STOCHASTIK
für LAK

Inhaltsverzeichnis:

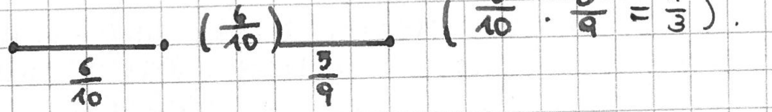
Beispiel:

Urne: 6 rote, 2 grüne und 2 blaue Kugeln

a) Wir ziehen 2 Kugeln aus der Urne.

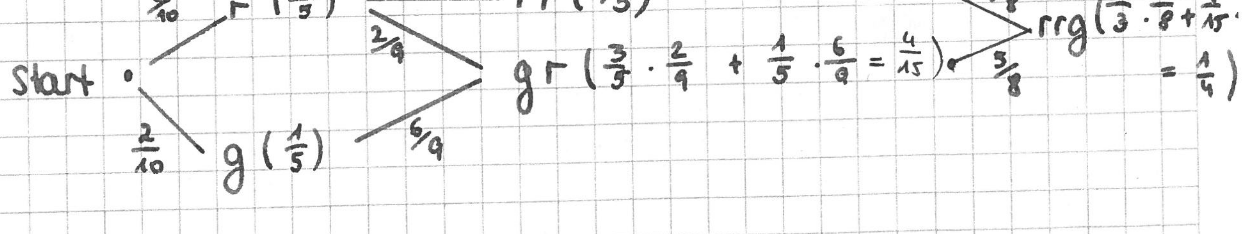
P (beide sind rot) = p

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{Zug}: \frac{6}{10} \\ 2.\ \text{Zug}: \frac{5}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$



b.) 3 Kugel ziehen

p = P(2 rote und 1 grüne)



Beispiel

Münze : Zahl / Edelweiß

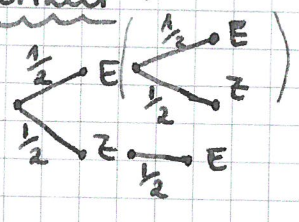
Münze wird 2 mal geworfen

a.) $P = P(\text{es kommt 2 mal Edelweiß}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

b.) $P = P(\text{es kommt mind. 1 mal Edelweiß})$

1. Möglichkeit :

Start :



$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$\left(P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \right)$

2. Möglichkeit:

$P = 1 - \underbrace{P(\text{es kommt } 0 \times E)}_{1/4} = \frac{3}{4}$

3. Möglichkeit : (FALSCH)

EE

EZ

ZZ

$P = \frac{2}{3}$ (2 günstige Fälle)

$\Rightarrow$ die Möglichkeiten sind nicht gleich wahrscheinlich !!

$\Rightarrow$ FALSCH

EE

EZ

ZE

ZZ

$\Rightarrow P = \frac{3}{4}$ (3 günstige Fälle)

Beispiel:

BSE-Test:

Wenn Rind erkrankt, dann mit 0,98 ein positives Ergebnis

Wenn Rind nicht erkrankt, mit 0,03 ein positives Ergebnis

Bei einem Rind haben wir ein positives Testergebnis erhalten.

P(Rind an BSE erkrankt)

So ist das nicht lösbar.

Extremfälle:
- Alle Rinder erkrankt: $P = 1$
- Alle Rinder nicht erkrankt: $P = 0$.

Beispiel:

Lotto: 6 aus 45

$\frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}}$

a.) P(6er)

Möglichkeiten 6 aus 45 ziehen:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$$

Reihenfolge muss man noch berücksichtigen

$$P = \frac{1}{8\,145\,060} \approx 1{,}2277 \times 10^{-7}$$

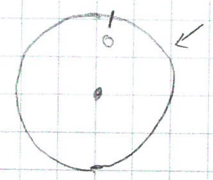
$$\text{b.) } P(\text{Vierer}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} = \frac{741}{543\,004} \approx 13646 \times 10^{-3}$$

günstige: 4 aus 6 richtigen auswählen: $\binom{6}{4}$

2 aus 39 nicht richtigen auswählen: $\binom{39}{2}$

Beispiel

Glücksrad



$[0, 2\pi($

normiert : $[0, 1)$

$A = [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

$P(A) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (rechne mit normierten Intervall) Länge d. Intervalls

$P(\{x\}) = 0$

einzelner Punkt

überabzählbar viele Möglichkeiten (wenn um Winkel verschoben, dann gleiche WK)

Beispiel

→ BSE-Bsp:

Rind hat BSE, dann 0,98 Test positiv.

Rind hat nicht BSE, dann 0,03 Test positiv.

1% der Rinder sind an BSE erkrankt.

Bei einem Rind war der Test positiv.

P (Rind hat BSE) ?

⇒ bedingte Wahrscheinlichkeit : $\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Bedingung, das was eingetreten ist

A... Rind hat BSE

B... Test war positiv

$$P = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}98}{\underbrace{0{,}01 \cdot 0{,}98}_{\text{krank + positiv}} + \underbrace{0{,}99 \cdot 0{,}03}_{\text{gesund + positiv}}} = \frac{98}{395} \approx 0{,}24810$$

→ Wurzeln für WH

Chevalier de Méré (17. Jh., Antoine Gombeaud)

1.) Würfel mit 2 (bzw. 3) Würfeln:

Augensumme 9: 3+6, 4+5 (2 Möglichkeiten)

Augensumme 10: 4+6, 5+5 (2 Möglichkeiten) nur auf 1 Möglichkeit

→ nicht gleich wahrscheinlich

$P(9) = \frac{4}{36}$ 2 Würfel 6·6

$P(10) = \frac{3}{36}$

2.) Mit einem Würfel 4x werfen,

$P(\text{mind. } 1 \text{ Sechser}) =: P_1$ $\frac{1}{6}$

4·6 $\frac{1}{6 \cdot 6}$

Mit 2 Würfel 24 mal werfen, $P(\text{mind. } 1 \text{ Doppelsechser}) =: P_2$

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0{,}51747$$

$$P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}49140$$

Beispiel:

Würfel: 10x würfeln $P(10 \times 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \approx 1{,}6538 \times 10^{-8}$

9x Sechser gekommen

$P(10. \text{ Wurf } 6) = \frac{1}{6}$ Warum?

1.) Unabhängigkeit

2.) $P = P(10 \times 6 \mid 9 \times 6) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{9}} = \frac{1}{6}$ (bedingte WH)

3.) Würfel hat sich nicht gemerkt, auf welche Seite er gefallen ist

Beispiel:

durchschnittliche Anzahl der Versuche, bis das erste Mal ein 6er kommt (Stoppzeit).

$E = 6$

Erwartungswert

Versuche

$$E = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\cdot 4 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)}_{x}^{0}\cdot 1 + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)}_{x}^{1}\cdot 2 + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)}_{x}^{2}\cdot 3 + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)}_{x}^{3}\cdot 4 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\underbrace{x^0\cdot 1}_{(x^0)' = (x^1)'} + \underbrace{x^1\cdot 2}_{=(x^2)'} + \underbrace{x^2\cdot 3}_{=(x^3)'} + \underbrace{x^3\cdot 4}_{=(x^4)'} + \ldots\right) = \text{Potenzreihe}$$

⇒ darf so rechnen

dazudenken

$$= \frac{1}{6}\big(\underbrace{x^0 + x^1 + x^2 + \ldots}_{\text{geom. Reihe} = \frac{1}{1-x}}\big)' =$$

(Konvergenzradius 1)

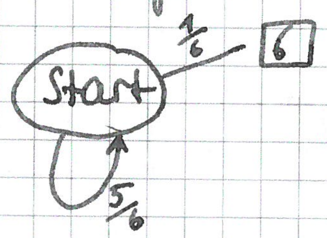
ableiten

$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{36}} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{36}{1} = \underline{\underline{6}}.$$

$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \left(\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot 2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\cdot 4 + \ldots = 6$$

andere Möglichkeit: (nicht exakt, aber oft hilfreicher)



$$E = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\,\underbrace{(E+1)} = \frac{5}{6}\cdot E + 1$$

$\rightarrow E = 6$

brauche E Versuche für 6er,
→ also zuerst keiner
→ nun E+1

Beispiel:

Mensch Ärgere dich nicht:

Wieder ansetzen:

! $E(X)=6 \rightarrow$ $\frac{6}{3}$ = 2 — 3 Versuche, wieder hinauszukommen

$$\frac{6}{3} = 2 = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{<1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{<1} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \overbrace{\frac{4}{3}}^{<2} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\frac{5}{3}}_{<2} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + \ldots <$$

< E(Runden bis zum Ansetzen).

Beispiel:

Eine Fußballspielerin stürzt mit Wahrscheinlichkeit

80%, falls er/sie gefoult wird,

100%, falls er/sie ein Foul vortäuscht,

70%, falls er/sie über den Ball stolpert.

Die WH für ein Foul ist 25%, für ein vorgetäuschtes Foul 70%, über den Ball stolpern 5%.

Gerade ist er/sie im gegenseitigen Strafraum gestürzt.

$$P(\text{Foul}) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}8}{0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 0{,}7} \approx 0{,}21390$$

→ kein Elfer!

I. WAHRSCHEINLICHKEIT

Ω ... Menge der möglichen Ergebnisse, $\Omega \neq \emptyset$

$A \subseteq \Omega$ ... Ereignis

Nicht jede Teilmenge von Ω muss ein zulässiges (messbares) Ereignis sein.

$w \in \Omega$: $\{w\}$ ... Elementarereignis, meistens nur w geschrieben

Beispiele:

- **Würfel**: $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}$ (=: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅})

A ... es kommt eine gerade Zahl:

$A = \{2,4,6\}$ (A = {⚁ ⚃ ⚅})

B ... es kommt Augenzahl ≥ 5:

$B = \{5,6\}$

Elementarereignis: z.B: 3 $(\{3\})$

- **Glücksrad**:

$\Omega := [0,1)$

$A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

1.) Naive Wahrscheinlichkeit

$\Omega \neq \emptyset$, $A \subseteq \Omega$ zulässiges Ereignis

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $N_n(A)$ die Anzahl, wie oft A bei n Versuche eingetreten ist.

„Definition"

$$\boxed{P(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}}\ .$$

Probleme:

•) Wir können den Versuch nicht ∞ oft durchführen (daher keine Folge und wir können Grenzwert nicht bestimmen).

•) Selbst wenn wir eine Folge haben (also ∞-oft durchgeführt), wissen wir nicht, ob diese Folge konvergiert.

„Proposition":

1.) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

2.) $0 \leq P(A) \leq 1$

3.) $P(\emptyset) = 0$

4.) $P(\Omega) = 1$

„Beweis:"

1.) $A \subseteq B \Rightarrow N_n(A) \leq N_n(B)$

$$\Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(B)}{n} = P(B)$$

2.) $0 \leq N_n(A) \leq n \quad |:n$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{N_n(A)}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} \leq 1$$

3.) $N_n(\emptyset) = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{N_n(\emptyset)}{n}}_{0} = 0$

4.) $N_n(\Omega) = n \Rightarrow P(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{N_n(\Omega)}{n}}_{1} = 1$ $\square$

09.03.2010

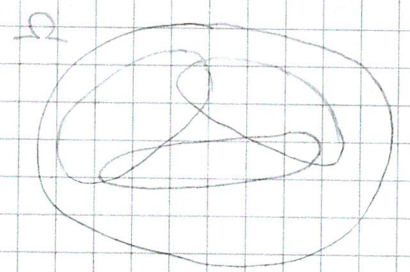
Mit Ereignissen kann man „rechnen" (z.B.: $A \cap B$)

Beschreibungen:

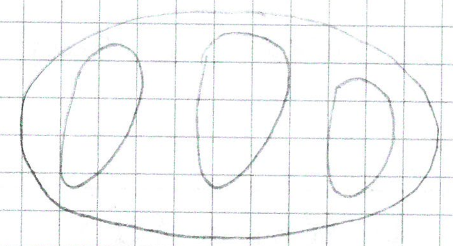
- sprachlich: A und B treten gleichzeitig ein
- formale Logik: $A \wedge B$
- Mengenlehre: $A \cap B$

Definition

Eine Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen von Ω heißt paarweise disjunkt, falls für $\forall j_1 \neq j_2 \in J$: $A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$.



disjunkt, aber nicht paarweise disjunkt



paarweise disjunkt ($\Rightarrow$ disjunkt)

„Proposition"

Seien $A, B \subseteq \Omega$, $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

„Beweis":

$N_n(A \cup B) = N_n(A) + N_n(B)$

$$P(A\cup B) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A\cup B)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{N_n(B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B).$$

$\square$

Additionssatz, Additionseigenschaft, Additivität (einfach oben (Prop), endlich Korollar)

„Korollar"

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Seien } (A_j)_{j=1}^n \subseteq \Omega \text{ paarweise disjunkt. Dann gilt} \\ P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).\end{array}}$

„Beweis":

Induktion nach n:

$n=1$: nichts zu zeigen.

$n=2$: obige Proposition

Sei $n>2$: Setze $B := \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$.

$$\underbrace{B}_{=\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \,(*)} \cap A_n = \bigcup_{j=1}^{n-1} \underbrace{(A_j \cap A_n)}_{=\emptyset \text{ (da paarweise disjunkt)}} = \emptyset$$

$(*)$ $\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \cap A_n = \bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \cap A_n)$ Distributivgesetz bei Mengen $\Rightarrow A\cap(B\cup C) =$

$$\text{Daher } P\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^n A_j}_{=B\cup A_n}\Big) \underset{\text{Prop.}}{=} \underbrace{P(\underbrace{B}_{=\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j})}_{=\sum_{j=1}^{n-1} P(A_j)} + P(A_n) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

□

Wir wollen später auch die abzählbare Additivität (σ-Additivität).
'sigma

„Korollar":

$\boxed{\text{Sei } A \subseteq \Omega. \text{ Dann gilt } P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A).}$

„Beweis":

$A \cap (\Omega\setminus A) = \emptyset$. $A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$.

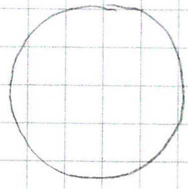
Somit ist $1 = P(\underbrace{\Omega}_{A\cup(\Omega\setminus A)}) \underset{\text{Prop.}}{=} P(A) + P(\Omega\setminus A) \Rightarrow P(\Omega\setminus A) = 1 - P(A)$

□

2.) Axiomatische Wahrscheinlichkeit

$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, falls $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt.

Beispiel:

Glücksrad:  $\Omega = [0,1)$

Im Folgenden rechnen wir stets modulo 1 (nächstkleinere ganze Zahl abgezogen).

$P(\underbrace{A+\beta}) = P(A)$

$= \{x+\beta : x\in A\}$

Sei α irrational. (Winkel)

Wir wählen eine Menge A mit folgenden Eigenschaften:

1.) Falls $x\in A$, dann ist $x+n\cdot\alpha \notin A \quad \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

2.) Für $x\in\Omega$ $\exists n\in\mathbb{Z}$ mit $x+n\cdot\alpha\in A$

$\Rightarrow$ $(A+n\cdot\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ abzählbar viele, paarweise disjunkt, weil

$n\neq m$: Ang. $\exists x\in(A+n\alpha)\cap(A+m\alpha)$

$\Rightarrow \exists y,z\in A: \quad x = y+n\alpha = z+m\alpha$

$\Rightarrow \underset{\in A}{y} = \underset{\in A}{z} + \underbrace{(m-n)}_{\neq 0}\cdot\alpha$ - WID.

Also $(A+n\alpha)\cap(A+m\alpha) = \emptyset$.

$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(A+n\alpha)$, weil:

Sei $x\in\Omega \Rightarrow \exists n\in\mathbb{Z}: x+n\alpha = y\in A$

$\Rightarrow x = \underset{\in A}{y} + (-n)\alpha \in A+(-n)\alpha$

$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(A+n\alpha)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{P(A+n\alpha)}_{P(A)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}P(A)$.

1. Fall: $P(A)=0$: $\quad 1=0$ WID.

2. Fall: $P(A)>0$: $\quad 1=+\infty$ WID.

Man kann A keine sinnvolle Wahrscheinlichkeit zuordnen.

[redacted]

Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω ($A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \subseteq \Omega$) heißt <u>$\sigma$ - Algebra</u>, falls:

1.) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2.) Falls $A \in \mathcal{A}$, dann ist $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

3.) Falls $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, dann ist $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Weitere Eigenschaften:

•) $\Omega \in \mathcal{A}$, weil: $\overset{1.)}{\emptyset \in \mathcal{A}} \overset{2.)}{\Rightarrow} \Omega = \Omega \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$

•) $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$, weil:
↳ Komplement von der Vereinigung

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \Omega \setminus \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_j) \Big), \text{ da}$$

$$\Omega \setminus \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_j) \Big) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \big(\underbrace{\Omega \setminus (\Omega \setminus A_j)}_{= A_j} \big)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \Omega \setminus \Big(\underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{(\Omega \setminus A_j)}_{\in A \quad 2.)}}_{\in \mathcal{A} \quad 3.)} \Big) \quad \in \mathcal{A} \quad 2.)$$

Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ - Algebra auf Ω. Eine Funktion $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt <u>Wahrscheinlichkeitsmaß (Wahrscheinlichkeit)</u>, falls:

Eigenschaften

1.) $\forall A \in \mathcal{A}: P(A) \geq 0$. (keine negative WH)

2.) $P(\Omega) = 1$

3.) Falls $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ (Folge) $\in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt, dann gilt:
$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Definition

Falls $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, P Wahrscheinlichkeits-map auf $\mathcal{A}$, dann nennt man $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ <u>Wahrscheinlichkeitsraum</u>.

Weitere Eigenschaften:

•) $\boxed{P(\emptyset) = 0}$.

Beweis:

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $A_n := \emptyset$. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist paarweise disjunkt.

$$P(\emptyset) = P(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{=\emptyset}}_{=\emptyset}) \underset{3)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

Ang.: $P(\emptyset) \neq 0 \Rightarrow P(\emptyset) > 0$

$\Rightarrow \underbrace{P(\emptyset)}_{\in\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(\emptyset)}_{>0} = +\infty$ – WID.

Daher $P(\emptyset) = 0$. $\square$

10.03.2010

•) Falls $(A_j)_{j=1}^{n} \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\boxed{P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)}$$

Beweis:

Definiere $A_{n+1} := A_{n+2} := \ldots := \emptyset$ (formaler: für $k \in \mathbb{N}, k > n$: $A_k := \emptyset$). $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ paarweise disjunkt.

$$P(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}_{=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \underset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).$$

$\square$

- $\boxed{\text{Falls } A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B,\ \text{dann ist } P(A) \leq P(B)}$

Beweis:

$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

$$\Rightarrow \underbrace{P(B)}_{A \cup (B \setminus A)} \underset{\text{Add.}}{=} P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

$\square$

- $\boxed{\text{Für } A \in \mathcal{A} \text{ ist } 0 \leq P(A) \leq 1.}$

Beweis:

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow 0 \underset{1.)}{\leq} P(A) \leq P(\Omega) \underset{2.)}{=} 1$$

$\square$

- $\boxed{\text{Für } A \in \mathcal{A} \text{ gilt } P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A).}$

Beweis:

$A \cap (\Omega \setminus A) = \emptyset, \quad A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$

$$\Rightarrow 1 = P(\underbrace{\Omega}_{= A \cup (\Omega \setminus A)}) = P(A) + P(\Omega \setminus A)$$

$$\Rightarrow P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A).$$

$\square$

Wie konstruiert man Wahrscheinlichkeitsräume?

$\Omega \neq \emptyset$

$\mathcal{A}_0$ Familie von Teilmengen von Ω (genügend schöne Eigenschaften).

$P_0 : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ (genügend schöne Eigenschaften).

Man kann zeigen: $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}_0$ enthält, $\exists$ Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mit $P(A) = P_0(A) \ \forall A \in \mathcal{A}_0$.

Beispiele:

- Würfeln: $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Wahrscheinlichkeitsraum

  $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ (Potenzmenge, alle Mengen von Ω)
  σ-Algebra

  Für $A \in \mathcal{A}$ setze $P(A) := \frac{\text{card } A}{6}$

  (card(A) ... Anzahl der Elemente von A, $|A|$, $\# A$)

- Glücksrad: $\Omega := [0,1)$.

  $\mathcal{A}_0 = \{[a,b) : \ldots\}$

  $P([a,b)) := b - a$

Stetigkeitseigenschaft: (Funktionswert u Limes kann man vertauschen)

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie in $\mathcal{A}$

1.) Falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, dann gilt

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2.) Falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, dann gilt

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Beweis:

1.) Setze $B_1 := A_1$ und für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ setze

$B_n := A_n \setminus A_{n-1}$.

$(B_n)_n$ paarweise disjunkt, weil: $j \neq k$ o.B.d.A $j < k$

$B_j \subseteq A_j \subseteq A_{k-1}$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1} \Rightarrow B_j \cap B_k = \emptyset$.

Behauptung: $\bigcup_{j=1}^{\infty\, n} B_j = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty\, n} A_j}_{= A_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis d. Beh:

Sei $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty n} \underbrace{B_j}_{\subseteq A_j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty n} A_j$.

Sei $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty n} A_j$. Wähle j minimal mit $\omega \in A_j$ $(j \leq n)$.

Falls $j = 1$, dann $\omega \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j$.

Falls $j > 1$, dann $\omega \in A_j \setminus A_{j-1} = B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty n} B_j$. ◇

$$\underbrace{P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)}_{= \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \underset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)}_{= P(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} B_j}_{= A_n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2) $\Omega \setminus A_1 \subseteq \Omega \setminus A_2 \subseteq \Omega \setminus A_3 \subseteq \ldots$

$$\overset{1)}{\Rightarrow} P(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_j)) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{P(\Omega \setminus A_n)}_{= 1 - P(A_n)} =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

$$\Omega \setminus (\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_j)$$

$$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_j)}_{= \Omega \setminus (\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)}) = 1 - P(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)$$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$ □

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Familie in $\mathcal{A}$. Dann gilt $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Beweis:

Definiere $B_1 := A_1$ und für $n \in \mathbb{N}, n>1$: $B_n := A_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$.

