicher Schlüssel  $(29, 3, 15)$ , privater Schlüssel:  $11$  ( $-11=17$ )

Wir wollen  $x=9$  verschlüsseln, es wurde zufällig  $k=5$  gewählt.

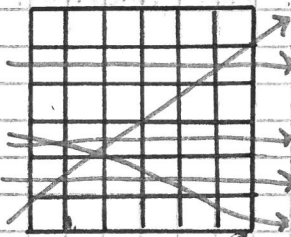
$$\alpha^k = 3^5 = 11 \pmod{29}$$

$$\beta^k = 15^5 = 10$$

$$x\beta^k = 90 = 3 \pmod{29} \text{ es wird } (11, 3)$$

$$\text{Wir erhalten } 3 \cdot 11^{17} = 9.$$

### Beispiel Computertomographie:



oder auch Überprüfung von „Bausubstanzen“

→ Anwendung von linearen Gleichungssystemen

# II. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

## 1) Allgemeines

Wellengleichung:

$$u(x,t): \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Lösungen:  $u(x,t) = x^2 + ct^2$  untypisch

$u(x,t) = \sin x \cdot \cos(ct)$  typisch

... = partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

Wärmeleitungsgleichung:

$$u(x,t): \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

... = partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

Lösung:  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}$

Luftdruck:

  $p(a)$

$p'(a) = -a p(h), a > 0 \rightarrow p(h) = c \cdot e^{-ah}$

## 2) Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{x} = Ax + f \quad (\text{inhomogen, falls } f=0 \text{ homogen})$$

homogen: Eigenwerte von  $A$  (mit Vielfachheit)

$a, b \in \mathbb{R}$ : Falls  $a$  eine  $k$ -fache Nullstelle ( $k \geq 1$ ):

Es tritt:  $t^{k-1} e^{at} v_{k-1} + \dots + t e^{at} v_1 + e^{at} v_0$  in der homogenen Lösung auf.

Falls  $a \pm bi$  ( $b > 0, a \pm bi$ ) eine  $k$ -fache Nullstelle:

Es tritt  $t^{k-1} e^{at} \cos bt v_{k-1} + \dots + e^{at} \cos bt v_0 + t^{k-1} e^{at} \sin bt w_{k-1} + \dots + e^{at} \sin bt w_0$  in der homogenen Lösung auf.

Beispiel:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 & -12 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nach 1. Spalte entwickelt, Laplace'scher Entwicklungssatz

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 7-x & -3 & -4 & -12 \\ 1 & 5-x & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5-x & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (7-x) \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & -2 \\ 0 & 5-x & 6 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -12 \\ 0 & 5-x & 6 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -12 \\ 5-x & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= x^4 - 18x^3 + 121x^2 - 372x + 468$$

Nullstellen mittels Horner-Schema:

	1	-18	121	-372	468
1					
-1					
⋮					
Ⓞ	1	-12	49	-78	0
6	1	-6	13	0	

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$$

Lösung:  $x(t) = t e^{6t} v_1 + e^{6t} v_2 + e^{3t} \cos 2t v_3 + e^{3t} \sin 2t v_4$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = x(0) = v_2 + v_3 \quad \text{4 Variablen, 4 Gleichungen um } v \text{ zu lösen}$$

-  $\dot{x}(t) = 6t e^{6t} v_1 + e^{6t} (v_1 + 6v_2) + e^{3t} \cos 2t (3v_3 + 2v_4) + e^{3t} \sin 2t (-2v_3 + 3v_4)$   
 $\dot{x}(0) = v_1 + 6v_2 + 3v_3 + 2v_4$   
 $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) \rightarrow \dot{x}(0) = A \cdot x(0) = \begin{pmatrix} 55 \\ 9 \\ -31 \\ 14 \end{pmatrix}$

- analog  $\ddot{x}$  und  $\ddot{x}(0) = 12v_1 + 36v_2 + 5v_3 + 12v_4$  (?)  
 $\ddot{x}(t) = A \dot{x}(t) \rightarrow \ddot{x}(0) = A \cdot \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 296 \\ 72 \\ -126 \\ 58 \end{pmatrix}$

könnte  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dann nur ablesen  
 oder  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dann ausrechnen

- analog für  $x^{(3)}$ :  $108v_1 + 216v_2 - 9v_3 + 46v_4 = \begin{pmatrix} 1520 \\ 540 \\ -578 \\ 166 \end{pmatrix}$

Simultanes Lösen:

0	1	1	0	8	1	-7	2	Gauß Verfahren ↪	1	0	0	0	9	3	-3	0
1	6	3	2	55	9	-31	14		0	1	0	0	4	1	-1	0
12	36	5	12	296	72	-126	58		0	0	1	0	4	0	-6	2
108	216	-9	46	1520	540	-578	166		0	0	0	1	8	0	-2	4

Somit  $x(t) = t e^{6t} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t} \cos 2t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{3t} \sin 2t \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

- inhomogen:  $f(t) = p(t) e^{at}$   
 Pol. Grad  $\leq r$
- \*  $a$  ist  $k$ -fache Nullstelle ( $k \in \mathbb{N}_0$ ): Ansatz  $x(t) = q(t) e^{at}$
- \*  $f(t) = e^{at} \cos bt p_1(t) + e^{at} \sin bt p_2(t)$  -  $p_1, p_2$  Grad  $\leq r$   
 Pol. Grad  $\leq r+k$
- $a \pm bi$  ist  $k$ -fache Nullstelle ( $k \in \mathbb{N}_0$ ): Ansatz  $x(t) = e^{at} \cos bt q_1(t) + e^{at} \sin bt q_2(t)$   
 Pol. Grad  $\leq r$

24.4.

Beispiel: Chemische Reaktion  $A \rightleftharpoons B$  $x_1(t)$  ... Menge von A zur Zeit  $t$  $x_2(t)$  ... Menge von B zur Zeit  $t$  $\xi_1$  ... Menge von A zur Zeit 0 $\xi_2$  ... Menge von B zur Zeit 0

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} -\alpha_1 - x & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - x \end{pmatrix} = x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 = x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x$$

Nullstellen:  $0, -(\alpha_1 + \alpha_2)$ 

$$\text{Eigenvektor zu } 0: \begin{array}{cc|c} -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{zu } -(\alpha_1 + \alpha_2): \begin{array}{cc|c} \alpha_2 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} \alpha_2 & 1 & \xi_1 \\ \alpha_1 & -1 & \xi_2 \end{array} \xrightarrow{+II} \begin{array}{cc|c} \alpha_2 & 1 & \xi_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & 0 & \xi_1 + \xi_2 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad c_2 = \alpha_2 \frac{\xi_1 + \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + c_2 = \xi_1 \Rightarrow c_2 = \frac{\xi_1 \alpha_1 + \xi_1 \alpha_2 - \xi_1 \alpha_2 - \xi_2 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\text{Somit } x(t) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Teil: } (\xi_1 + \xi_2) \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{pmatrix} \dots \text{Gleichgewichtszustand}$$

man sieht: man kann  $\xi_1$  und  $\xi_2$  vertauschen, ist also egal, von welchem Stoff wie viel vorhanden ist am Anfang, nur insgesamt Menge wichtig

$$\text{2. Teil: } \frac{\alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

d.h. der 2. Teil gibt an, wie schnell der Gleichgewichtszustand eintritt, nämlich geometrisch schnell (exponentiell)



## Verhalten „nach langer Zeit“:

$$\dot{x} = Ax$$

Lösungen:  $e^{at} p(t)$ , bzw.  $e^{at} \cos bt p_1(t)$   
 $e^{at} \sin bt p_2(t)$

Was passiert bei  $t \rightarrow +\infty$ ?

Entscheidender Anteil  $e^{at}$ , also  $\text{Re } \lambda$ , wobei  $\lambda$  Nullstelle.  
Realteil von  $\lambda$

$$\text{Re } \lambda (=a) < 0: \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = 0$$
$$\limsup_{t \rightarrow -\infty} e^{at} = +\infty$$

$$\text{Re } \lambda (=a) > 0: \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = +\infty$$
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{at} = 0$$

**Satz:** Sei  $A$  eine reelle  $r \times r$ -Matrix. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  die Eigenwerte von  $A$  (mit Vielfachheit gezählt, also öfters aufgeschrieben, wenn mehrfache Nullstelle) bei denen der Realteil  $< 0$  ist,  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+u}$  die Eigenwerte von  $A$  (mit Vielfachheit gezählt), bei denen der Realteil  $> 0$  ist.