$(B_n)_n$ sind paarweise disjunkt: $j \neq k$, o.B.d.A $j<k$

$\Rightarrow B_j \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \Rightarrow B_j \cap B_k = \emptyset$.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, weil $\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n}_{\subseteq A_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und

sei $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Wähle j minimal mit $w \in A_j$.

Falls $j=1 \Rightarrow w \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Falls $j>1 \Rightarrow w \in A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k = B_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$$P(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \underset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(\underbrace{B_n}_{\subseteq A_n})}_{\leq P(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

$\square$

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Familie in $\mathcal{A}$.

1.) Falls $P(A_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

2.) Falls $P(A_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Beweis:

1.) $0 \leq P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(A_n)}_{=0} = 0$

2.) $P(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}_{= \Omega \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Omega \setminus A_n))}) = 1 - P(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Omega\setminus A_n)}) = $

$P(\Omega \setminus A_n) = 1 - P(A_n) = 0$

Komplement   De Morgan: $C(A \cap B) = CA \cup CB$

$$\Rightarrow 1 - \underbrace{P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n)\Big)}_{\overset{!}{=} 0} = 1$$

$\square$

$P(A) = 0$ ... A tritt fast sicher nicht ein (A tritt P-fast sicher nicht ein).

$P(A) = 1$ ... A tritt fast sicher ein.

Modell des Immer wieder Wiederholens

(bei Prüfung: allg. Fall)
(∞ - oft $\to$ abzählbar)

Spezialfall: Immer wieder Würfeln

$\tilde{\Omega} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_n \in \{1,2,3,4,5,6\} \; \forall n\}$
↳ überabzählbar viele

$\tilde{\Omega}$ hat überabzählbar viele Elemente.

Für $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ definiere

$[\alpha_1, \dots, \alpha_n] := \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \tilde{\Omega} : \omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2, \dots, \omega_n = \alpha_n\}$

$\omega_{n+1} \dots$ ist egal!!

A ... beim 2. Versuch kommt 5er

$A = [1,5] \cup [2,5] \cup [3,5] \cup [4,5] \cup [5,5] \cup [6,5]$.

$\mathcal{A}$ sei die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen der Form $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ enthält.

$P([\alpha_1, \dots, \alpha_n]) := \left(\frac{1}{6}\right)^n$

P kann zu Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ fortgesetzt werden.

$P(\underbrace{\text{es kommt nie ein Sechser}}_{= A})$

$A = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_n \in \{1, 2, \dots 5\} \; \forall n\}$ besitzt überabzählbar
überabzählbar

viele Elemente („große Menge")

$P(A) \leq P$ (bei den ersten n Versuchen kein 6-er) $= \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow P(A) = 0.$

!**allgemeines Modell:**

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (Versuch 1x durchführen)

Immer wieder wiederholen $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$

(formaler: $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, P^{\mathbb{N}})$)

$\tilde{\Omega} := \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) : \omega_n \in \Omega \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

Für $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ definiere Zylindermenge

$[A_1, A_2, \dots, A_n] := \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \tilde{\Omega} : \underset{\text{1. Versuch in } A_1}{\omega_1 \in A_1}, \dots, \omega_n \in A_n\}$.

$\tilde{\mathcal{A}}$ sei die kleinste σ-Algebra, die alle Zylindermengen enthält.

$$\tilde{P}([A_1, A_2, \dots, A_n]) := \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$$

$\tilde{P}$ kann zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\tilde{\mathcal{A}}$ fortgesetzt werden.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

$N_n(A) \approx \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0$

Null-Eins-Gesetz

SATZ

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $A \in \mathcal{A}$.

1.) Falls $P(A) > 0$, dann ist

$$\tilde{P}(\{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \tilde{\Omega} : \exists j \text{ mit } \omega_j \in A\}) = 1.$$

2.) Falls $P(A) = 0$, dann ist

$$\tilde{P}(\{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \tilde{\Omega} : \exists j : \omega_j \in A\}) = 0.$$

WH, dass es irgendwann kommt

Beweis:

$$\tilde{A} := \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \tilde{\Omega} : \exists j \text{ mit } \omega_j \in A\} = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\Omega, \Omega, \ldots, \Omega, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{A}]}_{\in \tilde{\mathcal{A}}} \in \tilde{\mathcal{A}}$$

1.) $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{A} \subseteq [\underbrace{\Omega \setminus A, \Omega \setminus A, \ldots, \Omega \setminus A}_{n\text{-mal}}] \quad \forall n$

$$\tilde{P}(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{A}) \leq \tilde{P}([\Omega \setminus A, \ldots, \Omega \setminus A]) \overset{\text{Produkt von 1 WM}}{=} \underbrace{P(\Omega \setminus A)}_{= 1 - P(A)}{}^n = (\underbrace{1 - P(A)}_{< 1})^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow 0 = \tilde{P}(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{A}) = 1 - \tilde{P}(\tilde{A}) \Rightarrow \underline{\tilde{P}(\tilde{A}) = 1}.$$

2.) $\tilde{P}([\Omega, \Omega, \ldots, \Omega, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{A}]) \overset{\text{Produkt}}{=} P(A) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{P}(\tilde{A})} = \tilde{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [\Omega, \ldots, \Omega, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{A}]\Big) = \underline{0}.$$

$\square$

$P(A)$	min. Anzahl der Versuche bis Wahrscheinlichkeit, dass A irgendwann nicht eintritt $\geq \frac{1}{2}$
0,99	69
0,999	693
0,9999	6932
0,999999 = $= 1 - 10^{-6}$	693 147

3.) Endliche Mengen, gleichwahrscheinliche Ereignisse

$\Omega \neq \emptyset$, endlich. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Für $A \in \mathcal{A}$ $(A \subseteq \Omega)$ setze $P(A) := \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: $\boxed{\text{„}P = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}\text{“}}$

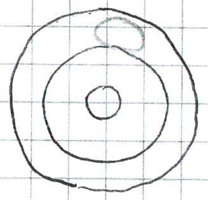
→ Spezialfall, da endl. Menge und gleichwahrscheinl. Ereignisse

4.) Wahrscheinlichkeiten auf Grund geometrischer Eigenschaften

$\Omega \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$, $|A|$ ... Länge in $\mathbb{R}$, Fläche in $\mathbb{R}^2$, Volumen in $\mathbb{R}^3$

Zielscheibe:



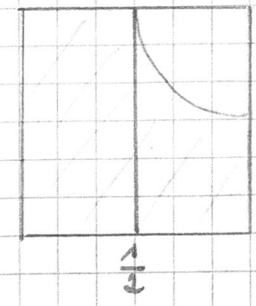
geom. WH hier nicht sinnvoll

Beispiel:

Wir wählen zufällig (gleichverteilt) zwei Zahlen $\in [0,1]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Produkt $\leq \frac{1}{2}$ ist?

Zwei Zahlen x, y in $[0,1]$ wählen, heißt $\binom{x}{y}$ zufällig in $[0,1]^2$ wählen.

$xy \leq \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2x})$



$|\Omega| = |[0,1]^2| = 1$

$$|A| = \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log x \Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\log \frac{1}{2}}_{-\log 2} =$$

$$= \frac{1 + \log 2}{2} \approx 0{,}8466.$$

Beispiel: (Kreissehne)

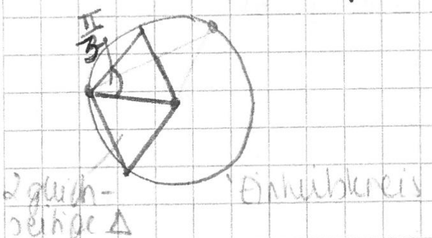
Wir haben einen Kreis. Wir wählen zufällig eine Sehne.

P(Sehne ≤ Radius)?

o.B.d.A.: Radius = 1.

__1. Möglichkeit:__

Wählen zufällig 2 Punkte am Kreis.

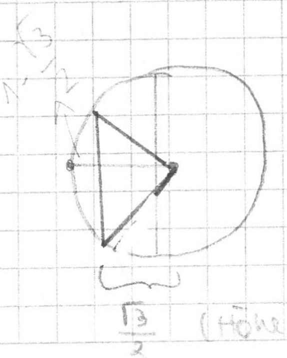


$2 \cdot \frac{\pi}{3}$ (Zentriwinkel)

$$P = \frac{\overbrace{\frac{2\pi}{3}}^{\text{Kreisbogen}}}{\underbrace{2\pi}_{\text{Umfang}}} = \frac{1}{3}$$

__2. Möglichkeit:__

Zufällig Punkt am Rand wählen, mit Mittelpunkt verbinden, wähle zufällig Punkt auf Verbindungsstrecke, Senkrechte darauf ist Sehne

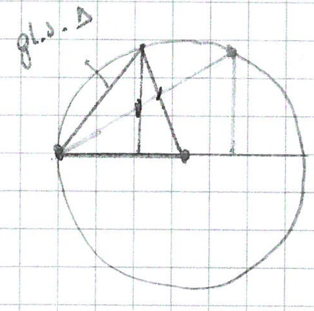


$$P = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\underbrace{1}_{\text{Radius}}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}1340$$

3. Möglichkeit:

Wir wählen zufällig einen Durchmesser (Punkt am Rand) zufällig Punkt darauf wählen, senkrechte darauf

$\rightarrow$ erhalte 2. Punkt d. Sehne



$$p = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

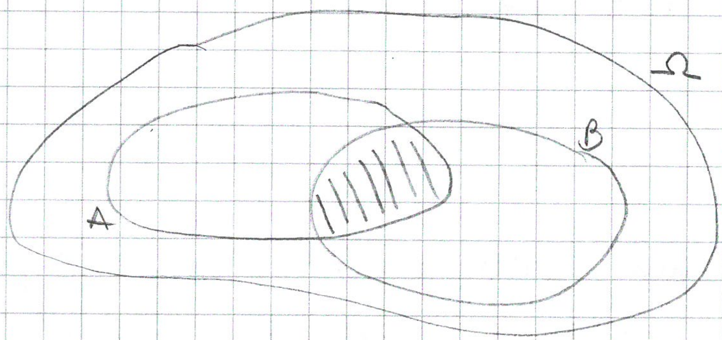
$\rightarrow$ 3 verschiedene Ergebnisse!!

FEHLER: es müsste genauer gesagt werden, was „zufällig wählen" bedeutet!!!

5.) Bedingte Wahrscheinlichkeit

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$.

Wir wissen B ist eingetreten. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit von A?



„naive Herleitung":

$$P(A|B) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A\cap B)}{N_n(B)} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A\cap B)}{n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(B)}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$P(B) > 0$

$$= \frac{\frac{N_n(A\cap B)}{n}}{\frac{N_n(B)}{n}}$$

Definition:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$.
Dann heißt: $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

[redacted]

Wir erhalten: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $A, B \in \mathcal{A}$ heißen <u>unabhängig</u>, falls $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
Eine <u>Familie $(A_j)_{j \in J}$</u> in $\mathcal{A}$ heißt <u>unabhängig</u>, falls $\forall$ endlich $J' \subseteq J$ gilt: $P\left(\bigcap_{j \in J'} A_j\right) = \prod_{j \in J'} P(A_j)$.

A_1, A_2, A_3 unabhängig, falls:
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$,
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$.

Beispiel:

Wir werfen mit 2 Münzen.

$A_1 \ldots$ 1. Münze E $(1/2)$

$A_2 \ldots$ 2. Münze E $(1/2)$

$A_3 \ldots$ genau 1 Münze E $\left(\frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right)$

$P(\underbrace{A_1 \cap A_3}_{=\{EZ\}}) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_3)$,

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$,

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$.

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$. Dann sind A, B genau dann unabhängig, wenn $P(A|B) = P(A)$.

Beweis:

$\Rightarrow$: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{A,B \text{ unabh.}}{=} \dfrac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$.

$\Leftarrow$: $P(A \cap B) = P(B) \cdot \underbrace{P(A|B)}_{=P(A)} = P(B) \cdot P(A)$

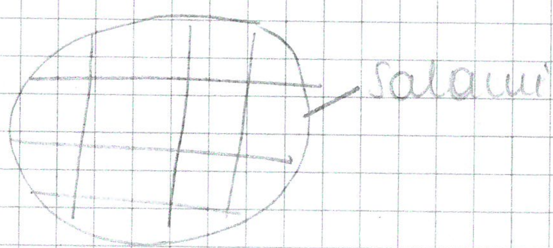
$\square$

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine (endliche) Familie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ heißt (endliche) Zerlegung (Partitionen) von Ω, falls:

1.) $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$ $\quad (P(C_1 \cap C_2) = 0)$

2.) $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \Omega$ $\quad (P(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) = 1)$



Multiplikationssatz

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Dann gilt:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Beweis:

Für $1 \leq k \leq n-1$ mit $A_1 \cap \ldots \cap A_k \supseteq A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}$

$\Rightarrow P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \geq P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0.$

$$\cancel{P(A_1)} \cdot \underbrace{P(A_2 | A_1)}_{= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{\cancel{P(A_1)}}} \cdot \underbrace{P(A_3 | A_1 \cap A_2)}_{= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}_{= \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}} =$$

$$= P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

$\square$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Proposition

> Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{C}$ (endl.) Zerlegung mit $P(C) > 0 \quad \forall C \in \mathcal{C}$. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt
> $$P(A) = \sum_{C \in \mathcal{C}} P(C) \cdot P(A|C).$$

Beweis:

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \cancel{P(C)} \cdot \underbrace{P(A|C)}_{= \frac{P(A \cap C)}{\cancel{P(C)}}} = \sum_{C \in \mathcal{C}} P(A \cap C) \underset{\mathcal{C} \text{ paarw. disjunkt}}{=}$$

$$= P\Big(\underbrace{\bigcup_{C \in \mathcal{C}} (A \cap C)}_{= A \cap (\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C)}\Big) = \underbrace{P(A \cap (\underbrace{\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C}_{\Omega}))}_{= A} = P(A)$$

$\square$

Satz von Bayes

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$.

1.) Für $B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$ gilt: $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$

2.) Falls $\mathcal{C}$ eine (endl.) Zerlegung mit $P(C) > 0$ $\forall C \in \mathcal{C}$ ist, dann gilt für $C_0 \in \mathcal{C}$:

$$P(C_0|A) = \frac{P(C_0) \cdot P(A|C_0)}{\sum_{C \in \mathcal{C}} P(C) \cdot P(A|C)}.$$

wie Bsp mit Spaghetti

Beweis:

1.) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$

2.) $P(C_0|A) \underset{1.)}{=} \frac{P(C_0) \cdot P(C_0|A)}{P(A)} \underset{\text{Satz v.d. totalen Wkt}}{=}$

$$= \frac{P(C_0) \cdot P(A|C_0)}{\sum_{C \in \mathcal{C}} P(C) \cdot P(A|C)}$$

$\square$

Beispiel:

mittelalterlicher Kerker, A, B, C in Einzelhaft, zum Tode verurteilt, 2 hingerichtet, 1 zu lebenslanger Haft begnadigt, durch Zufall entschieden.

Wärterin sagt A: „B wird hingerichtet".

P(A wird hingerichtet)?

1. Möglichkeit: $P = \frac{1}{2}$ (Gleichwahrscheinlichkeit?) FALSCH

2. Möglichkeit: $P = \frac{2}{3}$ (wir haben keine brauchbare Information)

3. Möglichkeit:

Def. für bed. WH

A u. B hingerichtet (Dummheit)

$P = (A \text{ wird hingerichtet} \mid B \text{ hingerichtet}) = \dfrac{P(C \text{ begnadigt})}{P(B \text{ hingerichtet})} =$

$= \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ FALSCH (Bedingung!!)

4. Möglichkeit RICHTIG

$P(A \text{ hingerichtet} \mid \text{Wärterin sagt: „B wird hingerichtet"}) =$

$$= \frac{\frac{1}{3} \ (C \text{ begnadigt})}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1} = \underline{\frac{2}{3}}$$

A begnadigt, Wärter sagt.., B begnadigt, C begnadigt, Wärter sagt..

Wärter sagt: „B hingerichtet"

- A begnadigt
- B begnadigt
- C begnadigt

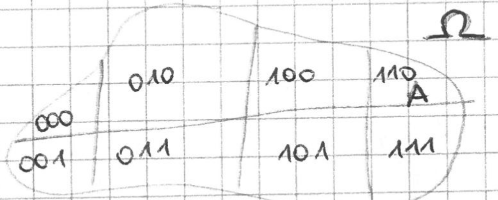
disjunkt

6.) Entropie

Definition

> $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathcal{A}$, $p := P(A)$. Dann heißt $\underline{-\log p}$ die Information, die das Ergebnis A liefert.

$p = \frac{1}{8}$



$3 = -\log_2 \frac{1}{8}$

3 Stellen notwendig

↳ nur 0,1 zur Verfügung

endliche Mengen $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. $p_j := P(\{\omega_j\})$.

$p_j \geq 0 \ \forall j$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Definition

$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ heißt <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung</u>, falls $p_j \geq 0$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ Wahrscheinlichkeitsverteilung : def. $P(\{\omega_j\}) = p_j$ ($P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$), erhalte Wahrscheinlichkeitsmaß.

$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ Wahrscheinlichkeitsverteilung : durchschnittliche Information

$$-p_1 \cdot \log p_1 - p_2 \cdot \log p_2 - \dots - p_n \log p_n$$

!! Definition

Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann heißt

$h\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} := -\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log p_j$ die <u>Entropie</u> von $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$,

wobei $-0 \cdot \log 0 = 0$.

j-ter Fall tritt ein mit WK p_j

→ Entropie gibt durchschnittliche Information

Lemma

$$\lim_{x \to 0^+} (-x \cdot \log x) = 0$$

<u>Beweis</u>:

$$\lim_{x \to 0^+} (-x \cdot \log x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\log x}{\frac{1}{x}} \quad \left(= \text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"}\right) \overset{\text{de l'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}_{= x} = 0.$$

$\square$

(bei Prüfung auswendig)

Satz

Für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ gilt $h\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \le \log n$. Weiters gilt $h\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \log n$ genau dann, wenn $p_j = \frac{1}{n} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

↳ $p_1, \dots, p_n$ sind alle gleich wh; ⇒ Extremwertaufgabe

⇒ größte durchschnittliche Info

Beweis:

Induktion nach n:

$n = 1$: $p_1 = 1$

$$h(\underbrace{p_1}_{=1}) = -1 \cdot \log 1 = 0 = \log 1$$

Sei $n > 1$: Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

$(F = f - \lambda g)$ ↳ Nebenbedingung

setzen und $=0$ umformen

$$F\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \lambda \end{pmatrix} := -\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \log p_k - \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} p_k - 1\right)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial p_j} = -\log p_j - \cancel{p_j} \cdot \frac{1}{\cancel{p_j}} - \lambda \cdot 1 = -\log p_j - \lambda - 1$$

part. Abl. Produktregel

$$\Rightarrow \log p_j = -\lambda - 1 \Rightarrow p_j = e^{-\lambda - 1}$$ (unabh. von j → gleich wh)

in Nebenbed.

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{p_j}_{e^{-\lambda-1}} = n \cdot e^{-\lambda - 1} \Rightarrow e^{-\lambda - 1} = \frac{1}{n}$$

↳ wegen Summe

$$\Rightarrow p_j = \frac{1}{n} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$h\begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \underbrace{\log \frac{1}{n}}_{= -\log n} = \log n.$$

n-mal ⇒ $\frac{1}{n} \cdot n = 1$ (wegen Summe)

Rand: $\exists j$ mit $p_j = 0$.

(wäre $p_j = 1$ ⇒ alle $p_i = 0$ (da Summe 1) ⇒ $p_j = 0$!)

$$h\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k = -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} p_k \log p_k \underset{\text{Ind. vor.}}{\leq} \log(n-1) < \log n$$

Daher ist das Maximum von h bei $\begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$ und hat den Wert $\log n$.

$\square$

$\Rightarrow$ nicht 2. Ableitung anschauen $\Rightarrow$ gibt nur lokale Min/Max

II. KOMBINATORIK

Beispiel

17 Eier : 4 blaue, 3 gelb, 5 grün, 5 rot anmalen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

$$\underbrace{\frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{\underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{=4!}}}_{\text{blaue Eier}} \cdot \underbrace{\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!}}_{\text{gelbe Eier}} \cdot \underbrace{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!}}_{\text{grüne Eier}} \cdot \underbrace{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot}{5!}}_{\text{rote Eier}}$$

Anzahl d. Möglichkeiten

$$= \frac{17!}{4! \cdot 3!\, 5! \cdot 5!} = 171\,531\,360$$

23.3.10

Binomialkoeffizienten

$n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$

$$\binom{n}{0} := 1, \quad k \geq 1: \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)}{k!}$$

$$= \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \underbrace{(k+n-k)}_{=n} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}. \qquad \square$$

Pascal'sches Dreieck

0.				$1 = \binom{0}{0}$					
1.				$1 = \binom{1}{0}$		$1 = \binom{1}{1}$			
2.			1		2		1		
3.		1		3		3		1	
4.	1		4		6		4		1

endliche Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \neq \emptyset$
Wir ziehen k Elemente $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.
mit / ohne Zurücklegen, geordnete / ungeordnete Stichprobe

1.) Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Proposition

$n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es n^k geordnete Stichproben vom Umfang k einer n-elementigen Menge mit Zurücklegen.

Beweis:

1. Zug : n Möglichkeiten
2. Zug : n Möglichkeiten
⋮
k-ter Zug : n Möglichkeiten

Daher insgesamt n^k Möglichkeiten (formaler: Induktion nach k)

$\square$

Beispiel

Wieviele Möglichkeiten gibt es einen Totoschein auszufüllen?

12 Spiele, jeweils $\{1, 2, x\}$

$3^{12} = 531\,441$ Möglichkeiten

Verallgemeinerung:

1. Zug: aus Ω_1 mit n_1 Elementen,

2. Zug: aus Ω_2 mit n_2 Elementen,

$\vdots$

k-ter Zug: aus Ω_k mit n_k Elementen.

Dafür gibt es $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten.

2.) Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Proposition

$n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten für eine geordnete Stichprobe vom Umfang k aus einer n-elementigen Menge ohne Zurücklegen.

Beweis:

1. Zug: n Möglichkeiten

2. Zug: $n-1$ Möglichkeiten

$\vdots$

k-ter Zug: $n-k+1$ Möglichkeiten

Insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten

$\square$

Eine Permutation einer Menge Ω ist eine bijektive Funktion $\Omega \to \Omega$.
Endliche Menge $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$.