Dann gibt es Teilräume  $E_s$  und  $E_u$  von  $\mathbb{R}^r$ , sodass:

(1) Falls  $x_0 \in E_s \setminus \{0\}$ , dann gilt für  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ ,  
stabile - stabiler Raum  
dass  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  und  $\limsup_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = +\infty$ .

(2) Falls  $x_0 \in E_u \setminus \{0\}$ , dann gilt für  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ ,  
unstable - instabiler Raum  
dass  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ .

Weiters ist  $\dim E_s = s$  und  $\dim E_u = u$ .

\* Im Fall  $r=2$ :  $\text{Re } \lambda = 0$



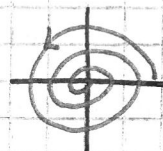
\* Angenommen alle Eigenwerte haben  $\text{Re} \neq 0$ .

1. Fall:  $\text{Re } \lambda_1 < 0, \text{Re } \lambda_2 < 0$

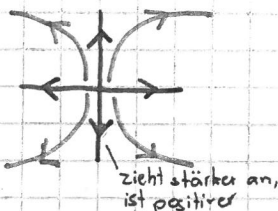


0 stabiler Fixpunkt,  
ATTRAKTOR

im komplexen:



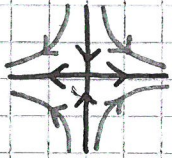
2. Fall:  $\text{Re } \lambda_1 > 0, \text{Re } \lambda_2 > 0$



instabiler Fixpunkt,  
REPELLOR



3. Fall:  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$



↓ zieht an, kommt näher an Nullpunkt, → wirkt

Sattelpunkt

$E_s$  ... stabiler Raum,  $E_u$  ... instabiler Raum

## Eindimensionale lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

höherer Ordnung:  $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f$

charakteristisches Polynom:  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

Falls  $\alpha$  eine  $k$ -fache Nullstelle:  $(c_0 + c_1t + \dots + c_{k-1}t^{k-1})e^{\alpha t}$

Falls  $\alpha + bi$  eine  $k$ -fache Nullstelle:  $(c_0 + c_1t + \dots + c_{k-1}t^{k-1})e^{\alpha t} \cos bt +$   
 $+ (d_0 + d_1t + \dots + d_{k-1}t^{k-1})e^{\alpha t} \sin bt$

Ansatz für inhomogenes System: wie besprochen, wobei man durch „Weglassen der homogenen Lösung“ den Ansatz vereinfachen kann

z.B.:

7 eine 3-fache Nullstelle

$f = t^2 e^{7t}$  7 ist auch 3-fache Nullstelle  $\rightarrow$  Grad um 3 erhöhen  $\rightarrow$  untersten 3  $\alpha$  sind frei wählbar im Eindimensional

Ansatz für spezielle Lösung:  $x(t) = (\alpha_5 t^5 + \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{7t}$

Vereinfachen:  $x(t) = (\alpha_5 t^5 + \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3) e^{7t}$

Beispiel: Richtig?

$$\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 28te^{-4t}$$

charakteristisches Polynom:  $p(x) = x^2 + x - 12$

$$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = -4, 3$$

$$x_{\text{hom}} = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$$

inhomogen:  $-4$  ist 1-fache Nullstelle  $\rightarrow$  Grad von 1 auf 2 erhöhen

$$x(t) = (\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t) e^{-4t}$$

	$t^2 e^{-ft}$	$t e^{-ft}$	$e^{-ft}$
$x$	$d_2$	$d_1$	$0$
$\dot{x}$	$-4d_2$	$2d_2 - 4d_1$	$d_1$
$\ddot{x}$	$16d_2$	$-16d_2 + 16d_1$	$2d_2 - 8d_1$
$\ddot{x} + \dot{x} - 12x$	$0$	$-14d_2$	$2d_2 - 7d_1$
	$16d_2 + (-4d_2) - 12 \cdot d_2$		
$28t e^{-ft}$	$0$	$28$	$0$

$$\Rightarrow d_2 = -1, d_1 = -\frac{4}{7}$$

$$x(t) = \left(-2t^2 - \frac{4}{7}t\right) e^{-ft} + c_1 e^{-ft} + c_2 e^{3t}$$

Beispiel:

$$\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 108t^2 e^{2t} \quad (\text{Nullstellen siehe voriges Beispiel})$$

$$\text{Ansatz: } x(t) = (d_2 t^2 + d_1 t + d_0) e^{2t} \quad \begin{array}{l} \text{Grad wird nicht erh\u00f6ht, weil} \\ 2 \text{ keine Nullstelle ist} \end{array}$$

$$x(t) = (-18t^2 - 30t - 31) e^{2t} + c_1 e^{-ft} + c_2 e^{3t}$$

Beispiel:

$$\ddot{x} + \dot{x} - 12x = 30e^{2t} \sin 3t$$

$$(x_{\text{hom}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-ft}) \quad 2+3i \text{ keine Nullstelle} \Rightarrow \text{nicht erh\u00f6hen}$$

$$x = \alpha e^{2t} \cos 3t + \beta e^{2t} \sin 3t$$

	$e^{2t} \cos 3t$	$e^{2t} \sin 3t$
$x$	$\alpha$	$\beta$
$\dot{x}$	$2\alpha + 3\beta$	$-3\alpha + 2\beta$
$\ddot{x}$	$-5\alpha + 12\beta$	$-12\alpha - 5\beta$
$\ddot{x} + \dot{x} - 12x$	$-15\alpha + 15\beta$	$-15\alpha - 15\beta$
$f$	$0$	$30$

$$-15\alpha + 15\beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = -1$$

$$-15\alpha - 15\beta = 30$$

$$x(t) = -e^{2t} \cos 3t - e^{2t} \sin 3t + c_1 e^{3t} + c_2 e^{-ft}$$

### 3.) Der Existenz- und Eindeigkeitssatz

Falls  $f$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$

$\Rightarrow \exists$  lokal eine eindeutig bestimmte Lösung von  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Weiters  $|x(t) - x_0| \leq M |t - t_0|$ .

Proposition:  $f: \bar{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^r$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Dann ist  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$ .

Beweis: (indirekt)

1. Schritt:

Behauptung: Angenommen  $\exists x \neq y, t$  mit  $|f(x, t) - f(y, t)| \geq L |x - y|$ .

Dann  $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon, y_\epsilon$  mit  $|x_\epsilon - y_\epsilon| < \epsilon$  und  $|f(x_\epsilon, t) - f(y_\epsilon, t)| \geq L |x_\epsilon - y_\epsilon|$ .

Beweis der Behauptung: Definiere  $A := \{u \in (0, 1) : |f(x, t) - f(x + u(y-x), t)| \geq$

$\geq u L |y-x|\}$ .  $A \neq \emptyset$  ( $1 \in A$ ),  $A$  ist nach unten beschränkt  
 $\Rightarrow \exists$  Infimum

Setze  $t_0 := \inf A$ .

• 1. Fall:  $t_0 = 0$ .  $\exists u \in A$  mit  $u < \frac{\epsilon}{|y-x|}$

Setze  $x_\epsilon := x$ ,  $y_\epsilon := x + u(y-x)$ .  $|x_\epsilon - y_\epsilon| = u |y-x| < \epsilon$ .

$|f(x_\epsilon, t) - f(y_\epsilon, t)| \geq L |y_\epsilon - x_\epsilon|$   
 $< \frac{\epsilon}{|y-x|}$

• 2. Fall:  $t_0 > 0$ .  $\exists u \in A$  mit  $t_0 \leq u < t_0 + \frac{\epsilon}{|y-x|}$  - größer als Infimum

$\exists r > 0$  mit  $u - \frac{\epsilon}{|y-x|} < r < t_0 \Rightarrow r \in A$ .

Setze  $x_\epsilon := x + r(y-x)$ ,  $y_\epsilon := x + u(y-x)$ .