$(f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n))$
↳ Permutation einer n-elementigen Menge = geordnete Stichprobe vom Umfang n einer n-elementigen Menge ohne Zurücklegen

Korollar

$n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $n!$ Permutationen einer n-elementigen Menge.

Beweis:
Prop. $\Rightarrow$ Es gibt $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$ Möglichkeiten. □

3.) Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Proposition

$n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ ungeordnete Stichproben vom Umfang k einer n-elementigen Menge ohne Zurücklegen.

Beweis:
$\exists \frac{n!}{(n-k)!}$ geordnete Stichproben.
$(a_1, a_2, \dots, a_k)$ so eine geordnete Stichprobe
Wieviele Möglichkeiten gibt es dieselben Elemente in einer anderen Reihenfolge anzuordnen?
Das sind $k!$ Möglichkeiten.

Also gibt es $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Möglichkeiten für ungeordnete Stichproben. $\square$

Beispiel

Lotto

Verallgemeinerung:

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

r Klassen:

1. Klasse: n_1 Elemente

2. Klasse: n_2 Elemente

$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

$\vdots$

r-te Klasse: n_r Elemente

(Permutation mit Wiederholung)

Proposition

$n, r \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$. Dann gibt es $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$ Möglichkeiten eine n-elementige Menge in r Klassen einzuteilen, wobei n_1 Elemente in die 1. Klasse, n_2 in die 2. Klasse, ..., n_r in die r-te Klasse kommen.

Beweis:

in die 1. Klasse: $\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n_1+1)}{n_1!}$

in die 2. Klasse: $\frac{(n-n_1) \cdot \ldots \cdot (n-n_1-n_2+1)}{n_2!}$

$\vdots$

in die r-te Klasse: $\frac{n_r \cdot (n_r-1) \dots 1}{n_r!}$

insgesamt $\dfrac{n(n-1)\dots(n-n_1+1)(n-n_1)\dots\dots 1}{n_1!\cdot n_2!\cdot\dots n_r!} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\dots n_r!}$

Möglichkeiten.

$\square$

Beispiel:

Eier anmalen

4.) Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Proposition

> $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben vom Umfang k einer n-elementigen Menge mit Zurücklegen.

Beweis:

Induktion nach k:

$k=1$: $\quad n = \binom{n+1-1}{1}$ Möglichkeiten

Sei $k>1$: $\quad$ 1. Zug: w_1: $\binom{n+k-2}{k-1}$ Möglichkeiten

(das sind alle Möglichkeiten, bei denen w_1 vorkommt)

1. Zug: w_2: $\binom{n+k-3}{k-1}$ Möglichkeiten

(alle, bei denen w_1 oder w_2 vorkommt)

1. Zug: w_{n-1}: $\binom{n+k-1-(n+1)}{k-1} = \binom{k}{k-1}$ Möglichkeiten

1. Zug: w_n: $1 = \binom{k}{k}$ Möglichkeiten

Insgesamt gibt es daher:

$$\binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-3}{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k-1} + \underbrace{\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}}_{=\binom{k+1}{k}} =$$

$$\binom{k+1}{k-1} + \binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k}$$

$$\binom{n+k-3}{k-1} + \dots = \binom{n+k-2}{k}$$

$$\binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

$\Leftrightarrow \binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten. $\square$

Beispiel

Möglichkeiten für das Werfen von 2 Würfeln $((4,3) \equiv (3,4))$

$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten (¬ gleich wahrscheinlich)

Menge mit 6 Elementen

Werfen mit 3 Würfeln: $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$ Möglichkeiten

Ergänzung zu 3.) 24.3.

ungeordnete Stichprobe vom Umfang k einer n-elementigen Menge:

Einteilung in 2 Klassen

1. Klasse: gezogene Elemente : k

2. Klasse: nicht gezogene : n-k

Dafür gibt es $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

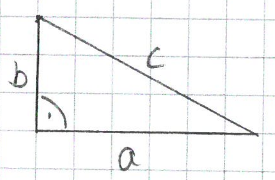
III. ZUFALLSVARIABLE ⇒ Großbuchstaben!

Zufallsvariable, zufällige Veränderliche

1.) Naiver Zugang:

Variable: können damit Sachverhalte einfacher und exakter darstellen

z.B.:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$x = 4$: kann richtig oder falsch sein

$X = 4$ ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $(P(X=4))$ richtig.

Variable: x, Zufallsvariable X

Beispiel

- X ... Augenzahl beim Würfeln !
- $X = \begin{cases} 1, & \text{falls ein Sechser kommt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- X ... Anzahl der Versuche, bis das erste Mal ein Sechser kommt
- Eine Maschine erzeugt Nägel. Die Länge der Nägel hängt vom Zufall ab.
  $P(X \leq 4)$
  Was ist hier $(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

Mit Zufallsvariablen kann man „rechnen"

Variablen: $x + 2y = 25 \iff y = \frac{25-x}{2}$

Zufallsvariable: $X + 2Y = 25 \iff Y = \frac{25-X}{2}$

$$P(X+2Y=25) = P\left(Y = \frac{25-X}{2}\right)$$

2.) Axiomatische Definition

Zufallsvariable kann man auf (fast) beliebigen Mengen definieren. Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit Zufallsvariablen in $\mathbb{R}$ (manchmal in $\mathbb{R}^n$, manchmal $\pm\infty$ zugelassen).

Definition

> Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable (zufällige Veränderliche), falls $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Man definiert: $\{X \leq \alpha\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}$
$\phantom{Man definiert: \{X} <, >, \geq, = \qquad\qquad <, >, \geq, =$

$B \subseteq \mathbb{R}$ $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$.

$\{X \leq \alpha\} = \{X \in (-\infty, \alpha]\}$

$P(X \leq \alpha) := P(\{X \leq \alpha\})$
$ <, >, \geq, = \qquad\qquad <, >, \geq, =$

$P(X \in B) := P(\{X \in B\})$

Beispiele:

- X ... Augenzahl beim Würfel. $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{6}.$$

$X(\omega) := \omega.$

•) $X = \begin{cases} 1, & \text{falls 6-er kommt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ wie oben

$$X(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega = 6 \\ 0, & \text{falls } \omega \in \{1, 2, \dots, 5\}. \end{cases}$$

tatsächlicher Wert

X... Zufallsvariable, $X(\omega)$... Realisierung von X

•) X... Anzahl der Versuche bis das erste Mal ein Sechser kommt

$\tilde{\Omega} := \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_n \in \{1, \dots, 6\}\}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ die von den Zylindermengen erzeugte σ-Algebra, $\tilde{P}$ das passende Wahrscheinlichkeitsmaß

$X((\omega_1, \omega_2, \dots)) := n$, falls $\omega_n = 6$ und $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1} \in \{1, 2, \dots, 5\}$

($X = +\infty$, falls $\omega_n \in \{1, 2, \dots, 5\}\ \forall n$).

$$\{X \le \alpha\} = \{X \le \underbrace{\lfloor \alpha \rfloor}_{=n}\} = [\underbrace{\{1, \dots, 5\}, \dots, \{1, \dots, 5\}}_{n-1}, \{6\}] \cup$$

$$\cup [\underbrace{}_{n-2}, \{6\}] \cup [\{6\}] \in \mathcal{A}$$

•) $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ wie zuvor

$X((\omega_1, \omega_2, \dots)) := \omega_{10}$

X... Augenzahl beim 10. Wurf

•) X... Länge d. Nagels

Oje, da müssen wir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suchen!

•) X... Augensumme beim Werfen mit 2 Würfeln

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$,

„P = Laplace-Wh"

$X((w_1, w_2)) := w_1 + w_2$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \{X \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall \alpha: \{X < \alpha\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall \alpha: \{X \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}: \{X > \alpha\} \in \mathcal{A}$

Modell des Immer Wiederholens

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $\tilde{X}_n: \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\tilde{X}_n((w_1, w_2, \ldots)) := X(w_n)$.

($\tilde{X}_n$ ist die Zufallsvariable X beim n-ten Versuch)

$\{\tilde{X}_n \leq \alpha\} = [\underbrace{\Omega, \ldots, \Omega}_{n-1\text{-mal}}, \underbrace{\{X \leq \alpha\}}_{\in \mathcal{A}}] \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow \tilde{X}_n$ Zufallsvariable

$(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$.

X, Y Zufallsvariable $\Rightarrow cX, X+Y, X \cdot Y$ $(\Rightarrow X^2, X^n)$, $|X|$,

$\min\{X, Y\}$, $\max\{X, Y\}$ $\left(= \frac{X+Y+|X-Y|}{2}\right)$,

$(\sin X, e^X)$ Zufallsvariable

Beweis:

•) $\underline{cX}$: $c > 0$: $\{cX \leq \alpha\} = \{X \leq \frac{\alpha}{c}\} \in \mathcal{A}$

$c = 0$: $\{cX \leq \alpha\} = \begin{cases} \alpha < 0 : & \emptyset \in \mathcal{A} \\ \alpha \geq 0 : & \Omega \in \mathcal{A} \end{cases}$

$c < 0$: $\{cX \leq \alpha\} = \{X \geq \frac{\alpha}{c}\} \in \mathcal{A}$

•) $\underline{X+Y}$: Behauptung: $\{X+Y \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{X \leq q\} \cap \{Y \leq \alpha - q + \frac{1}{n}\}\right)$

Beweis: Sei $\omega \in$ linke Seite. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Setze $k := [\, n\, X(\omega)\,]$ (Gauß-Klammer) und

$q := \frac{k+1}{n}$.

$$k \leq n\, X(\omega) < k+1 \Rightarrow q - \frac{1}{n} \leq X(\omega) < q$$

$$X(\omega) + Y(\omega) \leq \alpha \Rightarrow Y(\omega) \leq \alpha - \underbrace{X(\omega)}_{\geq q - \frac{1}{n}} \leq \alpha - q + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \omega \in \{X \leq \underbrace{q}_{\in \mathbb{Q}}\} \cap \{Y \leq \alpha - q + \tfrac{1}{n}\}$$

Also $\omega \in$ rechte Seite.

Sei $\omega \in$ rechte Seite. Sei $n \in \mathbb{N}$.

$\exists q_n : \omega \in \{X \leq q_n\} \cap \{Y \leq \alpha - q_n + \frac{1}{n}\}$

$$\underbrace{X(\omega)}_{\leq q_n} + \underbrace{Y(\omega)}_{\leq \alpha - q_n + \frac{1}{n}} \leq \alpha + \frac{1}{n} \quad \forall n \Rightarrow X(\omega) + Y(\omega) \leq \alpha$$

$\Rightarrow \omega \in$ linke Seite. $\diamond$

$$\{X + Y \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\underbrace{\{X \leq q\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y \leq \alpha - q + \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{A}} \big) \in \mathcal{A}$$

Daher ist $X + Y$ Zufallsvariable.

•) $X \cdot Y$: 3 Fälle $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$

$\alpha > 0$: $$\{XY < \alpha\} = (\{X \leq 0\} \cap \{Y \geq 0\}) \cup (\{X \geq 0\} \cap \{Y \leq 0\}) \cup$$
$$\cup \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \big(\underbrace{\{0 \leq X \leq q\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{0 \leq Y \leq \tfrac{\alpha + \frac{1}{n}}{q}\}}_{\in \mathcal{A}} \big) \Big) \cup$$

$$\cup \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q < 0}} \big(\{q \leq X \leq 0\} \cap \{\tfrac{\alpha + \frac{1}{n}}{q} \leq Y \leq 0\} \big) \Big) \in \mathcal{A}$$

Daher ist $X \cdot Y$ Zufallsvariable.

Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$

Wir wollen $[a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ in unserer σ-Algebra.

$\mathcal{B}$ sei die kleinste σ-Algebra, die alle Intervalle der Form $[a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ enthält.

$\mathcal{B}$ heißt σ-Algebra der Borelmengen, $B \in \mathcal{B}$ ... Borelmenge

$\mathcal{B}$ ist auch die von

offenen Intervalle
abgeschlossenen Intervalle
offenen Mengen
abgeschlossenen Mengen

erzeugte σ-Algebra.

Beweise:

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[a+\tfrac{1}{n}, b)}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n=-\infty}^{[a]} [n-1, n) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} [[a], a+\tfrac{1}{n})$$

! $\forall \alpha : \{X \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \iff \forall B \in \mathcal{B} : \{X \in B\} \in \mathcal{A}$.

$\{X \in B\} = X^{-1}(B)$

Definition ($\to$ für Prüfung)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $M \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf M. Dann heißt $X: \Omega \to M$ Zufallsvariable, falls $\forall B \in \mathcal{B} : \{X \in B\} \in \mathcal{A}$.

formale DEF

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{X \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B} : \{X \in B\} \in \mathcal{A}$

$(A, \mathcal{A})$, $(B, \mathcal{B})$ $f: A \to B$ messbar, falls $\forall C \in \mathcal{B}$
$f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

f stetig $\Rightarrow$ f messbar

f messbar (stetig) X Zufallsvariable $\Rightarrow$ $\underset{f \circ X}{\underline{f(X)}}$ Zufallsvariable

Für $\mathbb{R}$ (oder Teilmengen von $\mathbb{R}$) nimmt man immer die σ-Algebra der Borelmengen (wenn nichts anderes gesagt wird)

Auf einem metrischen (topologischen) Raum nennt man auch die σ-Algebra der Borelmengen (kleinste σ-Algebra, die von offenen Mengen erzeugt wird).

Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ $g(t) = P((-\infty, t])$

Man kann zeigen, falls $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

- falls $a \leq b$, dann ist $g(a) \leq g(b)$ (monoton wachsend)
- $\lim_{t \to -\infty} g(t) = 0$ und $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{t \to a^+} g(t) = g(a)$ (rechtsseitig stetig)

dann gibt es ein WH-Maß P_g auf $\mathbb{R}$ mit
$P_g((-\infty, a]) = g(a)$, mit P_g ist eindeutig bestimmt
$P_g((a, b]) := g(b) - g(a)$

- $P_g((a, b]) \geq 0$
- $P_g(\mathbb{R}) = 1$
- Für die σ-Additivität genügt es, die Stetigkeitseigenschaften nachzurechnen. Sei $(A_n = (a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (a, b]$.

Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} P_g(A_n) = P_g((a,b])$.

Beweis: o.B.d.A. $a_n = a \;\forall n$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{P_g(\underbrace{A_n}_{=(a,b_n]})}_{=g(b_n)-g(a)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} g(b_n)}_{g(b)} - \lim_{n\to\infty} g(a) = P_g((a,b]).$$

3.) Verteilungen, diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable auf Ω. Dann heißt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $F(t) := P(X \leq t)$ definiert ist, die Verteilung von X.

Will man besonders betonen, dass es sich um die Verteilung von X handelt, schreiben wir F_X.

! SATZ

Eine Fkt. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann Verteilung einer Zufallsvariablen, wenn F folgende Bedingungen erfüllt:

1.) Falls $a \leq b$, dann ist $F(a) \leq F(b)$ (monot. wachsend)

2.) $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$ und $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$

3.) $\forall a \in \mathbb{R}: \lim\limits_{t\to a^+} F(t) = F(a)$ (rechtsseitig stetig)

Beweis:

$\Rightarrow$: $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $F(t) = P(X \leq t)$

1.) $a \leq b \Rightarrow \{X \leq a\} \subseteq \{X \leq b\} \Rightarrow$

$F(a) = P(X \leq a) \leq P(X \leq b) = F(b)$

2.) F ist monoton wachsend, $0 \leq F(t) \leq 1$

$\Rightarrow \lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{n \to \infty} F(-n)$ existiert

von überabzählbar auf abzählbar reduzieren

$F(-n) = P(X \leq -n)$ $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq -n\} = \emptyset$

$\{X \leq -1\} \supseteq \{X \leq -2\} \supseteq \ldots$ werden immer kleiner

Stetigkeitseigenschaft $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} P(\{X \leq -n\}) =$

$\Rightarrow$ von Satz bevor

$= P(\emptyset) = 0$

also $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$

$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{n \to \infty} F(n)$ existiert

$\{X \leq 1\} \subseteq \{X \leq 2\} \subseteq \ldots$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq n\} = \Omega$

archim. Axiom (jede reelle Zahl besitzt eine natürl. Zahl, die größer ist)

Stetigkeitseigenschaft $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} P(\{X \leq n\}) = P(\Omega) = 1$,

daher $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$

3.) Sei $a \in \mathbb{R}$. Weil F monoton wachsend, und

$0 \leq F(t)$ $\forall t$ $\quad \lim_{t \to a^+} F(t) = \lim_{n \to \infty} F(a + \frac{1}{n})$ existiert

$\{X \leq a + \frac{1}{1}\} \supseteq \{X \leq a + \frac{1}{2}\} \supseteq \ldots$,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq a + \frac{1}{n}\} = \{X \leq a\}$

Stetigkeitseigenschaft $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} F(a + \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} P(\{X \leq a + \frac{1}{n}\}) =$

$= P(\{X \leq a\}) = F(a)$, und somit

$$\lim_{t \to a^+} F(t) = F(a)$$

$\Leftarrow$: Setze $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}$, $P := P_F$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ und durch $X(\omega) := \omega$ definiert.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$: $\{X \leq \alpha\} = (-\infty, \alpha] \in \mathcal{A}$

Sei $t \in \mathbb{R}$: $P(X \leq t)$ Gauß-Klammer

$$\{X \leq t\} := \bigcup_{n=-\infty}^{[t]} \{n-1 < X \leq n\} \cup \{[t] < X \leq t\}$$

$\Rightarrow$ paarweise disjunkt, abzählbar

$$P(X \leq t) \underset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{[t]} \underbrace{P(n-1 < X \leq n)}_{= F(n) - F(n-1)} + \underbrace{P([t] < X \leq t)}_{= F(t) - F([t])} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{n=-N}^{[t]} \left(F(n) - F(n-1)\right)}_{= F([t]) - F(-N-1)} + F(t) - F([t]) =$$

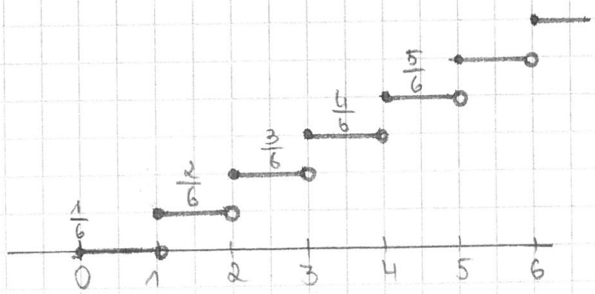
$$= F([t]) - \underbrace{\lim_{N \to \infty} F(-N-1)}_{= 0} + F(t) - F([t]) = F(t)$$

$\square$

14.4

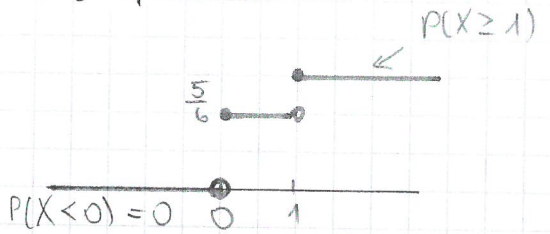
Beispiele:

- X ... Augenzahl beim Würfeln



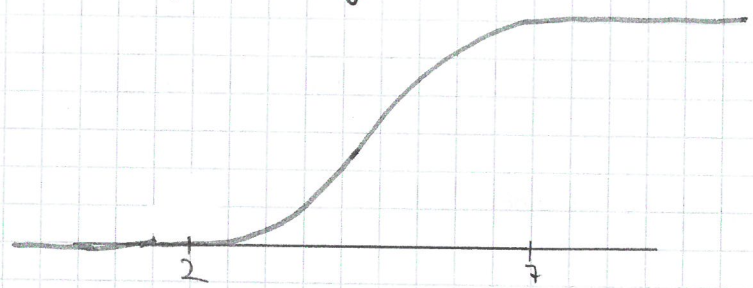
x-Achse = mögl. Ereignisse

•) $X = \begin{cases} 1, & \text{falls Sechser kommt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



$\Rightarrow$ VERTEILUNGSFKT.

•) X... Länge d. Nägel



•) $F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(t^2+1)^2}, & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2(t^2+1)^2}, & \text{für } t > 0 \end{cases}$

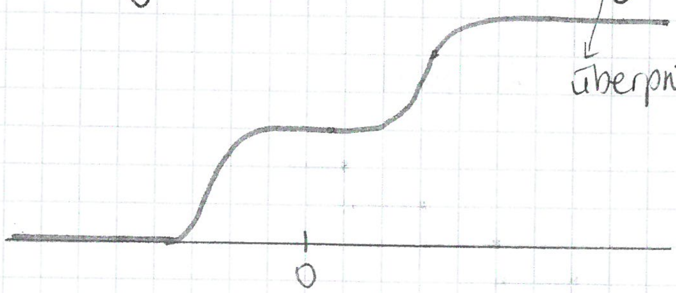
Verteilung einer Zufallsvariablen X, weil:

1.) monoton wachsend ✓

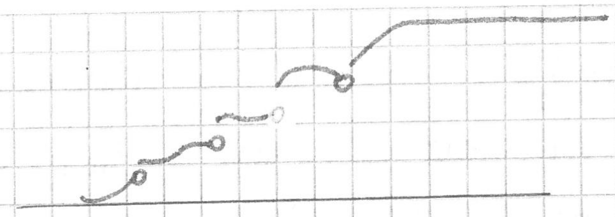
2.) $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$ ✓

3.) rechtsseitig stetig, weil F stetig ✓

überprüfe bei $\underline{\underline{0}}$



•)



weder diskret noch kontinuierlich!

Erinnerung an die Analysis:

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe.

Weiters seien $K(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{N}$.

$t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\begin{cases} t_0^+ & t_0 \in \mathbb{R} \\ t_0^- & t_0 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \\ -\infty & \end{cases}$$

t_0^+ : $t_0 < s < t \Rightarrow K(s) \subseteq K(t)$ und $\bigcap_{t > t_0} K(t) = \emptyset$

Dann ist $\lim_{t \to t_0^+} \sum_{n \in K(t)} a_n = 0$

Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable heißt diskret, falls sie nur endlich oder abzählbar viele Werte annimmt.