$|y_\epsilon - x_\epsilon| = |u - r| |y-x| < \epsilon$   
 $= u - r < \frac{\epsilon}{|y-x|}$

$|f(y_\epsilon, t) - f(x, t)| \geq L |y_\epsilon - x|$

$|f(x_\epsilon, t) - f(x, t)| \leq L |x_\epsilon - x|$

$|f(y_\epsilon, t) - f(x_\epsilon, t)| \geq |f(y_\epsilon, t) - f(x, t)| - |f(x, t) - f(x_\epsilon, t)| =$

$= \underbrace{|f(y_\epsilon, t) - f(x, t)|}_{\geq L |y_\epsilon - x|} - \underbrace{|f(x, t) - f(x_\epsilon, t)|}_{\leq L |x_\epsilon - x|} \geq L (|y_\epsilon - x| - |x - x_\epsilon|) =$   
 $= \underbrace{u(y-x)}_{(u-r)|y-x|} - \underbrace{-r(y-x)}_{-r(y-x)} = (u-r)|y-x|$

$= \underbrace{L(u-r)|y-x|}_{\geq L |y_\epsilon - x_\epsilon|} = L |y_\epsilon - x_\epsilon|$

◇

2. Schritt:

Angenommen  $f$  wäre nicht Lipschitz-stetig in  $x \Rightarrow \forall n \exists x_n, y_n, t_n$  mit  $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$  und  $|f(y_n, t_n) - f(x_n, t_n)| \geq n |y_n - x_n|$ .

$\overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$  ist kompakt ( $\Rightarrow$  folgenkompakt)

Also  $\exists$  Teilfolge  $(x_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow (x_0, t_0)$

$$y_{n_k} = \underbrace{x_{n_k}}_{\rightarrow x_0} + \underbrace{(y_{n_k} - x_{n_k})}_{\rightarrow 0} \rightarrow x_0$$

Da  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ ,  $\exists U, V$  offen,  $L > 0$ ,  $x_0 \in U$ ,  $t_0 \in V$ ,

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L |x - y| \quad \forall t \in V \quad \forall x, y \in U.$$

$\exists K \forall k \geq K: t_{n_k} \in V, x_{n_k}, y_{n_k} \in U$

$$\begin{aligned} \text{Wähle } k \geq K \text{ so, dass } n_k > L: \quad L |x_{n_k} - y_{n_k}| &\geq \underbrace{|f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(y_{n_k}, t_{n_k})|}_{\geq n_k |y_{n_k} - x_{n_k}|} \geq \\ &\geq \underbrace{n_k}_{> L} |y_{n_k} - x_{n_k}| \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$ . □

Proposition:  $f: B(x_0, b_0) \times (t_0 - a_0, t_0 + a_0) \rightarrow \mathbb{R}^r$  stetig differenzierbar,  $0 < b < b_0, 0 < a < a_0$ . Dann ist  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  auf  $\overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$ .

Beweis:

$$\text{Setze } L := \frac{1}{r} \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t) \right| : j \in \{1, \dots, r\}, x \in \overline{B}(x_0, b), t \in [t_0 - a, t_0 + a] \right\}.$$

Seien  $t \in [t_0 - a, t_0 + a], x, y \in \overline{B}(x_0, b)$

„x unten 0“

$$x_{(0)} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, x_{(1)} := \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, x_{(2)} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \dots, x_{(r)} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

MWS... Mittelwertsatz (können wir jetzt verwenden, weil wir im Eindimensionalen sind)

$$\begin{aligned} \text{Sei } j \in \{1, \dots, r\}: \quad &|f(x_{(j)}, t) - f(x_{(j-1)}, t)| \stackrel{\text{MWS}}{=} \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{(j-1)} + \xi_j(x_{(j)} - x_{(j-1)})) (y_j - x_j) \right| = \\ &= \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{(j-1)} + \xi_j(x_{(j)} - x_{(j-1)})) \right|}_{\leq \max \{ \dots \} = \frac{L}{r}} \underbrace{|y_j - x_j|}_{\leq |y - x|} \leq \frac{L}{r} |y - x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(y, t) - f(x, t)| &\leq \underbrace{|f(x_{(r)}, t) - f(x_{(r-1)}, t)|}_{\leq \frac{L}{r} |y - x|} + \underbrace{|f(x_{(r-1)}, t) - f(x_{(r-2)}, t)|}_{\leq \frac{L}{r} |y - x|} + \dots + \\ &+ \underbrace{|f(x_{(1)}, t) - f(x_{(0)}, t)|}_{\leq \frac{L}{r} |y - x|} \leq L |y - x|. \quad \square \end{aligned}$$

## 4.) Lösungsmethoden

### Trennung der Variable:

Die Differentialgleichung kann auf die Form  $f_1(x) \cdot \dot{x} = f_2(t)$  gebracht werden.

Stammfunktionen berechnen:  $F_1' = f_1, F_2' = f_2$    
 ! bedeutet nach x ableiten  
 ! bedeutet nach t ableiten

Lösung:  $F_1(x(t)) = F_2(t) + C$ .

### Beweis:

$$f_2(t) = (F_2(t) + C)' = (F_1(x(t)))' \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{F_1'}_{f_1}(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = f_1(x(t)) \cdot \dot{x}(t). \quad \square$$

### Beispiel:

$$\dot{x} = \frac{7t^6 \cos t^7}{4x^3}, \quad x(0) = 2.$$

f ist stetig differenzierbar  $\Rightarrow$  stetig und Lipschitz-stetig in x

Existenz- und Eindeigkeitsatz (Picard-Lindelöf)

$\Rightarrow$  lokal besitzt die Differentialgl. eine eindeutige Lösung

$$\text{Differentialgleichung: } \Leftrightarrow 4x^3 \dot{x} = 7t^6 \cos t^7.$$

$$\int 4x^3 dx = x^4, \quad \int 7t^6 \cos t^7 dt = \left( \begin{matrix} u = t^7 \\ du = 7t^6 dt \end{matrix} \right) = \int \cos u du = \sin u = \sin t^7.$$

$$\text{Lösung: } x(t)^4 = \sin t^7 + C \Rightarrow x(t) = \sqrt[4]{\sin t^7 + C}$$

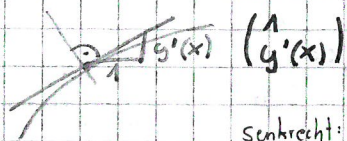
$$2 = x(0) = \sqrt[4]{C} \Rightarrow C = 2^4 = 16$$

$$\text{Somit } x(t) = \sqrt[4]{\sin t^7 + 16}$$

### Orthogonale Trajektorien:

Kurvenschar durch Differentialgleichung beschreiben (durch x und  $y', y(x)$ )

Gesucht: alle Kurven, die senkrecht auf diese Kurvenschar stehen



$$\text{Senkrecht: } \begin{pmatrix} y'(x) \\ -1 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{y'(x)} \end{pmatrix}$$

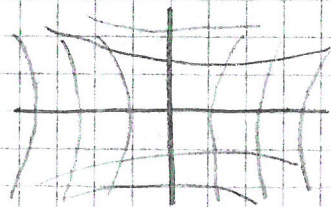
Das heißt bei den orthogonalen Trajektorien ersetzt man  $y'$  durch  $-\frac{1}{y'}$ .

### Beispiel:

Kurvenschar:  $x^2 - y^2 = C$  (Hyperbeln in 1. und 2. Hauptlage)  
innere Ableitung, weil y als Funktion von x

$$2x - 2y y' = 0 \Leftrightarrow y y' = x$$

$$\text{Orthogonale Trajektorien: } -y \frac{1}{y'} = x \Leftrightarrow x y' = -y$$

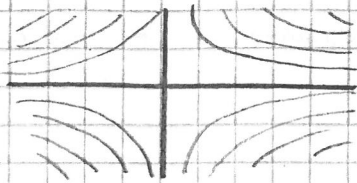


15.5.

$$\leftarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

Trennung der Variable

$$\log y = -\log x + \tilde{c} \Leftrightarrow \log(xy) = \log y + \log x = \tilde{c} \Leftrightarrow xy = e^{\tilde{c}} = c$$



wieder Hyperbeln

unsere Trajektorien

exakte Differenzialgleichung:

$$f_1(x,t)\dot{x} + f_2(x,t) = 0 \text{ heißt exakt, falls } \exists F: dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t}\right) = (f_1 f_2)$$

$$F(x(t), t) = c$$

lineare Differenzialgleichung:

$$\dot{x} = a(t)x + f(t)$$

$$\text{homogen: } \frac{\dot{x}}{x} = a(t): \log x = \int a(t) dt + \tilde{c}$$

$$x(t) = ce^{\int a(t) dt} \quad \text{die nicht lernen, besser so wie normal gemacht}$$

inhomogen: Variation der Konstante:

$$\text{Ansatz: } x(t) = c(t)e^{\dots}$$

$$c'e^{\dots} + c(t)e^{\dots} \cdot a(t) = \dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t) \quad \text{somit } c'e^{\dots} = f(t) \dots \text{ kann dann weiterrechnen}$$

Bernoulli'sche Differenzialgleichung:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha$$

$$\text{Substitution: } u(t) = x(t)^{1-\alpha} \quad (u = x^{1-\alpha})$$

Riccati'sche Differenzialgleichung:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) \quad \text{Sonderfall von Bernoulli mit } \alpha=2 \text{ und } c=0$$

Dafür gibt es keine Lösungsmethoden...

Angenommen  $x_0$  wäre eine Lösung, Dann setzt man  $y := x - x_0$ . $x_0$  erraten  $\Rightarrow$  man kommt auf Bernoulli und die kann man lösenBeispiel:

$$\dot{x} = (1-t)x^2 + (2t-1)x - t$$

$$x_0 = 1 \text{ ist eine Lösung (erraten)}$$

$$\text{Setze } y = x - 1 \text{ (also } x = y + 1)$$

$$\dot{y} = \dot{x} = (1-t)(y+1)^2 + (2t-1)(y+1) - t = (1-t)y^2 + y \quad \text{Bernoulli } \alpha=2$$

Setze  $u = y^{-1}$

$$\dot{u} = -y^{-2} \dot{y} = -(t-1) - \frac{y^{-1}}{y^2} = -u^t(t-1) \quad \text{lineare Diff. Gleichung}$$

$$\dot{u} = -u \rightarrow \left(\frac{\dot{u}}{u} = -1\right) u = ce^{-t} \quad \text{lineare mit konstanten Koeffizienten, gleich mit Ansatz oder:}$$

Variation der Konstanten:

Ansatz:  $u(t) = c(t) e^{-t}$

$$c(t) e^{-t} - c(t) e^{-t} = \dot{u} = -u + (t-1) = -c(t) e^{-t} + t-1$$

$$\rightarrow \dot{c}(t) = e^{+t} (t-1) \xrightarrow{\int} c(t) = \int_{(e^t)}^{(e^t)} (t-1) dt \stackrel{\text{partiell}}{\text{Integrieren}} = e^t (t-1) - \int e^t dt = e^t (t-2)$$

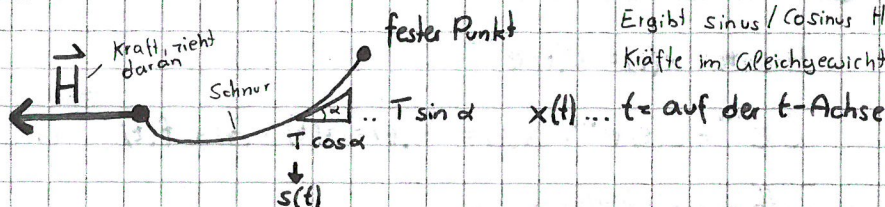
$$u_2(t) = e^t (t-2) \cdot e^{-t} = t-2$$

$$u(t) = t-2 + ce^{-t} \rightarrow y(t) = u(t)^{-1} = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{t-2+ce^{-t}}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 + \frac{1}{t-2+ce^{-t}}$$

## 5.) Klassische Beispiele

Kettenlinie:



Schwerkraft:  $\gamma s(t) = T \sin \alpha$

$(0 < \alpha) H = T \cos \alpha$

$$\dot{x} = \tan \alpha = \frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{\gamma s(t)}{H} = \frac{\gamma}{H} s(t) \stackrel{a > 0}{:=}$$

$$s(\tilde{t}) = s(t) + \sqrt{(x(\tilde{t}) - x(t))^2 + (\tilde{t} - t)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s(\tilde{t}) - s(t)}{\tilde{t} - t} = \sqrt{\frac{(x(\tilde{t}) - x(t))^2}{(\tilde{t} - t)^2} + 1}$$

$$\dot{s}(t) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow t} \frac{s(\tilde{t}) - s(t)}{\tilde{t} - t} = \sqrt{\left(\lim_{\tilde{t} \rightarrow t} \frac{x(\tilde{t}) - x(t)}{\tilde{t} - t}\right)^2 + 1} = \sqrt{\dot{x}^2 + 1}$$

$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$   
stetig

$$\Rightarrow \ddot{x} = a \dot{s} = a \sqrt{\dot{x}^2 + 1}$$

Setze  $u = \dot{x} \Rightarrow \dot{u} = \ddot{x} = a \sqrt{\dot{x}^2 + 1} = a \sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \dot{u} = a$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \text{arc sinh } u, \quad \int a dt = at$$

$$\text{arc sinh } u = at + c \iff u(t) = \text{sinh}(at + c)$$

$$x(t) = \frac{1}{a} \cosh(at + c) + d$$



## Populationswachstum:

$$\dot{x} = \underbrace{ax}_{>0} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad \dots \text{logistisches Modell}$$

$$\frac{\dot{x}}{x(b-x)} = \frac{a}{b}$$

$$\int \frac{1}{x(b-x)} dx = \frac{1}{b} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{x} dx}_{=\log x} + \int \frac{1}{b-x} dx = \frac{1}{b} (\log x - \log(b-x)) \stackrel{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{b-x} = \frac{1}{b} \frac{1}{x} + \frac{1}{b} \frac{1}{b-x} =$$

$$= \frac{1}{b} \log\left(\frac{x}{b-x}\right)$$

$$\int \frac{a}{b} dt = \frac{a}{b} \cdot t$$

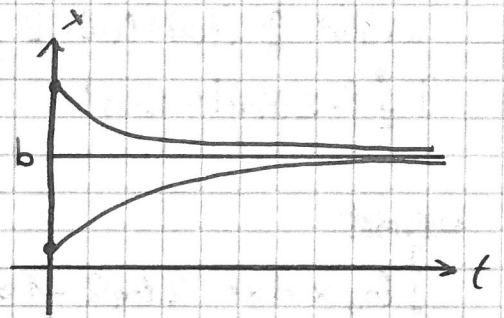
$$\Rightarrow \frac{1}{b} \log\left(\frac{x}{b-x}\right) = \frac{a}{b} \cdot t + \tilde{c}$$

$$\log\left(\frac{x}{b-x}\right) = a \cdot t + \tilde{c} \Rightarrow \frac{x}{b-x} = \overset{e^{\tilde{c}}}{C_1} \cdot e^{at}$$

$$(1 + C_1 e^{at}) x = b C_1 e^{at}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{b C_1 e^{at}}{1 + C_1 e^{at}} = \frac{b}{1 + \frac{1}{C_1} e^{-at}} = \frac{b}{1 + c e^{-at}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{1 + c e^{-at}} = b$$



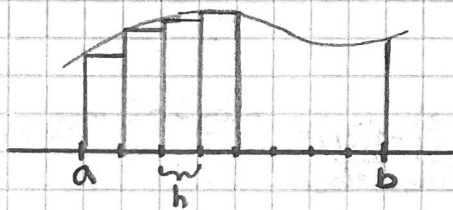
## 6.) Numerische Integration

$$\int_a^b f \text{ bestimmen}$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

keine elementare Stammfunktion geht nicht mit dem klassischen Hauptsatz bestimmen durch numerische Näherung - Riemann-Summe

### Riemann-Summe mit linkem Randwert:



$$nh = b - a$$

$h \dots$  Schrittweite  
momentan konstant

Approximation durch ein Polynom vom Grad  $\leq 0$  Rechtecksfläche von konstanten Funktionen

$$\int_a^{a+h} f(s) ds \approx f(a) \cdot h$$

$$\int_a^b f = \sum_{j=0}^{n-1} h \cdot f(a + j \cdot h) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(a + jh) = R(f, h)$$

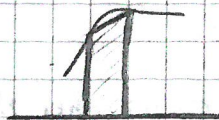
Randwerte

Wie groß ist der Fehler?

$$C h^\alpha = \tilde{c} \frac{1}{n^\alpha}$$

es gilt:  $\left| \int_a^b f - R(f, h) \right| \leq C \cdot h \quad \dots$  konvergiert sehr langsam  
Schrittanzahl  $\cdot 10$  wenn genauer um 0,01

Trapezregel: statt Rechteck jetzt ein Trapez



$$\int_t^{t+h} f(s) ds \approx h \frac{f(t) + f(t+h)}{2}$$

Approximation durch ein Polynom vom Grad  $\leq 1$

$$T(f, h) = \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh) \right) \frac{h}{2}$$

$$\text{Es gilt: } \left| \int_a^b f - T(f, h) \right| \leq Ch^2$$

Simpson-Regel (Kepler'sche Fassregel):