Werte: α_j , $(\alpha_j)_{j \in J}$

$p_j := P(X = \alpha_j)$ ... Wk, mit der α_j getroffen wird

$(p_j)_{j \in J}$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor (Dichte, Verteilung)

Eigenschaften: 1.) $p_j \geq 0 \quad \forall j \in J$

2.) $\sum_{j \in J} p_j = 1$

Umgekehrt: Erfüllt $(p_j)_{j\in J}$ 1.) und 2.), dann $\exists$ Zufallsvariable X, die $(p_j)_{j\in J}$ als Wahrscheinlichkeitsvektor hat.

Beweis:

Für $t \in \mathbb{R}$ setze $F(t) := \sum_{\substack{j\in J \\ \alpha_j \le t}} p_j$

- monoton steigend: $a \le b$

$$F(a) = \sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le a}} p_j \le \sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le b}} p_j = F(b)$$

- $$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} \sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le t}} p_j = 0$$

Beachte: $F(t) = \sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le t}} p_j$

$$\bigcap_t \{j : \alpha_j \le t\} = \emptyset$$

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le t}} p_j}_{1-\sum_{\substack{j \\ \alpha_j > t}} p_j} = 1 - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \sum_{\substack{j \\ \alpha_j > t}} p_j}_{=0} = 1$$

- rechtsseitig stetig: Sei $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t\to a^+} F(t) = \lim_{t\to a^+} \underbrace{\sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le t}} p_j}_{} \ominus$$

$$= \sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le a}} p_j + \sum_{\substack{j \\ a < \alpha_j \le t}} p_j$$

$$\ominus \underbrace{\sum_{\substack{j \\ \alpha_j \le a}} p_j}_{=F(a)} + \lim_{t\to a^+} \underbrace{\sum_{\substack{j \\ a<\alpha_j \le t}} p_j}_{=0} = F(a).$$

$\square$

Kontinuierliche (stetige) Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X heißt kontinuierlich (stetig), falls es eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underline{P(a < X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt} \quad \forall -\infty \le a < b \le +\infty.$$

Man nennt f Dichte (Dichtefunktion, Verteilung).

Eigenschaften von f:
1.) $f \ge 0$
2.) f ist integrierbar (Lebesque-integrierb. $\Leftarrow$ R. integrierbar $\Leftarrow$ stetig)
3.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

Umgekehrt: Erfüllt f 1.), 2.) und 3.), dann ist f die Dichte einer Zufallsvariable.

Beweis:

Setze $\underline{F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds}$

- Sei $a \le b$: $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds \le \int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds + \underbrace{\int_a^b \underbrace{f(s)}_{\ge 0}\,ds}_{\ge 0} =$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(s)\,ds = F(b).$$

- $\underline{\lim_{t \to -\infty} F(t)} = \lim_{t \to -\infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = \underline{0}.$ (wird ja Punkt)

$\underline{\lim_{t \to +\infty} F(t)} = \lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds \overset{3.)}{=} \underline{1}.$

- rechtsseitig stetig: Sei $a \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lim_{t \to a^+} F(t)} = \lim_{t \to a^+} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds = \underline{F(a)}.$

$\square$

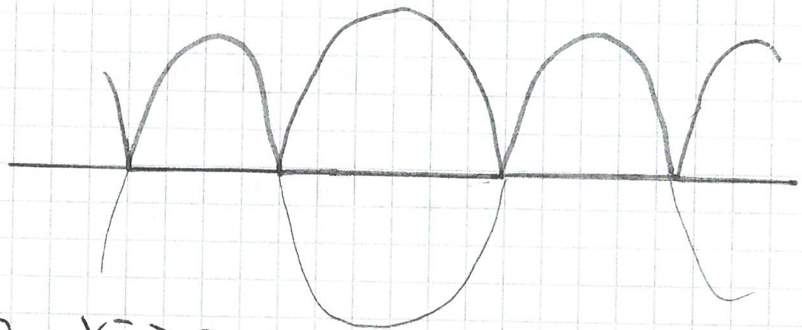
4.) Erwartungswert und Streuung

Zufallsvariable X: naiv: Mittelwert bei n Versuchen

$\downarrow n \to \infty$

Erwartungswert

$X^+ := \max\{X, 0\}$, $X^- = -\min\{X, 0\}$



1 Kurve

$X^+ \geq 0$, $X^- \geq 0$,

$X = X^+ - X^-$

$|X| = X^+ + X^-$

Definition des Erwartungswerts $E(X)$

Erwartungswert ist ein Integral $E(X) = \int X \, dP$

Nicht jede Zufallsvariable hat einen Erwartungswert!

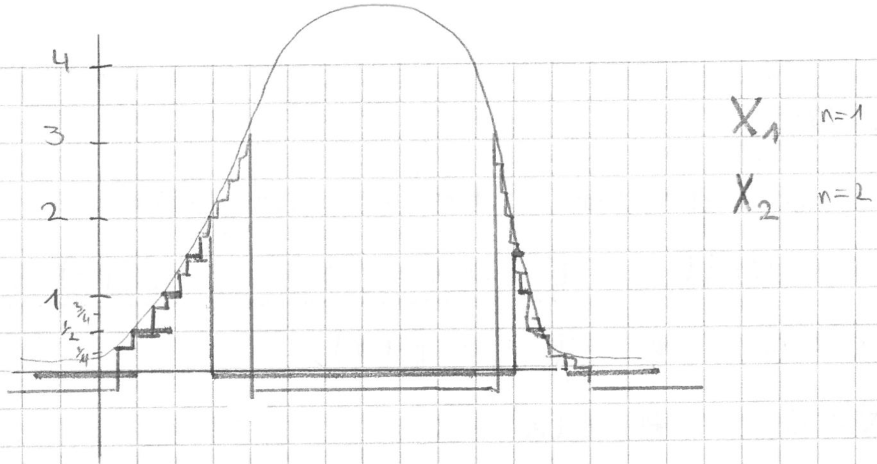
1. Schritt: Zufallsvariable X nimmt nur endlich viele Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ an.

$$\boxed{E(X) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P(X = \alpha_j).}$$

2. Schritt: $X \geq 0$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere:

$$X_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{, falls } \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \text{ für ein } k \in \{0, 1, \dots, 2^{2n} - 1\} \\ 0 & \text{, falls } X(\omega) \geq 2^n \end{cases}$$



$X_n \leq X_{n+1}$ $\quad$ $(X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega)$

monoton wachsend

$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ punktweise! $\quad$ $(\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega)$

↑ in welchem Sinn ist d. Grenzwert zu verstehen? (als Grenzwert von Funktionen)

$X_n \geq 0$, X_n nimmt nur endlich viele Werte an (siehe Def.)

$E(X) := \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$, wobei $+\infty$ zugelassen ist.

Man kann zeigen: Ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Y_n \leq Y_{n+1}$ $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = X$ punktw., $Y_n \geq 0$ $\forall n$ und Y_n nimmt nur endlich viele Werte an, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) = E(X)$.

d.h. wir haben $E(X)$ definiert für $X \geq 0$

3. Schritt: X Zufallsvariable

Definition

Eine Zufallsvariable X heißt <u>integrierbar</u> ($X \in L^1$), falls $E(X^+) < +\infty$ und $E(X^-) < +\infty$. Wir definieren dann $E(X) := E(X^+) - E(X^-)$

↳ wir verwenden hier die Linearität

Eigenschaften:

- X integrierbar $\Leftrightarrow$ $|X|$ integrierbar
- Linearität: $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$
- $X \leq Y$: $\Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
- $X \geq 0$ $\Rightarrow E(X) \geq 0$
- $X = \alpha$ P-fast sicher $(P(X=\alpha)=1)$
  $\Rightarrow E(X) = \alpha$

Definition

X heißt quadratisch integrierbar $(X \in L^2)$, falls X^2 integrierbar ist.

Proposition

(gilt nicht in allgemeinen Maßräumen)
X quadratisch integrierbar $\Rightarrow$ X integrierbar.

Beweis:

$$E(|X|) = \int |X| \, dP = \underbrace{\int_{|X|\leq 1} \underbrace{|X|}_{\leq 1} \, dP}_{\leq 1} + \underbrace{\int_{|X|>1} \underbrace{|X|}_{\leq X^2} \, dP}_{\leq \int X^2 \, dP = E(X^2)} \leq$$

$$\leq 1 + E(X^2) < +\infty$$

$\square$

Proposition

X, Y quadratisch integrierbar $\Rightarrow$ $X \cdot Y$ integrierbar

Beweis:

Falls $X \geq 0$ und $Y \geq 0$.

$(X-Y)^2 = X^2 + Y^2 - 2XY \Rightarrow$

$$0 \leq XY = \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 - \underbrace{(X-Y)^2}_{\geq 0}\right) \leq \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$$

$$E(XY) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(E(X^2) + E(Y^2)\right) < +\infty$$

allgemeiner Fall:

$$X = X^+ - X^-, \quad Y = Y^+ - Y^-$$

$$\Rightarrow X \cdot Y = \underbrace{X^+ \cdot Y^+}_{E(.)\,\exists} - \underbrace{X^- Y^+}_{E(.)\,\exists} - \underbrace{X^+ Y^-}_{E(.)\,\exists} + \underbrace{X^- Y^-}_{E(.)\,\exists}$$

Also XY ist integrierbar $\square$

Wie rechnet man $E(X)$ aus?

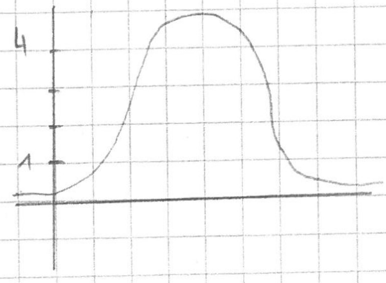
X diskrete Zufallsvariable: $(\alpha_j)_{j \in J}$

$$E(X^2) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in J_n} \alpha_j^2 P(X = \alpha_j) = \sum_{j \in J} \alpha_j^2 P(X = \alpha_j)$$

$$E(X) = \sum_{j \in J} \alpha_j P(X = \alpha_j).$$

$$E(X^2) = \sum_{j \in J} \alpha_j^2 P(X = \alpha_j)$$

Kontinuierliche Zufallsvariable X mit Dichte f



$$E(X) \approx \sum_j t_j^2 \underbrace{P(t_j < X \leq t_{j+1})}_{= \underbrace{\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s)\,ds}_{\approx f(t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)}} \approx$$

$s \approx t_j$

vgl Faltung

$$\approx \sum_j t_j^2 f(t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j) \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)\, dt$$

d.h. $$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)\, dt \end{aligned}}$$

Zu kontinuierlicher Zufallsvariable

Verteilung $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds$

Wenn wir die Verteilung kennen, erhalten wir die Dichte durch Differenzieren.

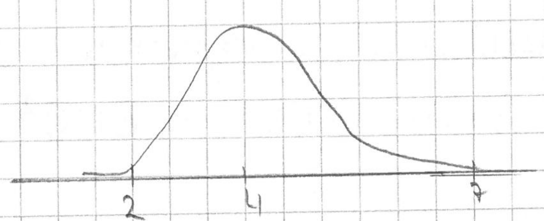
Beispiel:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\cdot(t^2+1)^2} & , t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2\cdot(t^2+1)^2} & , t \geq 0 \end{cases}$$

Dichte:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-2t}{(t^2+1)^3} & , t \leq 0 \\ \frac{2t}{(t^2+1)^3} & , t \geq 0. \end{cases}$$

Nägelbeispiel



Wie können wir die Abweichung vom Erwartungswert messen?

$X - E(X)$

1. Vorschlag: $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

sehr schlechte Idee!

besser: $E(|X - E(X)|)$ oder $E((X - E(X))^2)$

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wir sagen X besitzt eine Varianz, falls $V(X) := E((X-E(X))^2)$ existiert (implizit heißt das, das X integrierbar ist. Man nennt $V(X)$ die Varianz von X und $\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$ die Streuung von X.

Begründung, dass $\sigma(X)$ sinnvoll ist:

$$V(X) = E(\underbrace{(X-E(X))^2}_{\geq 0}) \geq 0.$$

Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine Zufallsvariable. Dann besitzt X genau dann eine Varianz, wenn X quadratisch integrierbar ist. Weiters gilt dann: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Beweis:

$$(X-E(X))^2 = X^2 - 2 \cdot E(X) \cdot X + E(X)^2.$$

Erwartungszahl einer Zahl selbst existiert und ist die Zahl selbst

$$\Rightarrow: \quad X^2 = \underbrace{(X-E(X))^2}_{E(.)\,\exists} + \underbrace{2 \cdot E(X) \cdot X}_{E(.)\,\exists} - E(X)^2 \Rightarrow X \in L^2$$

$\downarrow$ quad integrierbar

$$\Leftarrow: \quad X \in L^2 \Rightarrow X \in L^1.$$

$$(X-E(X))^2 = \underbrace{X^2}_{E(.)\,\exists} - \underbrace{2 \cdot E(X) \cdot X}_{E(.)\,\exists} + E(X)^2 \Rightarrow X \text{ hat Varianz}$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2) = \\ &= E(X^2 - 2 \cdot E(X) \cdot X + E(X)^2) = \\ &\overset{\text{Linearität}}{=} E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 = \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Streuung = stochastische Standardabweichung

Beispiel:

X... Augenzahl beim Würfeln

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot (1+2+\ldots+6) = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)\frac{n}{2}$ ... Gauß-Form

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2) = \frac{91}{6}$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{35}{12}}}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{35}{3}} \approx \underline{\underline{1{,}70783}}$$

Beispiel: St. Petersburger Paradoxon

Falls Z kommt → Gewinn 0

Falls n×E und dann Z kommt → Gewinn 2^n €

Was wäre die „gerechte" Startgebühr.

X... Gewinn

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \overset{1\times E}{2} \cdot \frac{1}{4} + \overset{2\times E}{4} \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty$$

Es gibt Zufallsvariable, die keinen Erwartungswert haben!

5.) Binomialverteilung

Experiment $n\times$ durch, $X\ldots$ Anzahl, wie oft A eintritt

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in [0,1]$ (interessant: $n \geq 1$, $p \in (0,1)$).
Dann heißt eine Zufallsvariable (n,p)-binomialverteilt
($B(n,p)$-verteilt), falls

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Bemerkung

$q := 1-p$: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Das ist eine Verteilung, weil: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} (\underbrace{p+q}_{=1})^n = 1$.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = p$

auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ definiere $\tilde{X}_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega_j \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$X_n := \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j$ .... Anzahl, wie oft A bei den ersten n Versuchen eintritt

Proposition

$\boxed{X_n \text{ ist } B(n,p)\text{-verteilt.}}$

Beweis:

Induktion:

$n=0$: $P(X_0 = 0) = 1 = \binom{0}{0} \cdot p^0 \cdot q^0$

Wkt, beim n-ten Versuch tritt es nicht ein

Sei $n \geq 1$. $P(X_n = 0) = q \cdot \underbrace{P(X_{n-1} = 0)}_{= \binom{n-1}{0} \cdot p^0 \cdot q^{n-1} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^{n-1}} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n$

1. Sonderfall

n-te Glied entweder 0 oder n

$$P(X_n = n) = p \cdot \underbrace{P(X_{n-1} = n-1)}_{= \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{= \binom{n}{n}} \cdot p^{n-1} \cdot q^0} = \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$$

2. Sonderfall

betrachte nur alle dazwischen

↓

Sei $1 \leq k \leq n-1$:

$$P(X_n = k) = q \cdot \underbrace{P(X_{n-1} = k)}_{= \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-1-k}} + p \cdot \underbrace{P(X_{n-1} = k-1)}_{\binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot \underbrace{q^{n-1-k+1}}_{= q^{n-k}}} =$$

$$= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

□

Beispiel:

[redacted]

P(genau 4 Sechser bei 10x Würfeln) = ?

X... Anzahl d. Sechser, $B(10, \frac{1}{6})$

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}0542659$$

SATZ

> Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in [0,1]$ und X sei (n, p) – binomialverteilt.
> Dann ist $E(X) = n \cdot p$ und $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Beweis:

$n=0$: $E(X) = 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot p$, $E(X^2) = 0^2 \cdot 1 = 0$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = 0 = \sqrt{0 \cdot p \cdot q}$$

Sei $n \geq 1$: $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$ $\circledcirc$

(für $k \geq 1$: $= \underbrace{k \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}$ $p \cdot p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)}$ $\circledcirc$

$(n-1)-(k-1)+$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(k-1)!} = n \cdot \underbrace{\frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(k-1)!}}_{= \binom{n-1}{k-1}}$$

$$\circledcirc\ n \cdot p \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} \quad)$$

$$\circledcirc\ n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$\underset{\text{Indexverschiebung}}{=} n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot q^{(n-1)-k}}_{\underset{\text{bin. Lehrsatz}}{=} (\underbrace{p+q}_{=1})^{n-1} = 1} = n \cdot p$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \underbrace{k \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}_{= n \cdot p \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)}} = n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$\underset{\text{Index-verschiebung}}{=} n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot \binom{n-1}{k} p^k \cdot q^{(n-1)-k}}$$ $\circledcirc$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \binom{n-1}{k} p^k \cdot q^{(n-1)-k}}_{\substack{\text{EW von } B(n-1,p)\text{-Verteilung} \\ = (n-1) \cdot p = n \cdot p - p}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \cdot q^{(n-1)-k}}_{=1}$$

$$\circledcirc\ n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + n \cdot p$$

$$V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + np} - \underbrace{E(X)}_{n \cdot p}^2 = -n \cdot p^2 + n \cdot p = n \cdot p \underbrace{(1-p)}_{=q}$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

$\square$

Approximation der Binomialverteilung

$\Rightarrow$ Approximierung durch die Poissonverteilung:

X ist Poissonverteilt ($P(\lambda)$ - verteilt), falls

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 .$$

SATZ

$$\boxed{B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} P(\lambda)}$$

$p = \frac{\lambda}{n}$!

Beispiel

P(„genau 28 Sechser bei 200 x Würfeln)

X... Anzahl d. Sechser $\quad B(200, \frac{1}{6})$

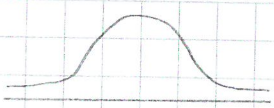
$$P(X = 28) = \binom{200}{28} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{28} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{172} \approx 0{,}04\,74277$$

Poissonverteilung: λ suchen: $\frac{\lambda}{200} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{100}{3}$

$$P(X=28) \approx \frac{\left(\frac{100}{3}\right)^{28}}{28!} \cdot e^{-100/3} \approx 0{,}0478610$$

$$P(X=98) \approx \begin{cases} 8{,}026 \cdot 10^{-23} & \text{(binomial)} \\ 1{,}225 \cdot 10^{-17} & \text{(Poisson)} \end{cases}$$

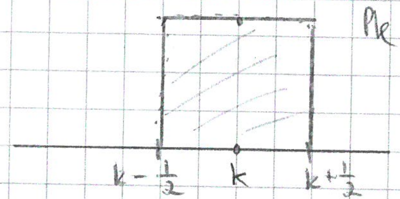
→ Approximation durch die Normalverteilung

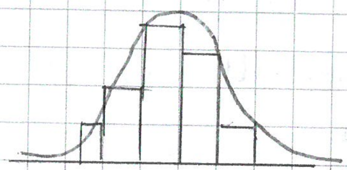


X heißt normalverteilt ($N(\mu,\sigma)$-verteilt), falls
$\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$:

$$P(\mu + a\cdot\sigma \leq X \leq \mu + b\cdot\sigma) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$





Folgerung aus dem zentralen Grenzwertsatz

SATZ

$p \in (0,1)$, für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n (n,p)-binomialverteilt.
Dann gilt für $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$

$$P(np + a\sqrt{n\cdot p\cdot q} \leq X_n \leq n\cdot p + b\sqrt{n p\cdot q}) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

$(B(n,p) \approx N(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot q}))$.

Beispiel

200 mal Würfeln, P(höchstens 38 Sechser)

$B(200, 1/6)$

Binomialverteilung: $P(X \leq 38) = \sum_{k=0}^{38} \binom{200}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k} \approx 0{,}836883$

Poissonverteilung: $P(X \leq 38) \approx \sum_{k=0}^{38} \frac{\left(\frac{100}{3}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{100}{3}} \approx 0{,}816313$

Normalverteilung: $P(X \leq 38) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

keine untere Grenze → $a = -\infty$

Stetigkeitskorrektur

obere Grenze: $38 + \frac{1}{2} = 38{,}5 = 200 \cdot \frac{1}{6} + b\sqrt{200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}$

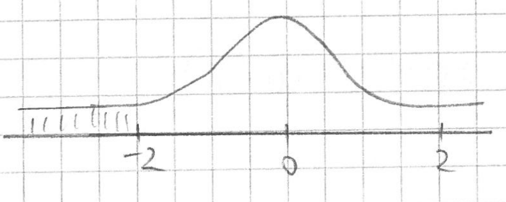
$$b = \frac{31}{10 \cdot \sqrt{10}} \approx 0{,}9803$$

$$P(X \leq 38) = \int_{-\infty}^{0{,}9803} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \approx 0{,}83646$$ (Computer: 0,8365321

TABELLE
Normalverteilung

$$\int_a^b \ldots = \underbrace{\int_{-\infty}^{b} \ldots}_{= \Phi(b)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{a}}_{= \Phi(a)}$$

$$\Phi(-2) = 1 - \int_{-\infty}^{2} \ldots = 1 - \Phi(2)$$



6.) Normalverteilung

Definition

Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann heißt eine Zufallsvariable X <u>(μ,σ)-normalverteilt</u> ($N(\mu,\sigma)$-verteilt), falls

$\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{Dichte der } N(\mu,\sigma)\text{-Verteilung}} \, dt.$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$ Verteilung der $(0,1)$-Normalverteilung

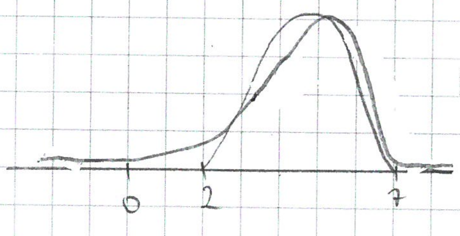
Manche schreiben: $N(\mu,\sigma^2)$ statt $N(\mu,\sigma)$.