Approximation durch ein Polynom vom Grad  $\leq 2$

$$\int_t^{t+h} f(s) ds \approx \frac{h}{6} \left( f(t) + 4f\left(t+\frac{h}{2}\right) + f(t+h) \right)$$

$$S(f, h) = \frac{h}{6} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh) + 4 \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{(2j-1)}{2} h\right) \right)$$

$$\left| \int_a^b f - S(f, h) \right| \leq C \cdot h^4$$

Beispiel:

$$\int_1^2 \log x dx = 2 \log 2 - 1 \approx 0,38629436112$$

Riemannsumme:  $n=1$ :  $\underbrace{h}_{=1} \cdot \underbrace{f(1)}_{=0} = 0$

$n=100$ : Fehler  $\leq 3,5 \cdot 10^{-3}$

$n=1000$ : Fehler  $\leq 3,5 \cdot 10^{-6}$

Trapezregel:  $n=1$ :  $\int_1^2 \log x \approx \frac{h}{2} \left( \underbrace{f(1)}_{=0} + \underbrace{f(2)}_{=\log 2} \right) = \frac{\log 2}{2} \approx 0,3466$

$n=100$ : Fehler  $\leq 4,2 \cdot 10^{-6}$

$n=1000$ : Fehler  $\leq 4,2 \cdot 10^{-8}$

Simpson-Regel:  $n=1$ :  $\int_1^2 \log x \approx \frac{h}{6} \left( \underbrace{f(1)}_{=0} + 4 \underbrace{f\left(\frac{3}{2}\right)}_{=\log 3 - \log 2} + \underbrace{f(2)}_{=\log 2} \right) = \frac{4 \log 3 - 3 \log 2}{6} \approx 0,385835$

$n=10$ : Fehler  $\leq 6,1 \cdot 10^{-8}$

$n=100$ : Fehler  $\leq 6,1 \cdot 10^{-12}$

$n=1000$ : Fehler  $\leq 6,1 \cdot 10^{-16}$

Grad	H hoch
$\leq 0$	1
$\leq 1$	2
$\leq 2$	4
$\leq 3$	4
$\leq 4$	6
$\leq 5$	6

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds$$

$$\dot{x} = f(t) \Rightarrow x(t) = \int_a^t f(s) ds, x(0) = 0$$

Trennung der Variable

$$\int_a^b f = x(b)$$

Numerische Verfahren für Differentialgleichungen (andere VO) darauf angewendet:

• Euler:  $\int_t^{t+h} f \approx h \underbrace{f(x(t), t)}_{=f(t)}$  das ist die Riemannsumme mit linkem Randwert.  
(Riemannsumme ist Spezialfall vom Euler-Verfahren)

• Heun:  $k_1 = f(x(t), t) = f(t)$

$$k_2 = f(x(t) + hk_1, t+h) = f(t+h)$$

$\int_t^{t+h} f \approx \frac{h}{2} (k_1 + k_2) = \frac{h}{2} (f(t) + f(t+h))$  das ist die Trapezregel.  
(Trapezregel ist Spezialfall vom Heun-Verfahren)

• Runge-Kutta:  $k_1 = f(x(t), t) = f(t)$

$$k_2 = f(x(t) + \frac{h}{2} k_1, t + \frac{h}{2}) = f(t + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = f(x(t) + \frac{h}{2} k_2, t + \frac{h}{2}) = f(t + \frac{h}{2})$$

$$k_4 = f(x(t) + h k_3, t+h) = f(t+h)$$

$\int_t^{t+h} f \approx \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \frac{h}{6} (f(t) + 4f(t + \frac{h}{2}) + f(t+h))$  das ist

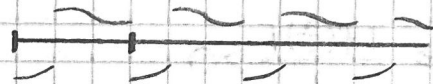
die Simpson-Regel (Keplersche Fassregel).

(Simpsonregel ist Spezialfall vom Runge-Kutta-Verfahren)

## III. FOURIERTRANSFORMATION

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , periodisch fortgesetzt (f ist eine periodische Funktion  $\rightarrow$  eine Schwingung)

Wir werden stets auf  $[0, 1]$  arbeiten.



1. f soll durch Standardschwingungen approximiert werden:

$$1, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 4\pi x, \sin 4\pi x, \dots$$

2. Zugang: f soll bezüglich Orthogonalbasis dargestellt werden.

(in der Praxis: überall, wo etwas mit Hören zu tun hat, kommen Schwingungen als Fourierreihen vor, z.B. Telefon, Handy, MP3, Hörgerät, Lautsprecher, Radio, Fernseher, Laptop, ...)

$$\underset{\text{Fourier}}{\mathcal{F}(f)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$$

Zwei Arten von Konvergenz bei Funktionen:

- punktweise Konvergenz
  - gleichmäßige Konvergenz
  - $L^2$ -Konvergenz, bzw. bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .
- sind beide nicht so gut geeignet für Fourierreihen  
besser geeignet

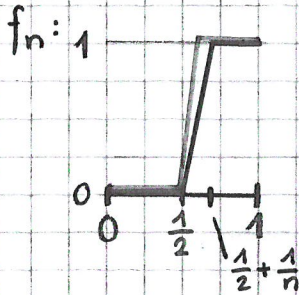
# 1.) Der Raum $L^2$

$C([0,1], \mathbb{C})$  ... Menge der stetigen Funktionen  $[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in C([0,1], \mathbb{C})$ :  $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$  ... Norm

$f, g \in C([0,1], \mathbb{C})$ :  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$  ... inneres Produkt

Wir werden Vollständigkeit brauchen. Die haben wir nicht, weil:



$\|f_n - f_m\|_2^2 \leq 1 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$  ... Abstand wird kleiner, Funktion wird steiler, wird dann unstetig

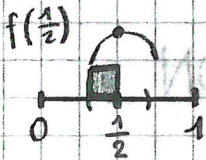
$\Rightarrow (f_n)$  Cauchyfolge

Behauptung:  $\exists f \in C([0,1], \mathbb{C})$  mit  $f_n \rightarrow f$  bezüglich  $\|\cdot\|_2$

Beweis:

für  $f(\frac{1}{2}) \neq 1$  ist der Beweis etwas anders

2 Fälle:  $f(\frac{1}{2}) \neq 0$  oder  $f(\frac{1}{2}) \neq 1$ . „O.B.d.A.“  $f(\frac{1}{2}) \neq 0$ .



$\exists \delta > 0 \quad \forall x$  mit  $|x - \frac{1}{2}| < \delta$

$|f(x)| \geq \frac{|f(\frac{1}{2})|}{2} > 0$

$\|f - f_n\|_2^2 = \int |f - f_n|^2 \geq \frac{|f(\frac{1}{2})|^2}{4} \delta$

$\Rightarrow \|f - f_n\|_2 \geq \frac{|f(\frac{1}{2})|}{2} \sqrt{\delta} > 0$

Daher kann  $\|f - f_n\|_2 \not\rightarrow 0$  □

Man braucht jetzt das **LEBESGUE-Integral** (Verallgemeinerung vom Riemannintegral: wenn riemannintegrierbar  $\Rightarrow$  lebesgueintegrierbar, selbe Ergebnis)

Satz über dominierte Konvergenz:

$(f_n)$  Lebesgue-integrierbar,  $g$  Lebesgue-integrierbar  $|f_n| \leq g$ ,  $f_n \rightarrow f$  fast überall

( $\exists N: \lambda(N) = 0$ , sodass  $\forall x \in [0,1] \setminus N: f_n(x) \rightarrow f(x)$ )

$\Rightarrow f$  ist Lebesgue-integrierbar und  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

$g = f$  f.ü. <sup>fast überall konvergenz</sup>  $f_n \rightarrow f$  f.ü.  $\Rightarrow f_n \rightarrow g$  f.ü.

$[f] := \{g: g=f \text{ fast überall}\}$

Def.:  $L^2 := \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \int_0^1 |f|^2 < \infty\}$  <sup>d.h. das Integral existiert</sup>

(eigentlich ganz formal:  $\mathcal{L}^2 := \{f: \int_0^1 |f|^2 < \infty\}$ ,  $L^2 := \{[f]: f \in \mathcal{L}^2\}$ )  
"skript  $L^2$ "

Für  $f, g \in L^2$ :  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)}$ ,  $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$ .