Wo tritt sie auf?

Länge der Nägel,

Größe von Menschen, Bäumen, ...

Lebensdauer von Menschen, Tieren (wenn Abnutzung da ist)



Lemma

1.) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$

2.) $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \, dx = 0$

3.) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

da symmetrisch

Beweis:

1.) Existenz: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}$

Für $x \geq 1$: $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$,

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx \left(= \lim_{r \to +\infty} \int_1^r e^{-x}\right) = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = 0 - (-e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ (Majorantentest) $\int_1^{\infty} e^{-x^2}$ konvergiert

Auf $[0,1]$ ist e^{-x^2} stetig $\Rightarrow$ (HS) $\int_0^1 e^{-x^2}$ $\exists$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} \exists \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \exists$

Ausrechnen:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$\overset{\text{Transformations-formel}}{=} \left(\text{Polarkoordinaten: } \begin{array}{ll} x = r \cdot \cos\varphi, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \cdot \sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{array} \det dT = r\right) =$$

r^2 $-(r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi))$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2}\,dr}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\varphi \circleddash$$ [redacted]

$$\left(\begin{array}{l} s = -r^2 \\ ds = -2r\,dr \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}\,ds = r\,dr \end{array}\right) = -\frac{1}{2}\int e^s\,ds = -\frac{1}{2} \cdot e^s = -\frac{1}{2} \cdot e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Integral aus VS

$$\circleddash\ \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$$

$\sqrt{I^2} = I$ Wurzeln ziehen $\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$

2.) $\int x \cdot e^{-x^2} dx = \left(\begin{array}{l} s = -x^2 \\ ds = -2x\,dx \end{array} \right) = -\frac{1}{2} \int e^s ds =$

$= -\frac{1}{2} \cdot e^s = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$

3.) $\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x^2}} \left(= \text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"} \right) =$ De l'Hospital

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x\,e^{x^2}} = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x^2}}\, dx \overset{\text{partiell integrieren}}{=}$

das integriert bis das $\rightarrow = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \right)'$

x ableiten

$= \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$\square$

Normalverteilung ist Verteilung, weil:
(f integrierbar, weil stetig, $f \geq 0$)

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \left(\begin{array}{l} x = \frac{t-\mu}{\sigma \cdot \sqrt{2}} \rightarrow t = \mu + x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2} \\ dx = \frac{dt}{\sigma\sqrt{2}} \rightarrow dt = dx \cdot \sigma \cdot \sqrt{2} \\ t = -\infty \rightarrow x = -\infty,\ t = +\infty \rightarrow x = +\infty \end{array} \right) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\,\cancel{\sigma}} \cdot e^{-x^2} \cdot \cancel{\sigma} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\, dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}} = 1.$

SATZ

> Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, X sei $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Dann ist
> $E(X) = \mu$ und $\sigma(X) = \sigma$.

$$= -\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2$$

Beweis:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \left(x = \frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) =$$

$$dx = dt\,\sigma\,\sqrt{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + x\cdot\sigma\cdot\sqrt{2})\, \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\,\cancel{\sigma}} \cdot e^{-x^2}\, \cancel{\sigma}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\, dx =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx}_{=\sqrt{\pi}} + \frac{\sigma\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\, dx}_{=0} = \mu.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \left(x = \frac{t-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}} \quad \ldots\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu^2 + x\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot\mu + x^2\cdot\sigma^2\cdot 2)\cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\,\cancel{\sigma}}\, e^{-x^2}\, \cancel{\sigma}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\, dx =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx}_{\sqrt{\pi}} + \frac{2\sqrt{2}\,\sigma\cdot\mu}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\, dx}_{=0} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-x^2}\, dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} =$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sigma.$$

$\square$

SATZ

Sei X $N(\mu, \sigma)$-verteilt und $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.
Dann gilt: $P(\mu + a\sigma \leq X \leq \mu + b\sigma) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$.

Beweis:

(Proseminar → Substitution).

$\square$

Beispiel

Bleistifte, Länge $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 10\,cm$ und $\sigma = 4\,mm$

a.) WH, dass die Länge höchstens 10,5 cm

X ... Länge eines Bleistifts, $N(10; 0{,}4)$

$$P(X \leq 10{,}5) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \approx 0{,}89435$$

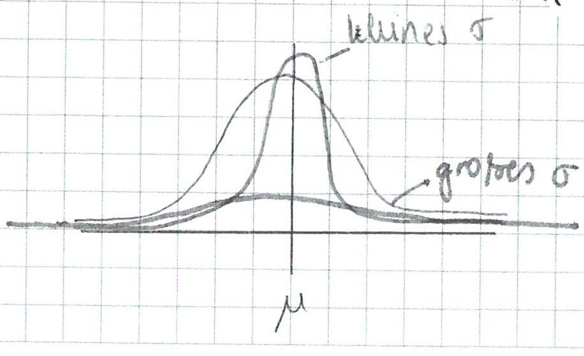
$$a = -\infty, \quad 10{,}5 = \underset{10}{\mu} + b \cdot \underset{0{,}4}{\sigma} \rightarrow b = 1{,}25$$

b.) WH, dass die Länge zwischen 9,1 cm und 11 cm liegt

$$P(9{,}1 \leq X \leq 11) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt =$$

$$= \begin{pmatrix} 9{,}1 = 10 + a \cdot 0{,}4 \rightarrow a = -2{,}25 \\ 11 = 10 + b \cdot 0{,}4 \rightarrow b = 2{,}5 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{-2{,}25}^{2{,}5} = \Phi(2{,}5) - \underbrace{\Phi(-2{,}25)}_{= 1 - \Phi(2{,}25)} \approx 0{,}9937903 - 1 + 0{,}987776 = 0{,}981566$$



c.) Welche Länge wird von höchstens 5% der Bleistifte unterschritten?

gesucht ist y, sodass $P(X \leq y) = 0{,}05$

$y = \mu + x \cdot \sigma = 10 + x \cdot 0{,}4$

$$0{,}05 = P(X \leq \underbrace{y}_{\mu + x \cdot \sigma}) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \Phi(x)$$

$\Rightarrow \Phi(-x) = 0{,}95$

$\Rightarrow -x \approx 1{,}645$

$\Rightarrow y \approx 10 - 1{,}645 \cdot 0{,}4 = \underline{\underline{9{,}342}}$

höchstens 5% unterschreiten 9,3 cm

7.) Poissonverteilung

(diskrete Verteilung)

Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Dann heißt X Poissonverteilt mit Parameter λ ($P(\lambda)$-verteilt), falls

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 .$$

Das ist wirklich eine Verteilung, weil:

1.) $p_j \geq 0$ ✓

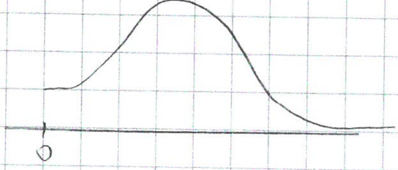
2.) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda}} = \underline{\underline{1}}$$

(Potenzreihe v. e^x, $R = \infty$)

Wo tritt Poissonverteilung auf?

- Anzahl der Personen, die sich in einem Zeitintervall anstellen
- Anzahl der Autos, die auf einen Parkplatz kommen
- Anzahl der Telefonanrufe, die in einer Telefonzentrale ankommen.

Dabei ist X üblicherweise $P(\nu t)$, wobei ν ... Anzahl der Personen | ... pro Zeiteinheit ist und t die Intervallänge



SATZ

> Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, und X sei $P(\lambda)$-verteilt. Dann gilt
> $E(X) = \lambda$ und $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Beweis:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \text{ (Potenzreihe, } R=\infty)} = \lambda.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{= k \cdot \underbrace{k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}_{\text{für } k \geq 1:\ \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}} \circledequal$$

$$\circledequal \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}} \circledequal$$

$$\circledequal \lambda \cdot e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda} \text{ (Potenzreihe, } R=\infty)} \right) =$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}_{\lambda \text{ (vgl. } E(X) = \sum k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda)} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

$\square$

SATZ

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

$$\left(B\left(n, \tfrac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(\lambda)\right).$$

Beweis:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \lambda^k \cdot \underbrace{\frac{1}{n^k} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}}_{\frac{1}{(n-\lambda)^k}} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{n}{n-\lambda}}_{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}} \to 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n-\lambda}}_{\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}} \to 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n-\lambda}}_{\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}} \to 1}}_{\to 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \to$$

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

$\square$

X ... Anzahl der Personen, die sich in einem Zeitintervall der Länge t an einer Supermarktkasse anstellen (o.B.d.A.: $[0,t]$, eigentlich sollte man X_t schreiben)

γ ... durchschnittliche Anzahl der Personen in einem Intervall der Länge 1 sein.

Herleitung:

Wähle n, es stellen sich n Personen insgesamt an.

Dafür müssen wir $\tau = \frac{n}{\gamma}$ Zeit geben (sinnvoll: $\frac{n}{\gamma} \geq t$).

P(eine Person stellt sich in $[0,t]$ an) $= \underset{\tau = \frac{n}{\gamma}}{\frac{t}{\tau}} = \frac{\gamma \cdot t}{n}$

Verteilung von X ist $B(n, \frac{\gamma \cdot t}{n})$ - verteilt.

Für $n \to \infty$: $B(n, \frac{\gamma \cdot t}{n}) \to P(\gamma t)$.

Also X ist $P(\lambda)$ - verteilt.

Warteschlangen

8.) Geometrische Verteilung

diskrete Verteilung

$A \in \mathfrak{A}$, $P(A) = p \in (0,1)$,

X... Anzahl der Versuche bis A das erste Mal eintritt

$X = n$, falls bei den ersten $n-1$ Versuchen A nicht eintritt, und A beim n-ten Versuch eintritt

$n = 1, 2, \dots, +\infty$

Null-Eins-Gesetz $\tilde{P}(X = +\infty) = 0$.

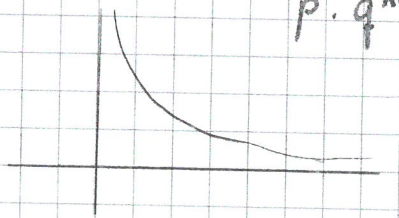
$P(X=n) = q^{n-1} \cdot p$

Definition

Sei $p \in (0,1)$. Dann heißt X geometrisch verteilt mit Parameter p, falls

$$P(X = n) := p \cdot (1-p)^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

$p \cdot q^{n-1}$



Das ist wirklich eine Verteilung, weil: $\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} =$

$$= p \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \underset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-q}} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

SATZ

Sei $p \in (0,1)$ und X sei geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $E(X) = \frac{1}{p}$ und $\sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

Beweis:

geometrische Reihe: $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $R=1$,

Differenzieren: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$, $R=1$ $\qquad (*)$

Multiplizieren mit x:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n, \quad R=1$$

Differenzieren:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1} \qquad (**)$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p \cdot q^{n-1} = p \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1}}_{\overset{(*)}{=} \frac{1}{(1-q)^2}} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot p \cdot q^{n-1} = p \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot q^{n-1}}_{\overset{(**)}{=} \frac{1+q}{(1-q)^3}} = p \cdot \frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\frac{1+q}{p^2}} - \underbrace{E(X)^2}_{= \frac{1}{p}} = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

[redacted]

$\square$

Bsp: Wie lange muss man warten, bis ein 6er kommt?

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6.$$

γ sollte eigentlich ν (nü) sein!!!

9. Exponentialverteilung

Warteschlangen: X... Wartezeit bis der/die erste KundIn an die Kasse kommt.

Y_t ... Anzahl der KundInnen, die sich im Zeitintervall $[0,t]$ anstellen, ist $P(\gamma t)$

$X \le t \Leftrightarrow Y_t \ge 1$

$\{X \le t\} = \{Y_t \ge 1\}$

Daher: $P(X \le t) = P(Y_t \ge 1) = 1 - \underbrace{P(Y_t = 0)}_{\frac{(\gamma t)^0}{0!} \cdot e^{-\gamma t}} = 1 - e^{-\gamma t}$

für $t \ge 0$.

($P(X \le t) = 0$ für $t < 0$) (Verteilung)

Dichte ist daher: $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t \le 0 \\ \nu e^{-\nu t}, & \text{für } t > 0. \end{cases}$

Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Dann heißt X exponentialverteilt mit Parameter λ ($E(\lambda)$-verteilt), falls X die Dichte

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \le 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & \text{für } t > 0 \end{cases}$$ hat.

Das ist eine Verteilung, weil:

1.) $f \ge 0$ ✓

2.) f integrierbar, da stückweise stetig

3.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \left(-e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^{+\infty} =$

$= 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}.$

Wo tritt sie auf?

- Warteschlangen: X... Wartezeit, bis erster Kundin kommt.
- Lebensdauer einer Glühbirne, ... (keine Abnützung)

SATZ

> Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ und X sei $E(\lambda)$-verteilt. Dann gelten
> $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ und $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Beweis:

Proseminar Bsp 80. $\square$

10.) Weitere Verteilungen

(→ zur Prüfung) → braucht für Statistik

Wiederholung der Gamma-Fkt.:

für $x > 0$, $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt$

$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x > 0$

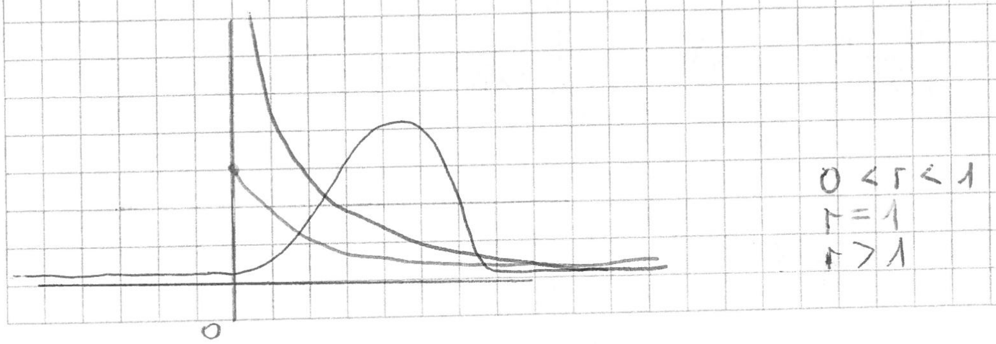
Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelten: $\Gamma(n+1) = n!$ und $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! \cdot 2^{2n}}$

Definition

Seien $\lambda, r \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $r > 0$. Dann heißt X Gamma-verteilt mit Parameter r und λ ($G(r,\lambda)$-verteilt), falls X die Dichte

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot t^{r-1} \cdot e^{-\lambda t}, & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

hat.



$E(X) = \frac{r}{\lambda}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{r}}{\lambda}$

$G(1, \lambda)$ - Verteilung:

Dichte $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$ $E(\lambda)$-Verteilung

Γ - Verteilung ist Verallgemeinerung von Exp Verteilung

<u>Warteschlangen</u>: Wartezeit bis der/die n-te Kundln an die Kassa kommt ... X. X ist $G(n, r)$.

Definition

Sei $r \in \mathbb{N}$. Dan heißt X χ^2-verteilt (chi) mit r Freiheitsgraden, falls X $G(\frac{r}{2}, \frac{1}{2})$-verteilt ist.

$E(X) = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{1}{2}} = r$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2r}$, also

$E(X) = r$, $\sigma(X) = \sqrt{2r}$.

X_r — χ^2-verteilt mit r Freiheitsgraden

für große r: $X_r \approx N(r, \sqrt{2r})$-verteilt,

genauer

$(X_r)_{r=1}^{\infty}$ χ^2-verteilt mit r Freiheitsgraden. Dann gilt für $-\infty \le a \le b \le +\infty$:

$$\lim_{r \to \infty} P\left(a \le \frac{X_r - r}{\sqrt{2r}} \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

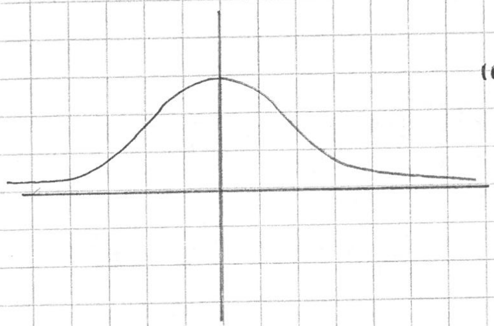
t-Verteilung (Student-Verteilung)

Definition

Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann heißt X t-verteilt (Student-verteilt) mit r Freiheitsgraden ($T(r)$-verteilt), falls X die Dichte

$$f(t) := \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$

hat.



„breiter als Normalverteilung"

$T(r)$-Verteilung $\xrightarrow{r \to \infty}$ $N(0,1)$-Verteilu

$$E(X) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \geq 2 \\ \text{existiert nicht}, & \text{falls } r = 1. \end{cases}$$

$$\sigma(X) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{r}}}, & \text{falls } r \geq 3 \\ \text{existiert nicht}, & \text{falls } r = 1,2. \end{cases}$$

William Gosett (1908)

II.) Unabhängige Zufallsvariable

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_j)_{j\in J}$ eine (beliebige) Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dann heißt $(X_j)_{j\in J}$ unabhängig, falls $\forall n\in\mathbb{N}$
$\forall \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subseteq J$ mit $j_k \neq j_l$ für $k \neq l$.
$\forall B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$:

$$P(\underbrace{X_{j_1}\in B_1,\ X_{j_2}\in B_2, \dots, X_{j_n}\in B_n}_{\bigcap_{k=1}^{n}\{X_{j_k}\in B_k\}}) = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} P(X_{j_k}\in B_k)}_{= P(X_{j_1}\in B_1)\cdot P(X_{j_2}\in B_2)\cdot\ldots\cdot P(X_{j_n}\in B_n)}$$

Bemerkungen:

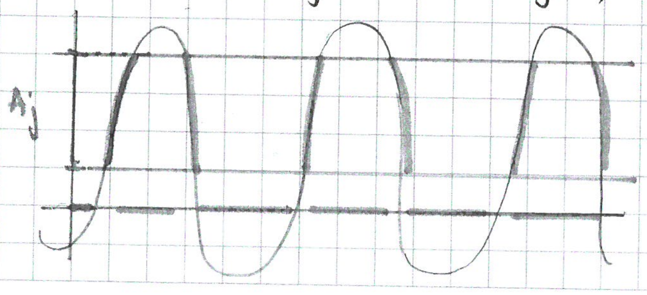
- Es genügt: $\forall n\ \forall j_1, \dots, j_n\ \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
  $$P(X_{j_1}\le \alpha_1, \dots, X_{j_n}\le \alpha_n) = P(X_{j_1}\le\alpha_1)\cdot\ldots\cdot P(X_{j_n}\le\alpha_n).$$
- Äquivalent: $\forall n: \forall \varphi: \{1,2,\dots,n\}\to J$ injektiv
  $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$
  $$P\Big(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{\varphi(j)}\in B_j\}\Big) = \prod_{j=1}^{n} P(X_{\varphi(j)}\in B_j).$$

Abschneiden von Zufallsvariablen:

$(X_j)_{j\in J}$ unabhängig

$A_j \in \mathcal{B}$:

Definieren Y_j durch $Y_j(\omega) := \begin{cases} X_j(\omega), & \text{falls } X_j(\omega)\in A_j, \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$



X_j Zufallsvariable

Y_j neue, abgeschnittene Zufallsvariable

$\Rightarrow$ können verschiedene Intervalle A_j nehmen

SATZ

Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen, $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie in $\mathcal{B}$. Für $j \in J$ sei Y_j die bei A_j abgeschnittene Zufallsvariable X_j. Dann ist $(Y_j)_{j\in J}$ unabhängig.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}}_{\text{alle verschieden}} \subseteq J$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$.

Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ definiere $B_k^* := \begin{cases} B_k \cap A_{j_k}, & \text{falls } 0 \notin B_k, \\ (B_k \cap A_{j_k}) \cup (\mathbb{R} \setminus A_{j_k}), & \text{falls } 0 \in B_k \end{cases}$

$B_k^* \in \mathcal{B}$. Es gilt $\{Y_{j_k} \in B_k\} = \{X_{j_k} \in B_k^*\}$, weil:

für $0 \notin B_k$: $\underbrace{Y_{j_k}(\omega)}_{= X_{j_k}(\omega)} \in B_k \iff X_{j_k}(\omega) \in A_{j_k} \cap B_k = B_k^*$

für $0 \in B_k$: $\underbrace{Y_{j_k}(\omega)}_{= \begin{cases} X_{j_k}(\omega), & \text{falls } X_{j_k}(\omega) \in A_{j_k} \cap B_k \\ 0, & \text{falls } X_{j_k}(\omega) \in \mathbb{R} \setminus A_{j_k} \end{cases}} \in B_k \iff X_{j_k}(\omega) \in B_k^*$

$$P(\underbrace{Y_{j_1} \in B_1, Y_{j_2} \in B_2, \ldots, Y_{j_n} \in B_n}_{X_{j_1} \in B_1^*, X_{j_2} \in B_2^*, \ldots, X_{j_n} \in B_n^*}) =$$

$$= P(X_{j_1} \in B_1^*, X_{j_2} \in B_2^*, \ldots, X_{j_n} \in B_n^*) \underset{\text{(da } (X_j) \text{ unabh.)}}{=}$$

$$= P(\underbrace{X_{j_1} \in B_1^*}_{= Y_{j_1} \in B_1}) \cdot P(\underbrace{X_{j_2} \in B_2^*}_{= Y_{j_2} \in B_2}) \cdot \ldots \cdot P(\underbrace{X_{j_n} \in B_n^*}_{= Y_{j_n} \in B_n}) =$$ [redacted]

$$= \prod_{k=1}^{n} P(Y_{j_k} \in B_k).$$

Somit sind $(Y_j)_{j\in J}$ unabhängig.

$\square$

Korollar

$\boxed{(X_j)_{j\in J} \text{ unabhängig} \Rightarrow (X_j^+)_{j\in J} \text{ unabhängig und } (X_j^-)_{j\in J} \text{ unabhängig.}}$

X_1, X_2, X_3 unabh. $\Rightarrow$ X_1^+, X_2^-, X_3^+ unabhängig

Borelmengen in $\mathbb{R}^s$: (von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}_0$ enthält)

Borelmengen in $\mathbb{R}^s$ sind
 die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra,
 die von den abgeschlossenen Mengen erzeugte σ-Algebra,
 die von $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_s$, wobei $B_1, \dots, B_s$ Borelmengen in $\mathbb{R}$ sind, erzeugte σ-Algebra.

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ heißt messbar, falls $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.

f stetig $\Rightarrow$ f messbar.

SATZ

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable, $f_1: \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}$, $f_2: \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}, \dots, f_r: \mathbb{R}^{k_r} \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen, wobei $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Dann sind

$$f_1\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{k_1} \end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix} X_{k_1+1} \\ X_{k_1+2} \\ \vdots \\ X_{k_1+k_2} \end{pmatrix}, \dots, f_r\begin{pmatrix} X_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1} \\ X_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+2} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ unabhängig.}$$

kann auf unabh. Zufallsvariable Fkt anwenden und sie bleiben unabh.

Beweis:

Seien $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{B}$.

$$P\Big(\underbrace{f_1\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{k_1}\end{pmatrix} \in B_1}_{=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{k_1}\end{pmatrix}\in f_1^{-1}(B_1)},\ \underbrace{f_2\begin{pmatrix}X_{k_1+1}\\ \vdots\\ X_{k_1+k_2}\end{pmatrix} \in B_2}_{=\begin{pmatrix}X_{k_1+1}\\ \vdots\\ X_{k_1+k_2}\end{pmatrix}\in f_2^{-1}(B_2)}, \dots,\ \underbrace{f_r\begin{pmatrix}X_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} \in B_r}_{=\begin{pmatrix}X_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}\in f_r^{-1}(B_r)}\Big)$$

$$\overset{\text{⊜}}{=} P\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{k_1}\end{pmatrix} \in f_1^{-1}(B_1)}_{=f_1\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{k_1}\end{pmatrix}\in B_1}\Big) \cdot P\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}X_{k_1+1}\\ \vdots\\ X_{k_1+k_2}\end{pmatrix} \in f_2^{-1}(B_2)}_{=f_2\begin{pmatrix}X_{k_1+1}\\ \vdots\\ X_{k_1+k_2}\end{pmatrix}\in B_2}\Big) \cdot \ldots \cdot P\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}X_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} \in f_r^{-1}(B_r)}_{=f_r\begin{pmatrix}X_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}\in B_r}\Big)$$

Daher ist $f_1\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{k_1}\end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix}X_{k_1+1}\\ \vdots\\ X_{k_1+k_2}\end{pmatrix}, \dots, f_r\begin{pmatrix}X_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$

unabhängig. $\square$

Eigenschaften:

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabh. $\Rightarrow$ $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ unabh.

$(f(x) = x^2)$

X_1, X_2, X_3 unabh. $\Rightarrow$ X_1^2, X_2^2, X_3^2 unabh.

!! X_1, X_2, X_3, X_4 unabh. $\Rightarrow$ $X_1^2, X_2^7, e^{X_3}, \sin X_4$ unabh.

($\Rightarrow$ verschiedene Fkt.)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ unabh. $\Rightarrow$ $X_1 + X_2 + \dots + X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$ unabh.

Proposition

> Sei X Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann ist $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$) unabhängig.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$.

Für $j \in \{1, \dots, n\}$: $\{\tilde{X}_j \in B_j\} = [\underbrace{\Omega, \dots, \Omega}_{j-1\text{-mal}}, \{X \in B_j\}]$

$\Rightarrow \tilde{P}(\tilde{X}_j \in B_j) = P(X \in B_j)$

$\{\tilde{X}_1 \in B_1, \tilde{X}_2 \in B_2, \dots, \tilde{X}_n \in B_n\} = [\{X \in B_1\}, \{X \in B_2\}, \dots, \{X \in B_n\}]$

$\tilde{P}(\underbrace{\tilde{X}_1 \in B_1, \tilde{X}_2 \in B_2, \dots, \tilde{X}_n \in B_n}) =$

$= [\{X \in B_1\}, \{X \in B_2\}, \dots, \{X \in B_n\}]$

Produkt bei Modell a I.I.W $\tilde{P}([A_1, \dots]) = \prod P(A)$

$= \underbrace{P(X \in B_1)}_{= \tilde{P}(\tilde{X}_1 \in B_1)} \cdot \underbrace{P(X \in B_2)}_{= \tilde{P}(\tilde{X}_2 \in B_2)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{P(X \in B_n)}_{\tilde{P}(\tilde{X}_n \in B_n)} =$

$= \tilde{P}(\tilde{X}_1 \in B_1) \cdot \tilde{P}(\tilde{X}_2 \in B_2) \cdot \ldots \cdot \tilde{P}(\tilde{X}_n \in B_n)$

Somit ist $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabh.

$\square$

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$?

Im Allgemeinen falsch! (sonst $E(X^2) = E(X)^2 \rightarrow$ Varianz 0)
Streuung

! SATZ

Seien X und Y unabhängige, integrierbare (!) Zufallsvariablen. Dann ist XY integrierbar und es gilt: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

Beweis:

1. Schritt:

X und Y nehmen nur endlich viele Werte an, also

$X \dots \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $Y \dots \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$

$$E(XY) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \alpha_r \cdot \beta_s \cdot \underbrace{P(X = \alpha_r, Y = \beta_s)}_{= P(X=\alpha_r) P(Y = \beta_s)} =$$

weil X, Y unabh.

Summen auseinander

$$= \sum_{r=1}^{n} \alpha_r P(X = \alpha_r) \cdot \sum_{s=1}^{k} \beta_s P(Y = \beta_s) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \cdot P(X = \alpha_r) \right)}_{= E(X)} \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{k} \beta_s \cdot P(Y = \beta_s) \right)}_{= E(Y)} = E(X) \cdot E(Y)$$

2. Schritt:

vgl. Funktion bei $E(X)$!

$X \geq 0$, $Y \geq 0$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere
$$X_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \text{ für ein } k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \\ 2^n, & \text{falls } X(\omega) \geq 2^n, \end{cases}$$

monoton wachsend

Y_n analog. $X_n \uparrow X$ pkt., $Y_n \uparrow Y$ pkt.

wie bei Fkt zu verstehen

$(X_n Y_n)$ monoton wachsend und $\lim_{n \to \infty} X_n Y_n = XY$ pkt.

Fixiere n. Wir definieren für $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$:

$C_k = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right)$ und $C_{2^{2n}} := [2^n, +\infty)$.

? Def.menge von $X_n(\omega)$ ->

Intervalle! $\qquad$ σ-Algebra d. Borelmengen

Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

Setze für $j \in \{1,2\}$. $J_j := \{k \in \{0,1,\dots,2^{2n}\} : \frac{k}{2^n} \in B_j\}$,

und $\hat{B}_j := \bigcup_{k \in J_j} C_k$ $\qquad C_k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$

$\{X_n \in B_1\} = \{X \in \hat{B}_1\}$ und $\{Y_n \in B_2\} = \{Y \in \hat{B}_2\}$.

$$P(\underbrace{X_n \in B_1, Y_n \in B_2}_{= X \in \hat{B}_1 ,\ Y \in \hat{B}_2}) \underset{\substack{X,Y \\ \text{unabh.}}}{=} P(\underbrace{X \in \hat{B}_1}_{= X_n \in B_1}) \, P(\underbrace{Y \in \hat{B}_2}_{= Y_n \in B_2}) \circledcirc$$

(so umformen, damit wir Eigenschaften von X, Y anwenden können → mit X_n u. Y_n rechnen!)

$$\circledcirc\ P(X_n \in B_1) \cdot P(Y_n \in B_2)$$

Somit ist X_n, Y_n unabhängig.

X_n, Y_n nehmen nur endlich viele Werte an.

Daher gilt: $E(XY) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{E(X_n Y_n)}$ $\circledcirc$

$$\underset{\substack{\text{(da nur endl. viele Werte)} \\ \text{1. Schritt}}}{=} E(X_n) \cdot E(Y_n)$$

$$\circledcirc \ (\underbrace{\lim_{n\to\infty} E(X_n)}_{= E(X)}) \cdot (\underbrace{\lim_{n\to\infty} E(Y_n)}_{= E(Y)}) =$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

integr.! → reelle Zahl $\qquad$ integr. → reelle Zahl $\Rightarrow$ $E(XY)$ auch reelle Zahl + XY integrierbar

Insbesondere ist XY integrierbar.

3. Schritt: (für bel. X, Y)

$X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$.

X^+, Y^+ unabh., X^+, Y^- unabh., X^-, Y^+ unabh. und

X^-, Y^- unabh.

$$E(XY) = E(\underbrace{X^+Y^+}_{\text{int.}} - \underbrace{X^+Y^-}_{\text{int.}} - \underbrace{X^-Y^+}_{\text{int.}} + \underbrace{X^-Y^-}_{\text{int.}}) = \text{(also XY integrierbar)} =$$

Linearität

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \underbrace{E(X^+Y^+)}_{\substack{\text{Linearität}\\ = E(X^+)E(Y^+)}} - \underbrace{E(X^+Y^-)}_{=E(X^+)E(Y^-)} - \underbrace{E(X^-Y^+)}_{=E(X^-)\cdot E(Y^+)} + \underbrace{E(X^-Y^-)}_{=E(X^-)\cdot E(Y^-)} =$$

2 Schritt

herausheben 2x

$$= \underbrace{(E(X^+) - E(X^-))}_{=E(X)} \underbrace{(E(Y^+) - E(Y^-))}_{=E(Y)} = E(X)\cdot E(Y). \qquad \square$$

! **Korollar**

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige, integrierbare Zufallsvariable. Dann ist $\prod_{j=1}^n X_j$ integrierbar und es gilt $E(\prod_{j=1}^n X_j) = \prod_{j=1}^n E(X_j)$.

Beweis:

Induktion:

$n=1$ ✓

Sei $n>1$: $X_1, \dots, X_{n-1}$ unabhängig, integrierbar

$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n-1}$ integrierbar und $E(\prod_{j=1}^{n-1} X_j) = \prod_{j=1}^{n-1} E(X_j)$.

$\overbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}}^{X}, \overbrace{X_n}^{Y}$ unabh. $\underset{\text{Satz}}{\Rightarrow}$ $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_n = \prod_{j=1}^n X_j$ integrierbar und

$$E(\prod_{j=1}^n X_j) = \underbrace{E(\prod_{j=1}^{n-1} X_j)}_{=\prod_{j=1}^{n-1} E(X_j)} \cdot E(X_n) = \prod_{j=1}^n E(X_j). \qquad \square$$

Def:

Eine Familie $(X_j)_{j\in J}$ heißt:

•) <u>unkorreliert</u>, falls $\forall J' \subseteq J$ endlich: $E(\prod_{j\in J'} X_j) = \prod_{j\in J'} E(X_j)$.

•) <u>paarweise unkorreliert</u>, falls für $j \neq k \in J$:
$$E(X_j X_k) = E(X_j) \cdot E(X_k).$$

•) <u>paarweise unabhängig</u>, falls für $j \neq k \in J$: X_j, X_k unabhängig.

$$\begin{array}{ccc}
\overset{\text{(stärkste)}}{\text{unabhängig}} & \Longrightarrow & \text{unkorreliert} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{paarweise unabh.} & \Longrightarrow & \underset{\text{(schwächste)}}{\text{paarweise unkorreliert}}
\end{array}$$

Das nächste Resultat gilt auch für paarweise unkorreliert.

! Proposition

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Seien } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ unabhängig, quadratisch integrierbare Zufallsvariablen. Dann gilt:} \\ \qquad V\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n V(X_j).\end{array}}$$

<u>Beweis:</u>

$$V\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = E\Big(\underbrace{\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)^2}_{=\sum_{j=1}^n X_j^2 + 2\cdot\sum_{1\le j<k\le n} X_j X_k}\Big) - \Big(\underbrace{E\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)}_{=\sum_{j=1}^n E(X_j)}\Big)^2 =$$

$$= E\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^n X_j^2 + 2\cdot \sum_{1\le j<k\le n} X_j X_k}\Big) - \Big(\sum_{j=1}^n E(X_j)^2 + \cancel{2\cdot \sum_{1\le j<k\le n} E(X_j)\cdot E(X_k)}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^n E(X_j^2) + \cancel{2\cdot \sum_{1\le j<k\le n} \underbrace{E(X_j\cdot X_k)}_{=E(X_j)\cdot E(X_k)}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \big(\underbrace{E(X_j^2) - E(X_j)^2}_{V(X_j)}\big) = \sum_{j=1}^{n} V(X_j)$$

$\square$

Allgemein gilt:

Proposition

> Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable und $\alpha \geq 0$. Dann gilt $\sigma(\alpha X) = \alpha \cdot \sigma(X)$.

Beweis:

$$V(\alpha X) = E(\underbrace{(\alpha X)^2}_{=\alpha^2 X^2}) - (\underbrace{E(\alpha X)}_{\alpha \cdot E(X)})^2 =$$

$$= \alpha^2 \cdot E(X^2) - \alpha^2 \cdot E(X)^2 = \alpha^2 \cdot (\underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{V(X)}) =$$

$$= \alpha^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma(\alpha X) = \sqrt{\underbrace{V(\alpha X)}_{=\alpha^2 \cdot V(X)}} = \underbrace{\sqrt{\alpha^2}}_{\underset{\alpha \geq 0}{\uparrow}{=}\, \alpha} \cdot \sqrt{V(X)} = \alpha \cdot \sigma(X).$$

$\square$

Definition

> Seien X, Y Zufallsvariable. Dann heißt $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Dichte von $\binom{X}{Y}$ (gemeinsame Dichte von X und Y), falls $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:
>
> $$\underbrace{P\begin{pmatrix} X \leq \alpha_1 \\ Y \leq \alpha_2 \end{pmatrix}}_{= P(X \leq \alpha_1, Y \leq \alpha_2)} = \iint_{(-\infty, \alpha_1] \times (-\infty, \alpha_2]} g$$
>
> Das ist äquivalent zu $\forall B \in \mathcal{B}: P(\binom{X}{Y} \in B) = \iint_B g$.
>
> ($g \geq 0$, g integrierbar, $\iint_{\mathbb{R}^2} g = 1$).

Proposition

Es seien X, Y kontinuierliche Zufallsvariable, X habe die Dichte f_1 und Y habe die Dichte f_2. Dann sind X, Y genau dann unabhängig, wenn die gemeinsame Dichte g von X und Y erfüllt, dass $g\binom{x}{y} = f_1(x) f_2(y)$.

Beweis:

$\Rightarrow$:

$$\iint_{(-\infty,\alpha_1] \times (-\infty,\alpha_2]} f_1(x) f_2(y) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\alpha_2} \int_{-\infty}^{\alpha_1} f_1(x) \cdot f_2(y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha_2} f_2(y) \left(\int_{-\infty}^{\alpha_1} f_1(x) \, dx \right) dy = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\alpha_1} f_1(x) \, dx \right)}_{= P(X \leq \alpha_1)} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\alpha_2} f_2(y) \, dy \right)}_{= P(Y \leq \alpha_2)} =$$

$$= P(X \leq \alpha_1) \cdot P(Y \leq \alpha_2) \underset{X, Y \text{ unabh.}}{=} P(X \leq \alpha_1, Y \leq \alpha_2).$$

$\Leftarrow$:

$$P(X \leq \alpha_1, Y \leq \alpha_2) = \iint_{(-\infty,\alpha_1] \times (-\infty,\alpha_2]} f_1(x) f_2(y) \underset{\text{Fubini}}{=} \ldots =$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\alpha_1} f_1(x) \, dx \right)}_{= P(X \leq \alpha_1)} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\alpha_2} f_2(y) \, dy \right)}_{= P(Y \leq \alpha_2)} =$$

$$= P(X \leq \alpha_1) \cdot P(Y \leq \alpha_2).$$

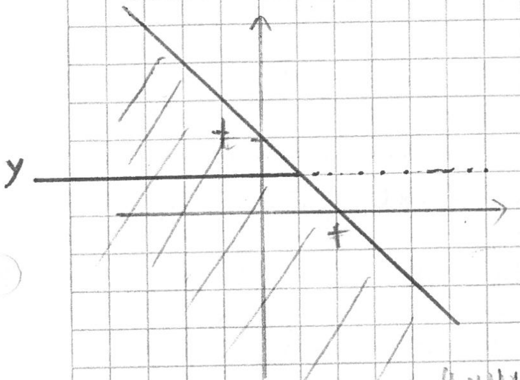
$\square$

X habe Dichte f_1, Y habe Dichte f_2, X, Y unabhängig.
Was ist die Dichte g von X+Y?

Suchen die Verteilung $G(t)$ von $X+Y$ und erhalten
$g(t) = \dot{G}(t)$.

(zuerst Beweis, dann Satz + Def.)

$G(t) = P(X+Y \leq t) = \iint_B f_1(x) f_2(y) \overset{\text{Fubini}}{=}$



$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x+y \leq t \right\}$

(hellblauer Bereich sind x Werte)

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-y} f_1(x) \cdot f_2(y) \, dx \quad dy = \left(\begin{array}{l} z = x+y \to x = z-y \\ dz = dx \\ x = -\infty \to z = -\infty \\ x = t-y \to z = t \end{array} \right) =$$

$t-y = z-y$ ↑ Grenze

haben jetzt Rechtecke

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} f_1(z-y) \cdot f_2(y) \, dz \, dy =$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) \cdot f_2(y) \, dy \right) dz$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = \dot{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y) f_2(y) \, dy$$

Hauptsatz
(3 Eigenschaft → Grenze einsetzen) $f_1 * f_2$

! **Satz (Faltung)** Beweis

Es seien X, Y unabhängige, kontinuierliche Zufallsvariable, X habe die Dichte f_1 und Y habe die Dichte f_2. Dann hat X+Y die Dichte $(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_2(t) \, dt$.

gleiche wie $g(t) = \dot{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots$ (oben)

Definition

Falls $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fkt., dann heißt

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)\, f_2(t)\, dt$$

die Faltung von f_1 und f_2.

Satz

Seien $X_1, X_2, \dots X_n$ unabhängige Zufallsvariable, wobei für $j \in \{1, \dots, n\}$ X_j $N(\mu_j, \sigma_j)$-verteilt ist ($\mu_j, \sigma_j \in \mathbb{R}, \sigma_j > 0$). Dann ist $\sum_{j=1}^{n} X_j = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $N\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right)$-verteilt.

Beweis:

Induktion:

$n=1$: ✓

$n=2$: Dichte $g(x)$ und $X_1 + X_2$ ist die Faltung von

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1}}_{①} e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}}_{②} \cdot e^{\frac{-(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

① u. ② in Formel für Faltung einsetzen

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1} \cdot e^{\frac{-(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2} \cdot e^{\frac{-(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2} \cdot e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}\, dt =$$

$$\underset{\text{Mathematica}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1\cdot\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}\cdot\sigma_2^2} \cdot e^{\frac{-(\mu_1+\mu_2-t)^2}{2\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(t-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

also $X_1 + X_2$ ist $N(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.

Sei $n > 2$: $X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}, X_n$ unabhängig

$X_1 + \ldots + X_{n-1}$ ist $N\left(\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2}\right)$

Daher ist $\sum_{j=1}^{n} X_j = (X_1 + \ldots + X_{n-1}) + X_n$

$$N\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j + \mu_n}_{=\sum_{j=1}^{n}\mu_j}, \sqrt{\underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_j^2}^{\,2} + \sigma_n^2}_{=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}}\Big)\text{-verteilt},$$

also $N\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right)$-verteilt. □

Korollar

Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $N(\mu, \sigma)$-verteilte, unabhängige Zufallsvariable. Dann ist $\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j$ $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$-verteilt.

Beweis:

$\sum_{j=1}^{n} X_j$ ist nach dem Satz $N\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu}_{n\cdot\mu}, \sqrt{\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sigma^2}_{n\cdot\sigma^2}}\Big)$-verteilt,

also $N(n\cdot\mu, \sqrt{n}\cdot\sigma)$-verteilt.

Daher ist $\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j$ $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$-verteilt. □

11.5.

$\mathrm{Cor}(X,Y) := E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$ Kovarianz

(X,Y unkorelliert $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Cor}(X,Y)=0$, $\mathrm{Cor}(X,X) = V(X)$)

Definition

Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Zufallsvariablen. Dann haben $(X_j)_{j\in J}$ gleiche Verteilung, falls $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \forall j_1, j_2 \in J$: $P(X_{j_1} \le \alpha) = P(X_{j_2} \le \alpha)$.

Bemerkungen:

- haben gleiche Verteilungsfunktion
- äquivalent ist : $\forall j_1, j_2 \in J : \forall B \in \mathcal{B} : P(X_{j_1} \in B) = P(X_{j_2} \in B)$.
- $(X_j)_{j\in J}$ gleiche Verteilung, $A \in \mathcal{B}$, Y_j sei X_j bei A abgeschnitten. Dann haben $(Y_j)_{j\in J}$ gleiche Verteilung.

  Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}$. Setze $B^* := \begin{cases} B\cap A, & \text{falls } 0 \notin B \\ (B\cap A) \cup (\mathbb{R}\setminus A), & \text{falls } 0 \in B \end{cases}$.

  $\{Y_j \in B\} = \{X_j \in B^*\}$. Sei $j_1, j_2 \in J$.

  $P(Y_{j_1} \in B) = P(X_{j_1} \in B^*) = P(X_{j_2} \in B^*) = P(Y_{j_2} \in B)$.

  $\square$

- $(X_j)_{j\in J}$ haben gleiche Verteilung, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow$ $(f(X_j))_{j\in J}$ haben gleiche Verteilung

  Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}$: Seien $j_1, j_2 \in J$. $P(\underbrace{f(X_{j_1}) \in B}_{\Leftrightarrow X_{j_1} \in f^{-1}(B)}) =$

  $= P(X_{j_1} \in f^{-1}(B)) = P(X_{j_2} \in f^{-1}(B)) = P(f(X_{j_2}) \in B)$

  $\square$

- Insbesondere $(X_j)_{j\in J}$ gleiche Verteilung $\Rightarrow$ $(X_j^2)_{j\in J}$ gleiche Verteilung. ($\{X_j^2 \le t\} = \{-\sqrt{t} \le X_j \le \sqrt{t}\}$.)