Satz:  $L^2$  ist bezüglich  $\|\cdot\|_2$  vollständig.

Satz:  $f \in L^2 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists g$  stetig mit  $\|f-g\|_2 < \epsilon$ .

ich komme mit stetigen Funktionen so nah wie möglich / stetige Funktionen liegen dicht in  $L^2$

Wir sagen  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2$  (bzw.  $f_n \rightarrow f$  bezüglich  $\|\cdot\|_2$ ),

falls  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ .

$B_n := \{1, \cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(4\pi x), \sin(4\pi x), \dots, \cos(2\pi n x), \sin(2\pi n x)\}$

$\tilde{B}_n := \{e^{2\pi i k x} : k \in \{-n, \dots, n\}\}$

Prop.:  $\langle 1, \cos(2\pi k x) \rangle = 0$ ,  $\langle 1, \sin(2\pi k x) \rangle = 0$

$\langle \cos(2\pi k_1 x), \cos(2\pi k_2 x) \rangle = 0$ , falls  $k_1 \neq k_2$ ,

$\langle \sin(2\pi k_1 x), \sin(2\pi k_2 x) \rangle = 0$ , falls  $k_1 \neq k_2$ ,

$\langle \cos(2\pi k_1 x), \sin(2\pi k_2 x) \rangle = 0$ ,

$\|1\|_2 = 1$ ,  $\|\cos(2\pi k x)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\|\sin(2\pi k x)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Beweis:

•  $\langle 1, \cos(2\pi k x) \rangle = \int_0^1 \cos(2\pi k x) dx = \frac{\sin(2\pi k x)}{2\pi k} \Big|_0^1 = 0$

•  $\langle \cos(2\pi k_1 x), \sin(2\pi k_2 x) \rangle = \int_0^1 \cos(2\pi k_1 x) \sin(2\pi k_2 x) dx$

⊕  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  (Formel muss bekannt sein!)

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$  (Formel aus oberer ableiten)

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$

$\Rightarrow \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin(2\pi(k_1+k_2)x) + \sin(2\pi(k_1-k_2)x)) dx$  (\*)

$= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(2\pi(k_1+k_2)x)}{2\pi(k_1+k_2)} - \frac{\cos(2\pi(k_1-k_2)x)}{2\pi(k_1-k_2)} \right) \Big|_0^1 = 0$

$-\frac{1}{2\pi(k_1+k_2)} + \frac{1}{2\pi(k_1+k_2)} - \frac{1}{2\pi(k_1-k_2)} + \frac{1}{2\pi(k_1-k_2)}$

$$(*) : k_1 = k_2 : \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin(2\pi(k_1+k_2)x + 0)) = 0 \quad \square$$

29.5.

Prop: Es gelten: 1)  $\langle e^{2\pi i k_1 x}, e^{2\pi i k_2 x} \rangle = 0, k_1 \neq k_2$

$$2) \|e^{2\pi i k x}\|_2 = 1$$

Beweis:

$$\langle e^{2\pi i k_1 x}, e^{2\pi i k_2 x} \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i k_1 x} \underbrace{e^{2\pi i k_2 x}}_{= e^{-2\pi i k_2 x}} = \frac{e^{2\pi i (k_1 - k_2)x}}{2\pi i (k_1 - k_2)} \Big|_0^1 = e^{2\pi i (k_1 - k_2)x}$$

Substituiere:  $= \frac{1}{2\pi i (k_1 - k_2)} - \frac{1}{2\pi i (k_1 - k_2)} = 0$

$$\|e^{2\pi i k x}\|_2^2 = \int_0^1 \underbrace{|e^{2\pi i k x}|^2}_1 dx = 1 \quad (\text{Integral aus der Volksschule})$$

Prop:  $(f_n) \in L^2, f \in L^2, f_n \rightarrow f$  in  $L^2$ .

Dann gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_k})$  von  $(f_n)$ , sodass  $f_{n_k} \rightarrow f$  fast überall.

## 2. Fourierreihen

Mit  $V_n$  bezeichnen wir den von  $B_n$  erzeugten Teilraum  $L^2$ . Das ist auch der von  $\tilde{B}_n$  erzeugte Teilraum.

Es sei  $\mathcal{F}_n f$  eine Orthogonalprojektion von  $f \in L^2$  auf  $V_n$ .

$$\text{Dann ist: } \mathcal{F}_n f := \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|_2^2} \cdot 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\langle f, \cos(2\pi k x) \rangle}{\|\cos(2\pi k x)\|_2^2} \cdot \cos(2\pi k x) + \sum_{k=1}^n \frac{\langle f, \sin(2\pi k x) \rangle}{\|\sin(2\pi k x)\|_2^2}$$

$$\text{bzw. } \mathcal{F}_n f := \sum_{k=-n}^n \frac{\langle f, e^{2\pi i k x} \rangle}{\|e^{2\pi i k x}\|_2^2}$$

$$a_0 := \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|_2^2} = \int_0^1 f(x) dx; \quad a_k := \frac{\langle f, \cos(2\pi k x) \rangle}{\|\cos(2\pi k x)\|_2^2} = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cos(2\pi k x) dx;$$

$$b_n := \frac{\langle f, \sin(2\pi k x) \rangle}{\|\sin(2\pi k x)\|_2^2} = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \sin(2\pi k x) dx;$$

$$c_n := \frac{\langle f, e^{2\pi i k x} \rangle}{\|e^{2\pi i k x}\|_2^2} = \int_0^1 f(x) \underbrace{e^{2\pi i k x}}_{= e^{-2\pi i k x}} dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

Def: Sei  $f \in L^2$ . Setze  $a_0 := \int_0^1 f(x) dx$ . Für  $n \in \mathbb{N}$ . Setze  $a_n := 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x) dx$  und  $b_n := 2 \cdot \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) dx$ . Weiters setze für  $n \in \mathbb{Z}$  auch  $c_n := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$ . Dann nennt man  $\mathcal{F}f := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$  die Fourierreihe von  $f$ .

Def: Eine Reihe der Form  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$   
 bzw.  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{2\pi i n x}$  nennt man Fourierreihen.

Prop: Sei  $a_0 \in \mathbb{C}$ ,  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  Folgen in  $\mathbb{C}$  bzw. sei  $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$  eine  
 „Folge“ (= Doppelfolge) in  $\mathbb{C}$ , falls  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$  konvergieren,  
 bzw.  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$  konvergiert, dann konvergiert auch  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$  in  $L^2$  bzw. konvergiert auch  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$  in  $L^2$ .

Beweis:

Setze  $s_n := \sum_{k=1}^n c_k \cdot e^{2\pi i k x}$ . Wähle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit (oBdA)  $n > m$ .

$$\|s_n - s_m\|_2^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k e^{2\pi i k x} \right\|_2^2 \stackrel{\text{Pythagoräischer Lehrsatz}}{=} \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0$$

$$= \sum_{k=m+1}^n c_k e^{2\pi i k x}$$

Also ist  $s_n$  eine Cauchy-Folge.

Weil  $L^2$  vollständig ist, konvergiert  $s_n$  in  $L^2$ . Analog  $t_r := \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{2\pi i k x}$  konvergiert  
 in  $L^2$ . Somit ist  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$  konvergent in  $L^2$ .  $\square$

Prop: Sei  $f \in L^2$ . Dann gilt  $\mathcal{F}f \rightarrow f$  in  $L^2$ . Weiters konvergieren  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ ,  
 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$  und  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ . Außerdem gilt:

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Insbesondere  $\|\mathcal{F}f\|_2 \leq \|f\|_2$

Beweis:

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \left\| \left( a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2\pi k x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(2\pi k x) \right) \right\|_2^2 \stackrel{\text{Pythagoräischer Lehrsatz (immer wegen Orthogonalprojektion)}}{=} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)$$

$$\|\mathcal{F}_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x} \right\|_2^2 \stackrel{\text{PLS}}{=} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

$$\|f\|_2^2 = \|(f - \mathcal{F}_n f) + \mathcal{F}_n f\|_2^2 \stackrel{\text{PLS}}{=} \underbrace{\|f - \mathcal{F}_n f\|_2^2}_{\geq 0} + \|\mathcal{F}_n f\|_2^2 \geq \|\mathcal{F}_n f\|_2^2$$

Deshalb konvergieren  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$  und  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$  und es gelten

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right) \leq \|f\|_2^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$$

$$\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k x} - \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x} \right\|_2^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \cdot \|e^{2\pi i k x}\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}$$

$\Rightarrow \|Ff - F_n f\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Somit  $F_n f \rightarrow Ff$  in  $L^2$ .