Proposition

Sei X Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann haben $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gleiche Verteilung, und sie haben auch die gleiche Verteilung wie X.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\{\tilde{X}_n \leq \alpha\} = [\underbrace{\Omega, \Omega, \Omega, \dots, \Omega}_{n-1-\text{mal}}, \{X \leq \alpha\}]$$

$$\tilde{P}(\tilde{X}_n \leq \alpha) = \tilde{P}([\underbrace{\Omega, \dots, \Omega}_{n-1-\text{mal}}, \{X \leq \alpha\}]) \underset{P(\Omega)=1}{=} P(X \leq \alpha). \quad \square$$

Proposition

Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Zufallsvariablen, die gleiche Verteilung haben und sei $j_0 \in J$.

1.) Falls X_{j_0} integrierbar ist, dann ist X_j integrierbar $\forall j \in J$ und es gilt: $E(X_j) = E(X_{j_0}) \quad \forall j \in J$.

2.) Falls X_{j_0} quadratisch integrierbar ist, dann ist X_j quadratisch integrierbar $\forall j \in J$ und es gelten: $E(X_j) = E(X_{j_0})$ und $\sigma(X_j) = \sigma(X_{j_0}) \quad \forall j \in J$.

Beweis:

1.) 1. Schritt:

$X_{j_0} \geq 0$. $P(X_j < 0) = P(X_{j_0} < 0) = 0$

Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$X_{j,n}(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} \leq X_j(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \text{ für ein } k \in \{0, 1, \dots, 2^{2n}-1\} \\ 2^n, & \text{falls } X_j(\omega) \geq 2^n \end{cases}$$

$X_{j,n} \leq X_{j,n+1}$ und $X_{j,n} \xrightarrow{\text{pktw.}} X_j$.

$$E(X_{j,n}) = 2^n \cdot \underbrace{P(X_j \geq 2^n)}_{=P(X_{j_0} \geq 2^n)} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \cdot \underbrace{P\left(\frac{k}{2^n} \leq X_j < \frac{k+1}{2^n}\right)}_{=P\left(\frac{k}{2^n} \leq X_{j_0} < \frac{k+1}{2^n}\right)} =$$

$$= E(X_{j_0,n}).$$

$$E(X_j) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{E(X_{j,n})}_{=E(X_{j_0,n})} = E(X_{j_0})$$

2. Schritt: für bel. X_{j_0}

$$E(X_j) = \underbrace{E(X_j^+)}_{=E(X_{j_0}^+)} - \underbrace{E(X_j^-)}_{=E(X_{j_0}^-)} = \quad \text{(insbesondere } X_j \text{ int.bar)}$$

$$= E(X_{j_0}^+) - E(X_{j_0}^-) = E(X_{j_0}).$$

2.) $(X_j^2)_{j\in J}$ haben gleiche Verteilung, $X_{j_0}^2$ integrierbar

$\overset{1.)}{\Rightarrow}$ X_j^2 integrierbar $\forall j$

$\Rightarrow$ X_j quadratisch integrierbar $\forall j$

$\overset{1.)}{\Rightarrow}$ $E(X_j) = E(X_{j_0})$ und $E(X_{j_0})^2 = E(X_j)^2$

$\Rightarrow$ $V(X_j) = \underbrace{E(X_j^2)}_{=E(X_{j_0}^2)} - \underbrace{E(X_j)}_{=E(X_{j_0})}^2 = V(X_{j_0})$

$\Rightarrow$ $\sigma(X_j) = \sqrt{\underbrace{V(X_j)}_{=V(X_{j_0})}} = \sigma(X_{j_0}).$

$\square$

12.) Das starke Gesetz der großen Zahlen

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von unabhängigen, integrierbaren Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung. Setze $\mu := E(X_1)$ $(= E(X_n))$.

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} X_j = \mu$ P-fast sicher ← neuer Konvergenz-Begriff

D.h.: $\exists A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) = 1$, sodass $\forall \omega \in A$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) = \mu.$$

! Definition

> Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und X Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann sagen wir $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast-sicher, falls $\exists A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) = 1$, sodass $\forall \omega \in A$:
>
> $$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

(Grenzwert hängen immer mit Topologie zusammen; Gegenbsp: die fast sichere Konvergenz kann man nicht mit Topologie beschreiben)

Tschebyschev'sche Ungleichung

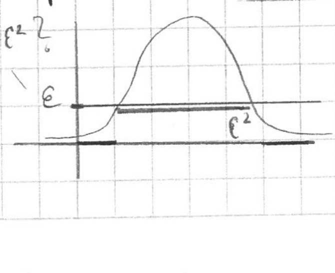
Satz

> Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable und sei $\varepsilon > 0$.
> Dann gilt $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(X^2)$.

Beweis:

Definiere $Y(\omega) := \begin{cases} \varepsilon^2, & \text{falls } |X| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

nicht ε^2?



Es gilt $Y \leq X^2$.

$x \le y$ vgl. Funktion

$\Rightarrow E(X^2) \ge E(Y) = \varepsilon^2 \, P(|X| \ge \varepsilon) + 0 \, P(|X| < \varepsilon) =$

$= \varepsilon^2 P(|X| \ge \varepsilon)$

$\Rightarrow P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot E(X^2).$

$\square$

Falls es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|X| \le c$ gibt, dann ist X quadratisch integrierbar, weil: $E(X^2) \le E(c^2) = c^2 < +\infty$

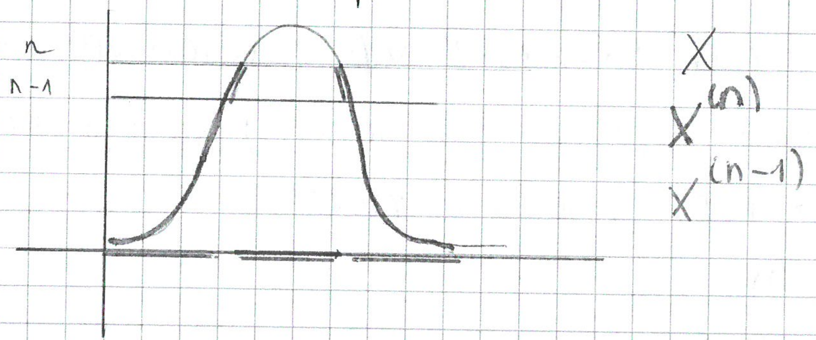
$X^2 \ge 0 \to$ endlich $\Rightarrow$ integrierbar

12.5

$X \ge 0$ Zufallsvariable,

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{X^{(n)}(\omega)} := \begin{cases} X(\omega), & \text{falls } X(\omega) < n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\underline{X^{(n-1,n)}(\omega)} := \begin{cases} X(\omega), & \text{falls } n-1 \le X(\omega) < n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



1. Eigenschaft:

•) $X^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} X^{(j-1,j)}$ (höchstens 1 Summand $\neq 0$).

$X^{(n)\,2} = \sum_{j=1}^{n} X^{(j-1,j)\,2}$

•) $X^{(n)}, X^{(n-1,n)}$ quadratisch integrierbar (da $X^{(n)} \le n$, $X^{(n-1,n)} \le n$)

•) $X^{(n)} \le X^{(n+1)}$

•) $\lim_{n \to \infty} X^{(n)} = X$ punktweise

2. Eigenschaft:

- $E(X^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} E(X^{(j-1,j)})$,

  $E(X^{(n)^2}) = \sum_{j=1}^{n} E(X^{(j-1,j)^2})$

- Falls X integrierbar ist, dann ist $E(X) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{E(X^{(n)})}_{= \sum_{j=1}^{n} E(X^{(j-1,j)})}$

  und $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X^{(n-1,n)})$. (Def. d. Reihe)

3. Eigenschaft:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
Dann gilt $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} a_n = 0$.

Beweis:

Sei $N \in \mathbb{N}$, sei $k > N$.

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{k} a_n \xrightarrow{\text{umformen}} \underbrace{\sum_{n=N}^{k} a_n}_{} = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} a_n}_{\text{konvergent}} - \sum_{n=1}^{N-1} a_n$$

Summe aufspalten

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n =: a$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = a - \sum_{n=1}^{N-1} a_n$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} a_n = a - \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} a_n}_{=a} = 0 \ !$$

wegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =: a$

$\square$

4. Eigenschaft:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0 \ \forall n$. Falls es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \alpha \ \forall N$ gibt, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5. Eigenschaft:

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gilt

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = a$.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N_1\ \forall n \ge N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{N_1} |a_j - a| = 0 \Rightarrow \exists N \ge N_1\ \forall n \ge N : \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{N_1}|a_j - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $n \ge N$: $\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} a_j - \underbrace{a}_{=\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} a}\right| \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}|a_j - a| =$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{N_1}|a_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\underbrace{\sum_{j=N_1+1}^{n}\underbrace{|a_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}}_{<\frac{\varepsilon}{2}\cdot(n-N_1)\le\frac{\varepsilon}{2}\cdot n}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

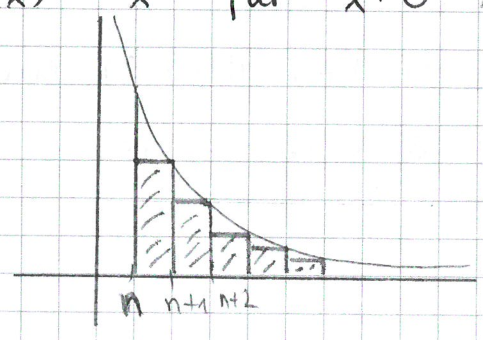
$\square$

6. Eigenschaft:

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le \frac{2}{n}$. (in Analysis: bei Integraltest tritt das in Schritt 3 auf)

Beweis:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$ ist streng monoton fallend.



$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le \int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}.$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\leq \frac{1}{n}} \leq \frac{2}{n}.$$

$\square$

SATZ

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die gleiche Verteilung haben. Setze $\mu := E(X_1)$.
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \mu$ P-fast-sicher.

Beweis:

1. Schritt:

Beh: Es genügt den Satz für den Fall $X_n \geq 0$ $\forall n$ zu beweisen.

Beweis d. Beh:

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ZV) unabhängig, integrierbar und gleiche Verteilung.
(X_n^+) unabh., integrierbar, gl. Verteilung, ≥ 0.
(X_n^-) unabh., integrierbar, gleiche Verteilung, ≥ 0.

$\Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{A}$ mit $P(A_1) = 1$, sodass $\forall \omega \in A_1$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j^+ = E(X_1^+)$,

$\exists A_2 \in \mathcal{A}$ mit $P(A_2) = 1$, sodass $\forall \omega \in A_2$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j^- = E(X_1^-)$.

Definiere $A := A_1 \cap A_2$. $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = 1$.

Sei $\omega \in A$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{X_j(\omega)}$ $=$
da in A_1 & A_2

$X_j = X_j^+ - X_j^-$ aufspalten

$= X_j^+(\omega) - X_j^-(\omega)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j^+(\omega)}_{= E(X_1^+) \text{ (weil } \omega \in A_1)} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^-(\omega)}_{= E(X_1^-) \text{ (weil } \omega\in A_2)} =$$

$\omega \in A = A_1 \cap A_2$!

$$= E(X_1^+) - E(X_1^-) = E(X_1) = \mu.$$

$\Diamond$

2. Schritt:

zuerst: - mit Teilfolge
- wir brauchen q. int bar
→ normieren (Y_n)

Ab jetzt sehen wir $X_n \geq 0 \ \forall n$ voraus.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $Y_n := X_n^{(n)}$ $Y_1 = X_1^{(1)}$: X_1 an der Stelle 1 abgeschnitten usw.

Folge: $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind unabhängig, Y_n quadratisch integrierbar (haben aber nicht mehr gleiche Verteilung).

Sei $\alpha > 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $k_n \in \mathbb{N}$ so, dass $\alpha^n - 1 < k_n \leq \alpha^n$

Teilfolge von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(k_n) ist monoton wachsend, $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$.

Ziel: Satz gilt für Teilfolge und Y_n
→ dann auf X_n bringen
→ dann ganze Folge (nicht nur Teilfolge)

Behauptung: $\exists c > 0$ mit $c \cdot \alpha^n \leq k_n \leq \alpha^n \ \forall n$

zu (α^n)

Beweis d. Beh.:

$k_n \leq \alpha^n$

$\alpha^n - 1 < k \leq \alpha^n$

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} = 1 - \frac{1}{\alpha^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 > \frac{1}{2}$$

$$\exists N : \forall n \geq N : \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} \geq \frac{1}{2}$$

Setze $c := \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}, \dots, \frac{\alpha^N - 1}{\alpha^N} \right\} > 0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$: $\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} \geq c \Rightarrow$

$$k_n \geq \alpha^n - 1 \geq c \cdot \alpha^n. \quad + \ k_n \leq \alpha^n \Rightarrow \exists c \ c\,\alpha^n \leq k_n \leq \alpha^n \ \forall n$$

„Majorante" Minorante

$\Diamond$

3. Schritt:

Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $Z_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (Y_j - E(Y_j))$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_{k_n}| \geq \varepsilon)$ und brauchen wir im nächsten Schritt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(|Z_{k_n}| \geq \epsilon) = 0.$$

Beweis der Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} a_n = 0$

Wegen der 3. Eigenschaft genügt es z.z., dass $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_{k_n}| \geq \epsilon)$ konvergiert.

Sei $r \in \mathbb{N}$. $P(|Z_r| \geq \epsilon) \underset{\text{Tschebyscheff'sche Ungl.}}{\leq} \frac{1}{\epsilon^2} E(\underbrace{Z_r^2}) =$

$$\underbrace{Z_r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{r} (Y_j - E(Y_j))}\Big)^2$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{j=1}^{r} Y_j - \underbrace{\sum_{j=1}^{r} E(Y_j)}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{r} E(Y_j)} = E\Big(\sum_{j=1}^{r} Y_j\Big)$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \underbrace{E\Big(\Big(\sum_{j=1}^{r} Y_j - E\Big(\sum_{j=1}^{r} Y_j\Big)\Big)^2\Big)}_{= V\left(\sum_{j=1}^{r} Y_j\right)} =$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot V\Big(\sum_{j=1}^{r} Y_j\Big) \underset{(Y_j)\text{ unabh. + qu int}}{=} \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \sum_{j=1}^{r} \underbrace{V(Y_j)}_{= E(Y_j^2) - E(Y_j)^2 \leq E(Y_j^2)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \sum_{j=1}^{r} E(Y_j^2)$$

nur für Summe

verwenden jetzt 4. Eigenschaft

Sei $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^{N} \underbrace{P(|Z_{k_n}| \geq \epsilon)}$ $\leq$ — das muss konvergieren, suche Majorante

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{k_n^2} \cdot \sum_{j=1}^{k_n} E(Y_j^2)$$

4. Eigenschaft:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $a_n > 0 \; \forall n$
Falls $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \alpha \; \forall n$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert
$\Rightarrow$ MAJORANTE suchen

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{k_n^2} E(Y_j^2) = (*)$$

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
n \backslash j & 1 & 2 & \dots & k_1 \;\dots\; k_2 & \dots & k_N \\
\hline
1 & * & * & & * \; 0 \; 0 \dots & \dots & 0 \\
2 & * & * & & * * \dots * \; 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\
N & * & * & \dots & \dots & \dots & *
\end{array}
$$

Summe der Zeilensumme = Summe der Spaltensumme
(mit 0er auffüllen)

Für $j \in \{1, 2, \dots, k_N\}$ wähle n_j minimal mit $k_{n_j} \geq j$.

Summe vertauscht + Index angepasst

$$(*) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{j=1}^{k_N} \sum_{n=n_j}^{N} \frac{1}{k_n^2} \cdot E(Y_j^2) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{j=1}^{k_N} \Big(\underbrace{\sum_{n=n_j}^{N} \frac{1}{k_n^2}} \Big) \cdot E(Y_j^2)$$

das nun vereinfachen

$$\sum_{n=n_j}^{N} \underbrace{\frac{1}{k_n^2}}_{\leq \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\alpha^{2n}}} \leq \frac{1}{c^2} \cdot \sum_{n=n_j}^{N} \frac{1}{\alpha^{2n}} = \frac{1}{c^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha^{2n_j}}}_{= \left(\frac{1}{\alpha^{n_j}}\right)^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-n_j} \underbrace{\frac{1}{\alpha^{2n}}}_{= \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n}}_{\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}} \leq$$

2. Schritt ($k_n \geq c \cdot \alpha^n$)

Index wird jetzt verändert

geom. Reihe

$\left|\frac{1}{\alpha^2}\right| < 1$, weil $\alpha > 1$

$$\leq \frac{1}{c^2} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha^{n_j}}\right)^2} \leq \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{1}{j^2}$$

weil $\alpha^{n_j} \geq k_{n_j} \geq j \Rightarrow \frac{1}{\alpha^{n_j}} \leq \frac{1}{j}$

2. Schritt

noch einmal aufgeschrieben

$$\sum_{n=1}^{N} P(|Z_{k_n}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{j=1}^{k_N} \Big(\underbrace{\sum_{n=n_j}^{N} \frac{1}{k_n^2}}_{\leq \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\cdot\frac{1}{j^2}} \Big) E(Y_j^2) \ \leq$$

Altes einfügen

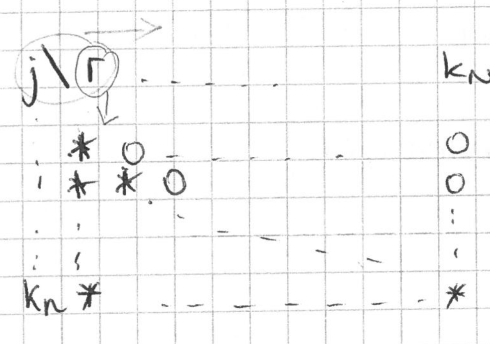
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \cdot \sum_{j=1}^{k_N} \frac{1}{j^2} \cdot E(\underbrace{Y_j^2}_{=X_j^{(j)2}}) =$$

2. Schritt $Y_n := X_n^{(n)}$

$$E(X^{(n)2}) = \sum_{j=1}^{n} E(X^{(j-1,j)2}) \underset{\text{2. Eigenschaft}}{=} \sum_{r=1}^{j} \underbrace{E(X_j^{(r-1,r)2})}_{=E(X_1^{(r-1,r)2})}$$

(weil $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gl. Verteilung haben)

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \sum_{j=1}^{k_N} \sum_{r=1}^{j} \frac{1}{j^2} \cdot E(X_1^{(r-1,r)2}) =$$



Summen vertauschen & Index anpassen

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \cdot \sum_{r=1}^{k_N} \sum_{j=r}^{k_N} \frac{1}{j^2} \cdot E(X_1^{(r-1,r)2})$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \cdot \sum_{r=1}^{k_N} \Big(\underbrace{\sum_{j=r}^{k_N} \frac{1}{j^2}}_{\leq \sum_{j=r}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \frac{2}{r}} \Big) \cdot E(X_1^{(r-1,r)2}) \leq$$

6. Eigenschaft

$$\sum_{n=1}^{N} P(|Z_{k_n}| \geq \varepsilon) \leq 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \cdot \sum_{r=1}^{k_N} \frac{1}{r} \cdot E(X_1^{(r-1,r)2})$$

nun die Summe betrachten

$$X_1^{(r-1,r)} \leq r \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot X_1^{(r-1,r)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \cdot X_1^{(r-1,r)2} \leq X_1^{(r-1,r)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\cdot E\left(X_1^{(r-1,r)^2}\right) \le E\left(X_1^{(r-1,r)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{k_N} \frac{1}{r}\cdot E\left(X_1^{(r-1,r)^2}\right) \le \underbrace{\sum_{r=1}^{k_N} E\left(X_1^{(r-1,r)}\right)}_{\underset{\text{2. Eigenschaft}}{=} E\left(X_1^{(k_N)}\right)} =$$

$$= E\big(\underbrace{X_1^{(k_N)}}_{\underset{\text{1. Eig.}}{\le} X_1}\big) \le E(X_1) = \mu.$$

wieder angeschrieben:

$$\sum_{n=1}^{N} P(|Z_{k_n}| \ge \epsilon) \le 2\cdot\frac{1}{\epsilon^2}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\underbrace{\sum_{r=1}^{\overset{\text{neues}}{k_N}} \frac{1}{r}\cdot E\left(X_1^{(r-1,r)^2}\right)}_{\le \mu} \le$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $a_n > 0$, falls $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=1}^{N} a_n \le \alpha$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

habe Majorante gefunden $\quad \le 2\mu\cdot\frac{1}{\epsilon^2}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \quad \forall N \in \mathbb{N}$

4. Eigenschaft: $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_{k_n}| \ge \epsilon)$ konvergent. $\diamond$

4. Schritt:

andere Menge als $\mathcal{A}$

Behauptung: $\exists\, D(\alpha) \in \mathcal{A}$ mit $P(D(\alpha)) = 1$, sodass $\forall \omega \in D(\alpha)$:
$\lim_{n\to\infty} Z_{k_n}(\omega) = 0$.

Beweis: Definiere

$$D(\alpha) := \bigcap_{r=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=N}^{\infty} \underbrace{\overbrace{\left\{|Z_{k_n}| < \tfrac{1}{r}\right\}}^{\in \mathcal{A}}}_{= \Omega \setminus \left\{|Z_{k_n}| \ge \frac{1}{r}\right\}}}_{=: D_{r,N} \underset{\text{De Morgan}}{=} \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{|Z_{k_n}| \ge \frac{1}{r}\right\}\right)}}_{=: D_r} \in \mathcal{A}$$

$D_{r,N} \subseteq D_{r,N+1}$, $\quad \bigcup_{N=1}^{\infty} D_{r,N} = D_r$

↳ aufsteigende Mengenfolge

Stetigkeitseigenschaft $\Rightarrow P(D_r) = \lim\limits_{N\to\infty} P(D_{r,N})$ (*)

$$D_r \supseteq D_{r+1} \; , \; \bigcap_{r=1}^{\infty} D_r = D(\alpha)$$

Stetigkeitseigenschaft $\Rightarrow$ $P(D(\alpha)) = \lim\limits_{r\to\infty} P(D_r) =$

(*) einsetzen

$$= \lim_{r\to\infty} \lim_{N\to\infty} P(\underbrace{D_{r,N}}_{= \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{ |Z_{k_n}| \geq \frac{1}{r} \} \right)}) \stackrel{\ominus}{=}$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{ |Z_{k_n}| \geq \tfrac{1}{r} \} \right)$$

$$\stackrel{\ominus}{=} 1 - \lim_{r\to\infty} \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{ |Z_{k_n}| \geq \tfrac{1}{r} \} \right)$$

betrachte nun $\lim\limits_{r\to\infty}$ ...