Daher  $\|F_n f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ .

Insbesondere  $\|Ff\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \rightarrow \|Ff\|_2 \leq \|f\|_2$

Prop:  $f, g \in L^2, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow F(f + \lambda g) = Ff + \lambda Fg$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|F(f + \lambda g) - (Ff + \lambda Fg)\|_2 &= \|F(f + \lambda g) - F_n(f + \lambda g) + \underbrace{F_n(f + \lambda g) - (Ff + \lambda Fg)}_{= F_n f + \lambda F_n g \leftarrow \text{Linear- und Orthogonalprinzip}}\|_2 \\ &= \|(F(f + \lambda g) - F_n(f + \lambda g)) + (F_n f - Ff) + \lambda(F_n g - Fg)\|_2 \leq \underbrace{\|F(f + \lambda g) - F_n(f + \lambda g)\|_2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|F_n f - Ff\|_2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|\lambda| \cdot \|F_n g - Fg\|_2}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(f + \lambda g) = Ff + \lambda Fg$ .  $\square$

WH:  $\|F_n f\|_2 \leq \|Ff\|_2 \leq \|f\|_2$

Es gilt sogar  $\|Ff\|_2 = \|f\|_2$

Manche Fourierreihen gehen leicht:

$F(3) = 3$ , weil Linearkombination von Basiselementen

$F(2 + 8 \cos(2\pi x) + 5 \sin(136\pi x)) = 2 + 8 \cos(2\pi x) + 5 \sin(136\pi x)$

### 3.) Konvergenz der Fourierreihen

$f$  sei stückweise  $C_1$ .

$L^2$ -Konvergenz:  $F_n f \rightarrow f$  in  $L^2$   $\leftarrow$  darauf folgt

punktwaise Konvergenz:  $F_n f(x) \rightarrow f(x)$ , falls  $f$  stetig in  $x$  (bei 0 und 1:  $f(0) = f(1)$ ),

sonst:  $F_n f(x) \rightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$

Gleichmäßige Konvergenz:  $f$  stetig und  $f(0) = f(1) \Rightarrow F_n f \rightarrow f$  gleichmäßig

(nur in diese Richtung!)  
punktwaise Grenzwert ist nicht stetig  $\Rightarrow F_n f$  konvergiert nicht gleichmäßig

Beispiel:

$f(x) := 3x^4 - 2x^3 - x$

$f$  stückweise  $C_1$ ,  $f$  stetig,  $f(0) = 0 = f(1) \Rightarrow F_n f \rightarrow f$  gleichmäßig  $\Rightarrow F_n f \rightarrow f$  punktwaise

und  $F_n f \rightarrow f$  in  $L^2$



Beispiel:

$$f(x) = 6x^5$$

$f$  stückweise  $C_1 \Rightarrow \mathcal{F}_N f \rightarrow f$  in  $L^2$

$$\mathcal{F}_N f(x) \rightarrow \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in (0, 1), \text{ weil } f \text{ stetig in } x \\ \frac{f(0^+) + f(1^-)}{2} = \frac{0+6}{2} = 3, & \text{für } x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Weil der punktweise Grenzwert nicht stetig ist, konvergiert  $(\mathcal{F}_N f)$  nicht gleichmäßig.

## 4.) Diskrete Fouriertransformation

Wir kennen die Funktion nur an  $N$  (endlich vielen) Stützstellen  $(0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N})$   
und wir wollen die Fourierreihe bestimmen.  
Achse unterteilt von 0 bis  $1 - \frac{1}{N}$  in  $N$  Stellen

Warum haben wir dabei eine Chance? Weil die Fourierkoeffizienten gegen 0 gehen.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}, \text{ hier } \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_n e^{2\pi i n x}$$

Man kann dann Formeln herleiten:

$y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  <sup>Gamma</sup> Funktionswerte an den Stützstellen

$$y_j = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_n e^{\frac{2\pi i n j}{N}} \quad \dots \text{ Formel für inverse diskrete Fouriertransformation: ich kenne die } c_n \text{ und bestimme die } y_j$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} y_n e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \quad \dots \text{ Formel für diskrete Fouriertransformation: ich kenne die } y_n \text{ und bestimme die } c_n$$

$$\text{dft} \begin{pmatrix} \vdots \\ y_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_k \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{idft} \begin{pmatrix} \vdots \\ c_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

diskrete Fouriertransformation      inverse diskrete Fouriertransformation

Multiplikationen:  $N(N+1) \approx N^2 \rightarrow$  sehr viele, daher schnellere Variante:

Schnelle Fouriertransformation:

- fft
- Funktioniert nicht: wenn  $N$  prim ist
  - Funktioniert besonders gut: wenn  $N = 2^\alpha$  (Zweierpotenzen)

$\approx N$  Multiplikationen

# 5.) Das jpeg-Verfahren

= ein Verfahren für Fotos (digitale)

Man möchte Speicherplatz einsparen. Es ist ein Verlustverfahren, d.h. die ursprünglichen Daten können nicht wieder hergestellt werden, das ist aber mit dem freien Auge nicht erkennbar.

merken  
mit  
Englisch

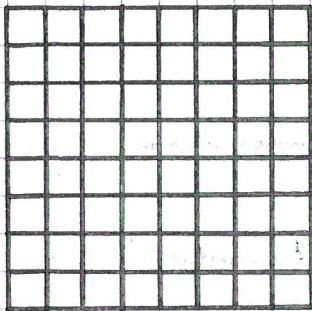
Das Bild wird in Bildpunkte zerlegt. Pro Bildpunkt werden 3 Farbwerte gespeichert (rgb... rot grün blau). Pro Farbe gibt es  $2^8$  Möglichkeiten, das sind dann 16 777 216 Farben.  $(= (2^8)^3)$

Früher im Analogen (chemischen Prozess) hat man unendlich viele verschiedene Farben, 16 777 216 sind aber genug für Fotos.

rgb  $\xrightarrow{\text{Transformation}}$  Helligkeit, Farbton, Sättigung

Das menschliche Auge kann Farbton und Sättigung nicht so gut unterscheiden wie die Helligkeit. Bei rgb müsste jeder Wert wie die Helligkeit behandelt werden, im neuen Konzept nach der Transformation können wir jedoch bei Farbton und Sättigung einsparen. Das sagt uns die Biologie, nicht die Physik!

Wir zerlegen ein Bild in  $8 \times 8$  Blöcke:



... (noch mehr Blöcke)

⋮

Wir erhalten vereinfacht einen Vektor mit 64 Komponenten. (für Helligkeit, Farbton, Sättigung  $\cdot 1$ )

Wir wenden die dft in Form der fft an (geht gut weil 64 eine 2er-Potenz ist). Wir hoffen, dass die Werte weiter unten im Vektor klein sind, weil die Fourierkoeffizienten gegen 0 gehen. Wir könnten jetzt sagen, wir nehmen ~~die~~ nur die ersten 8 Stellen. Das würde gut gehen bei recht einfarbigen Blöcken, aber nicht, wenn es große Kontraste im  $8 \times 8$  Block gibt, ist daher nicht geeignet.

oder etwas  
anderes

Bessa funktioniert: Wir geben uns einen Wert  $r$  vor (in der Praxis bei Farbton und Sättigung doppelt so groß wie bei Helligkeit). Falls ein Eintrag  $|y| \leq r$ , dann setzen wir ihn auf 0.

↳ bzw. wenn sowohl Real- als auch Imaginärteil  $\leq r$  vereinfacht (bei Präsentation)

Jetzt gehen wir den Vektor durch:

- Steht ein Wert  $\rightarrow$  Wert angeben
- Nuller  $\rightarrow$  Anzahl der Nuller, die jetzt kommen, angeben.

Dann muss man noch kennzeichnen, ob Wert oder Anzahl von Nullern angegeben sind, z.B. so:

1, wert, 0, Anzahl

Zum Anschauen braucht man dann die idft.

In Wirklichkeit:

- Zweidimensionale „Fouriertransformation“  
weil Bild zweidimensional ist
- Statt der Fouriertransformation wird die Cosinustransformation verwendet

komplexe Zahlen  
als Ergebnis  
braucht bei Multiplikation  
komplexe Zahl · komplexe Zahl  
↳ Multiplikationen

reelle Zahlen  
als Ergebnis,  
spart Multiplikationen

Bei Videos:

- 3 dimensionale Cosinustransformation (wegen Zeit als Komponente)

zur Präsentation:

$r=1$ :  $w74 \overbrace{w7 w14}^{7 \pm 14}$   $w-8 w-4 n 2 \dots$

↑ tritt paarweise auf,  
wird nur ein Mal abgespeichert

(er weiß, dass 1. und letzter Wert reell sind, daher reicht  $w74$  für  $74$ ,  
in der Mitte müsste man  $w-3 w0$  für  $-3$  schreiben)

$r=5$ :  $w74 w7 w14 w-8 w-4 n 2 w5 w7 n 55$

L

Ähnlich beim Ton.

zurück zu 4.) Diskrete Fouriertransformation

Hilfsgröße  $= \frac{N}{2}$

$$y_j = \sum_{n=-K}^K \tilde{c}_n e^{\frac{2\pi i}{N} n j} = \sum_{n=0}^K \tilde{c}_n e^{\frac{2\pi i}{N} n j} + \sum_{n=-K}^{-1} \tilde{c}_n e^{\frac{2\pi i}{N} n j} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{2\pi i}{N} n j}$$

Wir wollen:  $y_j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{2\pi i}{N} n j}$  für  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$\xrightarrow{\text{idft}}$

$\underbrace{e^{2\pi i} e^{\frac{2\pi i}{N} n j}}_{=1} = e^{\frac{2\pi i}{N} (N+n)j}$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \text{idft} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \text{dft} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$e_k := \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot 1} \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot (N-1)} \end{pmatrix}, \{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\} \text{ orthogonal, weil für } k \neq n \text{ ist...}$$

$$\langle e_k, e_n \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} k j} \overbrace{e^{-i \frac{2\pi}{N} n j}}^{= e^{-i \frac{2\pi}{N} n j}} = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{e^{i \frac{2\pi}{N} j(k-n)}}_{\left( e^{i \frac{2\pi}{N} (k-n)} \right)^j} \stackrel{\text{Geometrische Reihe}}{=} \frac{1 - \left( e^{i \frac{2\pi}{N} (k-n)} \right)^N}{1 - e^{i \frac{2\pi}{N} (k-n)}}$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi i (k-n)}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{N} (k-n)}} = 0.$$

Länge zum Quadrat

$$|e_k|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{|e^{i \frac{2\pi}{N} k j}|^2}_{=1} = N.$$

$$\left\langle \sum_{j=0}^{N-1} c_n e_n, e_k \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \langle e_n, e_k \rangle = c_k N \Rightarrow c_k = \frac{1}{N} \left\langle \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, e_k \right\rangle =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k \\ N, & n = k \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{i \frac{2\pi}{N} k j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{N} k j},$$

also  $c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{N} k j}$  für  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Wir benötigen  $N(N+1) \approx N^2$  Multiplikationen ... eigentlich etwas weniger, weil +1 nicht als Multiplikation gezählt wird

## Schnelle Fouriertransformation:

... geht nicht, wenn  $N \in \mathbb{P}$ , besonders gut, wenn  $N$  reine Zweierpotenz ist.

Angenommen  $N = 2M$ .

Stützstellen mit geradem Index kürzen

$$c_{2k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{2M} 2kj} = \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{M-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} + \sum_{j=M}^{2M-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} \right) =$$

aufteilen

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{M-1} (y_j + y_{j+M}) e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} = \sum_{j=0}^{M-1} y_{j+M} e^{-i \frac{2\pi}{M} k(j+M)} e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} \quad \text{Indexverschiebung}$$

$e^{-i \frac{2\pi}{M} k(j+M)} = e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} \cdot e^{-2\pi i k} = e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} \cdot 1$

ähnlich:

Stützstellen mit ungeradem Index

$$c_{2k+1} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{2M} (2k+1)j} = \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{M-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} e^{-i \frac{2\pi}{2M} j} + \sum_{j=M}^{2M-1} y_j e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} e^{-i \frac{2\pi}{2M} j} \right) =$$

Indexverschiebung

$$= \sum_{j=0}^{M-1} (y_j - y_{j+M}) e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} e^{-i \frac{2\pi}{2M} j} = \sum_{j=0}^{M-1} y_{j+M} e^{-i \frac{2\pi}{M} k(j+M)} e^{-i \frac{2\pi}{2M} (j+M)} e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} = e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} e^{-2\pi i k} e^{-i \frac{2\pi}{2M} j} e^{-\pi i} = e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} e^{-i \frac{2\pi}{2M} j} e^{-\pi i} = e^{-i \frac{2\pi}{M} kj} e^{-i \frac{2\pi}{2M} j} (-1)$$

Wir haben nur mehr  $N + \underbrace{NM}_{= \frac{N^2}{2}} = N + \frac{N^2}{2} \approx \frac{N^2}{2}$  Multiplikationen.

⊗  $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$$e^{-2\pi i k} = \cos(-2\pi k) + i \cdot \sin(-2\pi k) = \left( \hat{=} 0^\circ, 360^\circ \right) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$$e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi) = \left( \hat{=} 180^\circ \right) = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Nun zum Fall  $N = 2^\alpha$ :

Man reduziert das auf  $\approx \frac{N^2}{2}$  Multiplikationen.

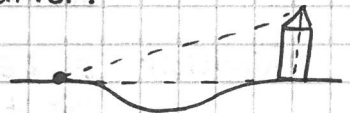
Wir machen das noch einmal:  $\frac{N^2}{4} = \frac{N^2}{2^2}$  Multiplikationen

Wir machen das  $\alpha$ -Mal:  $\approx \frac{N^2}{2^\alpha} = N$  Multiplikationen  
 $= \frac{N^2}{N}$

## IV. ABSCHLUSS

Wo kommt die Anwendung der Mathematik in der Schule noch vor?

- Bei Vermessungsaufgaben mit Winkelfunktionen.



Höhe berechnen mit Winkeln

Wie berechnet der Taschenrechner  $\sin$ ?

- Mit Potenzreihen:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad R = \infty$$

„Konvergenzradius“  
geht auch gut bei  $\cos$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$

$$\frac{x^{13}}{13!} \cdot \frac{x^2}{14 \cdot 15} = \frac{x^{15}}{15!}$$

26 Multiplikationen (oder eher 24)  
 $\hookrightarrow x^{13}$ : 12 Mult.  
Division: wie 1 Mult.  
13!: 11 Mult.

30 Multiplikationen  
So geht es schneller!  
3 Multiplikationen von einem zum anderen

Um  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\arcsin x$ ,  $\log x$  zu berechnen verwendet man das Newtonverfahren:

↳ kombiniert N-Verfahren mit Potenzreihe

$$T_x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- geht schnell bei einfacher Nullstelle, bei mehrfacher Nullstelle langsamer

Funktioniert oft gut, wenn  $x_0$  einfache Nullstelle ist, schlechter bei  $n$ -facher Nullstelle.

$$(T'x_0 = 0)$$

$$(T'x_0 = \frac{1 - \frac{1}{q}}{q}) \approx q^n \text{ Konvergenzgeschwindigkeit}$$

## ZUR PRÜFUNG:

Schriftlich: Beispiele wie lineare Glsysteme, Determinanten berechnen, Pivotsuche, überbestimmte Glsysteme,

Diff.gleichungen: lineare, mehrdimensionale und eindimensionale, höherer Ordnung, Trennung der Variable, exakte Diff.gl., integrierender Faktor, Bernoulli-diffgl. (bei den letzten 3: Hinweis, welche Art das ist), Fixpunkte, Horner-Schema

Fourierreihen: ausrechnen können, Konvergenzen (Satz mit  $\sum |a_n|^2$  und  $\sum |b_n|^2$ ), Bsp. mit Linearfunktion von Basiselementen

Newton-Verfahren

Mündlich: Ex & Eind Satz von P&L + Hauptsatz über Konvergenz von F.Reihen mit Skriptum

einfache Beweise wie Formel für beste Lösung auswendig

Fehlerabschätzung beim Newton-Verfahren mit Skriptum anwenden können

Anwendungen erklären können: Verschlüsselungsverfahren, jpeg-Verfahren

bei den Einschüben: Überblick haben, muss man aber nicht ganz genau können

Banachscher Fixpunktsatz ist wichtig