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \lim_{N\to\infty} \underbrace{P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{ |Z_{k_n}| \geq \tfrac{1}{r} \} \right)}_{\leq \sum_{n=N}^{\infty} P\left(|Z_{k_n}| \geq \frac{1}{r} \right)} \leq$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P\left(|Z_{k_n}| \geq \tfrac{1}{r} \right)}_{\underset{\text{3. Schritt}}{=} 0} = 0$$

$$\Rightarrow P(D(\alpha)) = 1 - \underbrace{\lim_{r\to\infty} \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{ |Z_{k_n}| \geq \tfrac{1}{r} \} \right)}_{=0} = 1$$

Sei $\omega \in D(\alpha)$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists r$ mit $\frac{1}{r} < \varepsilon$.

$$\left(D(\alpha) = \bigcap_{r=1}^{\infty} D_r \; , \; D_r = \bigcup_{N=1}^{\infty} D_{r,N} \; , \; D_{r,N} = \bigcap_{n=N}^{\infty} \{ |Z_{k_n}| < \tfrac{1}{r} \} \right)$$

$w \in D_r$ (weil in $D(\alpha)$) $\Rightarrow \exists N: \; w \in D_{r,N}$. Sei $n \geq N$

$\Rightarrow w \in \{|Z_{k_n}| < \frac{1}{r}\} \Rightarrow |Z_{k_n}(w)| < \frac{1}{r} < \varepsilon$.

Daher $\lim\limits_{n\to\infty} Z_{k_n}(w) = 0$. ◇

5. Schritt:

abgeschnittene!

Behauptung: $\forall w \in D(\alpha): \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum\limits_{j=1}^{k_n} Y_j(w) = \mu$. für Teilfolge $\lim \ldots = \mu$

Beweis: $\lim\limits_{n\to\infty} E(\underbrace{\underbrace{Y_n}_{= X_n^{(n)}})}$ $\stackrel{\circ}{=}$

$= E(X_1^{(n)})$, da (X_j) gleiche Verteilung

$\stackrel{\circ}{=} \lim\limits_{n\to\infty} E(X_1^{(n)}) \underset{2. Eig.}{=} E(X_1) = \mu$

5. Eigenschaft $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} E(Y_j) = \mu$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = a$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \cdot \sum\limits_{j=1}^{k_n} E(Y_j) = \mu$. (*) $\Rightarrow$ wollen das ohne E

Sei $w \in D(\alpha)$. $\frac{1}{k_n} \sum\limits_{j=1}^{k_n} \underbrace{Y_j(w)}_{(Y_j(w) - E(Y_j) + E(Y_j))}$ $\stackrel{\circ}{=}$

$-1+1$!

kennen ja Grenzwert wegen oben
$\Rightarrow$ können so Grenzwert für diese Summe herleiten von Y_j

Linearität

$\stackrel{\circ}{=} \underbrace{\frac{1}{k_n} \sum\limits_{j=1}^{k_n} (Y_j(w) - E(Y_j))}_{Z_{k_n}(w)} + \frac{1}{k_n} \cdot \sum\limits_{j=1}^{k_n} E(Y_j) =$

3. Schritt
$Z_{k_n}(w) = \ldots$
$\Rightarrow$ so definiert bei Behauptung

$= \underbrace{Z_{k_n}(w)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\frac{1}{k_n} \sum\limits_{j=1}^{k_n} E(Y_j)}_{\to \mu} \to \mu$

4. Schritt (*)

Also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum\limits_{j=1}^{k_n} Y_j(\omega) = \mu.$ $\diamond$

(nun für Y abgeschlossen (also Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$))

6. Schritt: nun wie im 5. Schritt, nur für Folge $(X_j)_j$

Behauptung: $\exists A(\alpha) \in \mathcal{A}$ mit $P(A(\alpha)) = 1$, sodass $\forall \omega \in A(\alpha)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} X_j(\omega) = \mu.$$

Beweis d. Beh.: Sei $N \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{n=1}^{N} P(\underbrace{X_n \geq n}_{=\bigcup_{r=n}^{\infty}\{r \leq X_n < r+1\}})$ $=$

$$\underset{(\sigma\text{-Add.})}{=} \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=n}^{\infty} \underbrace{P(r \leq X_n < r+1)}_{=P(r\leq X_1<r+1)\text{, weil } (X_j) \text{ gl. Verteilung}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lim_{R\to\infty} \sum_{r=n}^{R} P(r \leq X_1 < r+1) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=n}^{R} P(r \leq X_1 < r+1)$$

Betrachte nur Summe: (ohne lim)

Sei $R \geq N$. $\sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{r=n}^{R} P(r \leq X_1 < r+1) =$

$$\begin{array}{l|llll}
\downarrow n \setminus r \rightarrow & & & & R \\
 & * & * & \cdots & * \\
 & o & * & \cdots & * \\
 & o & o & \ddots & \vdots \\
 & \vdots & & & \vdots \\
N & o & \cdots & o * \cdots & *
\end{array}$$

Summen vertauschen + Index anpassen $= \sum\limits_{r=1}^{R} \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\min\{r,N\}} P(r \leq X_1 < r+1)}_{=\underbrace{\min\{r,N\}}_{\leq r} P(r\leq X_1<r+1)}$ $\leq$

$$\leq \sum_{r=1}^{R} r \cdot P(r \leq X_1 < r+1)$$

Suchen Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{N} P(X_n \geq n)$

Definiere Zufallsvariable U durch:

$$U(\omega) := \begin{cases} r, & \text{falls } r \leq X_1(\omega) < r+1, \text{ für ein } r \in \{0,1,\ldots,R\}, \\ 0, & \text{falls } X_1(\omega) \geq R+1 \end{cases}$$

vgl. wie $U(n)$ definiert

$\underline{U \leq X_1} \Rightarrow \quad \mu = E(X_1) \geq E(U) = \sum_{r=0}^{R} r \cdot P(r \leq X_1 < r+1) =$

$$= \sum_{r=1}^{R} r \cdot P(r \leq X_1 < r+1)$$

noch mal angeschrieben

Daher $\underline{\sum_{n=1}^{N} \sum_{r=n}^{R} P(r \leq X_1 < r+1) \leq \sum_{r=1}^{R} r \cdot P(r \leq X_1 < r+1) \leq \mu}$ Majorante

$\forall N, R.$

noch mal anschreiben

$\underline{\sum_{n=1}^{N} P(X_n \geq n) = \lim_{R \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=n}^{R} P(r \leq X_1 < r+1) \leq \mu} \qquad \forall N$

$(a_n)_{n}$ Folge + Majorante $\Rightarrow \sum a_n$ konvergiert

4. Eigenschaft: $\Rightarrow \sum_{n=1} P(X_n \geq n)$ konvergiert

3. Eigenschaft $\Rightarrow \underline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(X_n \geq n) = 0}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $\sum a_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N} a_n = 0$

$\underline{\text{Definiere} \quad A(\alpha)} := \underbrace{D(\alpha)}_{\in \mathcal{A} \; (4. \text{Schnitt})} \cap \bigcup_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=N}^{\infty} \overbrace{\{X_n < n\}}^{\in \mathcal{A}}}_{=: \underline{A_N} = \Omega \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} \{X_n \geq n\}} \in \mathcal{A}$

$=: \underline{A'}$

wie im 4. Schnitt:

$\underline{A_N \subseteq A_{N+1}}, \quad \underline{A' = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N}$

Stetigkeitseigenschaft $\Rightarrow \underline{P(A')} = \lim_{N\to\infty} P(A_N) =$

$A_N = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{X_n \geq n\}\right)$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{X_n \geq n\}\right)$$

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \underbrace{P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{X_n \geq n\}\right)}_{\leq \sum_{n=N}^{\infty} P(X_n \geq n)} \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(X_n \geq n) = 0$$

→ Eigenschaft, falls nicht paarweise disjunkt noch mal angeschrieben

$$\Rightarrow P(A') = 1 - \underbrace{\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{X_n \geq n\}\right)}_{=0} = 1$$

$P(D(\alpha)) = 1$ (4. Schritt)

$$\Rightarrow P(\underbrace{A(\alpha)}_{D(\alpha)\cap A'}) = 1$$

$A(\alpha) = D(\alpha) \cap A'$

Sei $\omega \in A(\alpha) \Rightarrow \omega \in D(\alpha)$ und $\omega \in A' = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$.

$\Rightarrow \exists N : \omega \in A_N = \bigcap_{n=N}^{\infty} \{X_n < n\}$.

Sei $j \geq N$. $\Rightarrow \omega \in \{X_j < j\} \Rightarrow X_j(\omega) < j$

$\Rightarrow Y_j(\omega) = X_j^{(j)}(\omega) = X_j(\omega)$

Wähle n so, dass $k_n \geq N$.

$$\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} X_j(\omega) \overset{\text{Summe teilen}}{=} \frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{N} \underbrace{X_j(\omega)}_{= X_j(\omega) - Y_j(\omega) + Y_j(\omega)} + \frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=N+1}^{k_n} \underbrace{X_j(\omega)}_{= Y_j(\omega)} =$$

$$= \frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{N}(X_j(\omega) - Y_j(\omega)) + \underbrace{\frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{N} Y_j(\omega) + \frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=N+1}^{k_n} Y_j(\omega)}_{= \frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{k_n} Y_j(\omega)} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{N}(X_j(\omega) - Y_j(\omega))}_{\to 0 \ (k_n\to\infty,\ 2.\text{ Schritt})} + \underbrace{\frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{k_n} Y_j(\omega)}_{\to \mu \ (5.\text{ Schritt, weil } \omega\in D(\alpha))} \longrightarrow \mu$$

Somit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n}\cdot\sum_{j=1}^{k_n} X_j(\omega) = \mu$. $\diamond$

7. Schritt:

abzählbarer Durchschnitt

Definiere $A := \bigcap_{s=1}^{\infty} \underbrace{A(1+\frac{1}{s})}_{\in \mathcal{A} \text{ (6. Schritt)}} \quad \in \mathcal{A}$

$P(A(1+\frac{1}{s})) = 1$ (6. Schritt) $\Rightarrow P(A) = 1$

Sei $\omega \in A$. Sei $\varepsilon > 0$.
↳ fest gewählt, aber bel. + kann für jedes erweitert werden

$$\frac{1}{1+1/s}\left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{s\to\infty} \mu - \frac{\varepsilon}{2} > \mu - \varepsilon$$

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{s\to\infty} \mu + \frac{\varepsilon}{2} < \mu + \varepsilon$$

$\exists s : \frac{1}{1+1/s}\left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \mu - \varepsilon$ und $\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \mu + \varepsilon$

von ω und ε abhängig

Setze $\alpha := 1 + \frac{1}{s}$ (>1). Wähle k_n wie in 2. Schritt für dieses α.

$\omega \in A \Rightarrow \omega \in A(\underbrace{\alpha}_{1+\frac{1}{s}})$.

$$\underbrace{\frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1}}}\left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) \to \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{\frac{1}{1+\frac{1}{s}}} \cdot \left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \mu - \varepsilon$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\alpha^r}}{\alpha} \to \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha^{r+1}}{\underbrace{\alpha^r - 1}} \cdot \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) \to \underbrace{\alpha}_{=(1+\frac{1}{s})} \cdot \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \mu + \varepsilon$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{\alpha^r}} \to \alpha$$

$\exists N_1 \; \forall r \geq N_1 \; : \quad \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1}} \left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \mu - \varepsilon$ und

$$\frac{\alpha^{r+1}}{\alpha^r - 1} \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \mu + \varepsilon$$

Weil $\omega \in A(\alpha)$, nach dem 6. Schritt:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{k_r} \cdot \sum_{j=1}^{k_r} X_j(\omega) = \mu.$$

$$\exists N_2 \geq N_1 : \forall r \geq N_2 : \quad \mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{k_r} \cdot \sum_{j=1}^{k_r} X_j(\omega) < \mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $N := k_{N_2}$. Sei $n \geq N$.

Nach dem 2. Schritt $\exists r \geq N_2 : \alpha^r - 1 \leq k_r \leq n \leq k_{r+1} \leq \alpha^{r+1}$.

$$\sum_{j=1}^{k_r} X_j(\omega) \leq \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) \leq \sum_{j=1}^{k_{r+1}} X_j(\omega)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}}_{= \frac{k_r}{n} \cdot \frac{1}{k_r}} \sum_{j=1}^{k_r} X_j(\omega) \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{k_{r+1}}{n} \cdot \frac{1}{k_{r+1}}} \cdot \sum_{j=1}^{k_{r+1}} X_j(\omega)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\frac{k_r}{n} \cdot \frac{1}{k_r}}_{\geq \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1}}} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{k_r} X_j(\omega)}_{> \mu - \frac{\varepsilon}{2}}}_{> \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1}} \left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \mu - \varepsilon} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) \leq \underbrace{\underbrace{\frac{k_{r+1}}{n} \cdot \frac{1}{k_{r+1}}}_{\frac{\alpha^{r+1}}{\alpha^r - 1}} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{k_{r+1}} X_j(\omega)}_{< \mu + \frac{\varepsilon}{2}}}_{< \frac{\alpha^{r+1}}{\alpha^r - 1} \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \mu + \varepsilon}$$

Somit: $\mu - \varepsilon < \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) < \mu + \varepsilon$

Daher ist $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) = \mu.$

$\square$

Korollar

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei X eine integrierbare Zufallsvariable. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\tilde{X}_n((w_1, w_2, \ldots)) := X(w_n)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j = E(X) \quad \tilde{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis:

$(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig, integrierbar und haben gleiche Verteilung und haben gl. Verteilung wie X.

starkes Gesetz d. gr. Zahlen $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j = \tilde{E}(\tilde{X}_1) \quad \tilde{P}\text{-fast sicher.}$$

$\tilde{X}_1$ hat selbe Verteilung wie X $\Rightarrow$ $\tilde{E}(\tilde{X}_1) = E(X)$.

$\square$

Korollar Zusammenhang zw. naiver u. axiom. Def

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $A \in \mathcal{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\tilde{X}_n((w_1, w_2, \ldots)) := \begin{cases} 1, & \text{falls } w_n \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j}_{\text{Anzahl, wie oft A bei den ersten n Versuchen eintritt}} = P(A) \quad \tilde{P}\text{-fast sicher.}$$

$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$ — Anzahl, wie oft A bei den ersten n Versuchen eintritt

Beweis:

Setze

$$X(w) := \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\tilde{X}_n((w_1, w_2, \ldots)) = X(w_n)$. Da $|X| \leq 1$ ist X integrierbar.

Korollar $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j = E(X)$ $\tilde{P}$-fast sicher.

$E(X) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\Omega \setminus A) = P(A)$.

$\square$

Beispiel

n Personen. Wie groß ist Wahrschinlichkeit, dass mindestens 2 am gleichen Tag Geburhtag haben?

Wir nehuen an, dass niemand am 29. Februar Geburhtag hat.

$$P = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

n	23	32	41	57	70	80	89	97
P	0,507297	0,753348	0,903152	$>0{,}99$	$>0{,}999$	$>1-10^{4}$	$>1-10^{-5}$	$>1-$

13.) Zentraler Grenzwertsatz

SATZ

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von unabhängig, quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen (auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), die gleiche Verteilung haben. Setze $\mu := E(X_1)$ und $\sigma := \sigma(X_1)$.
Falls $\sigma > 0$ ist, dann gilt für $-\infty \le a \le b \le +\infty$, dass

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mu + a\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} X_j \le \mu + b\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Verstärkung vom Gesetz d. gr. Zahlen
→ konvergiert gegen NV

Binomialverteilung durch Normalverteilung approximieren

Korollar

Sei $p \in (0,1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n $B(n,p)$ (binomialverteilt). Dann gilt für $-\infty \le a \le b \le +\infty$, dass

$$\lim_{n\to\infty} P(np + a\sqrt{n\cdot p\cdot q} \le X_n \le n\cdot p + b\sqrt{n\cdot p\cdot q}) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Beweis:

$A \in \mathcal{A}$, $P(A) = p$, $X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega \in A, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, $(\tilde{X}_n)$

$$X_n := \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j \text{ ist } B(n,p)$$

$(\tilde{X}_n)$ unabh., quadr. integrierbar, gl. Verteilung und gl. Verteilung wie X.

$$\sigma(\tilde{X}_n) = \sigma(X) = \sqrt{\underbrace{E(X^2)}_{=p} - \underbrace{E(X)^2}_{=p^2}} = \sqrt{p \cdot q} > 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\underbrace{p + a \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \cdot X_n \leq p + b \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}}}) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \{ n \cdot p + a \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q} \leq X_n \leq n \cdot p + b \sqrt{n \cdot p \cdot q} \}$$

$\square$

FAUSTREGEL (brauchen wir aber nicht!)

$n \cdot p \cdot q \geq 9$ (oft in der Schule)

IV. STATISTIK

Zufallsvariable X, $E(X) = \mu$?

klassisch: μ ist fest, aber unbekannt
Bayes Statistik: Wahrscheinlichkeitsverteilung für μ vorgegeben

1.) Beschreibende Statistik

z.B. Körpergröße, Anteil an WählerInnen, ...

mathematisches Modell: Zufallsvariable X (integrierbar)

(z.B.: X... Körpergröße, $X = \begin{cases} 1, & \text{falls WählerIn Partei wählt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$)

Modell des „Immer wieder Wiederholens"

$\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ Zufallsvariable bei n Versuchen

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ konkrete Werte

a_j Realisierungen von $\tilde{X}_j$ (a_j... Messwert)

Urliste: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (z.B. 1.80, 1.68, 1.75, 1.93)

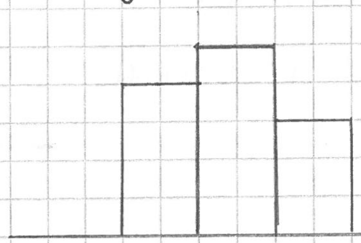
kleinsten u. größten Wert angeben
Quartile: z.B. Wert bei dem 10% höher/niedriger sind
(Quartile: 25%)

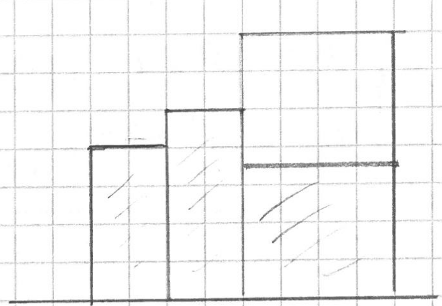
Klasseneinteilung: z.B.: 1.70 – 1.75

1.75 – 1.80

1.80 – 1.85

Balkendiagramm:

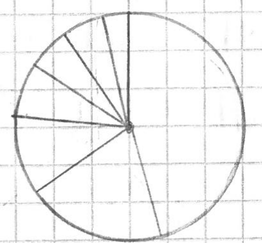




→ wenn Intervalllänge gleich, dann passt Fläche

„Fläche sollte passen"

Tortendiagramm



→ z.B. bei Prozentangaben

→ od Merkmalsgröße

Welche „Zahl" kann man unseren Daten zuordnen?

Wert x: soll möglichst wenig von den Daten $(a_1, \dots, a_n)$ abweichen

$\sum_{j=1}^{n} (x - a_j)$ ... nicht sinnvoll

besser $\sum_{j=1}^{n} |x - a_j|$ oder $\sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2$

↳ Median ↳ arith. Mittel

Proposition

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist für $a \in \mathbb{R}$ $\sum_{j=1}^{n} |a - a_j|$ genau dann minimal, wenn
$$\begin{cases} a = a_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ a_{\frac{n}{2}} \leq a \leq a_{\frac{n}{2}+1}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

↳ Extremwertaufgabe, aber ACHTUNG: Betragsfkt. ist nicht diff.bar

Beweis:

Behauptung: $c \leq d$, dann gilt:
$$|x-c| + |x-d| \geq |d-c| = d-c$$
und $|x-c| + |x-d| = |d-c| \Leftrightarrow c \leq x \leq d$

Beweis d. Beh:
$$\underbrace{|d-c|}_{= d-x+x-c} \leq |d-x| + |x-c| = |x-d| + |x-c|$$

$$c \leq x \leq d \Rightarrow \underbrace{|x-c|}_{= x-c} + \underbrace{|x-d|}_{= d-x} = d-c$$

Sei x so, dass $|x-c| + |x-d| = d-c$

IND: angenommen $x \notin [c,d]$

$\Rightarrow x < c$ oder $x > d$. o.B.d.A.: $x < c$

$$|x-d| = d - \underbrace{x}_{<c} > d-c \Rightarrow \underbrace{|x-c|}_{\geq 0} + \underbrace{|x-d|}_{> d-c} > d-c \quad \text{WID.} \lightning$$

Also $c \leq x \leq d$.

$\diamond$

$$\sum_{j=1}^{n} |x-a_j| = (\underbrace{|x-a_1|+|x-a_n|}_{\geq |a_n - a_1|}) + (\underbrace{|x-a_2|+|x-a_{n-1}|}_{\geq |a_{n-1}-a_2|}) + \ldots \quad \text{(endl.)}$$

und $=$ genau dann, wenn $\quad = \Leftrightarrow a_2 \leq x \leq a_{n-1}$

$a_1 \leq x \leq a_n$

→ noch zu unterscheiden: n ist gerade ✓
n ist ungerade ⇒ überlegen!

□

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$a := \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \dfrac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

der <u>Median</u> von $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Median ist „stabiler gegenüber Ausreißer"

Beispiele:

- $1, 2, 4, 6$ Median: $\frac{2+4}{2} = \underline{\underline{3}}$
- $1, 2, \underline{4}, 6, 8$ Median: 4 (Mittelwert: $4,2$)
- $1, 2, \underline{4}, 6, 1000$ Median: 4 (Mittelwert: $202,6$)

Proposition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sum_{j=1}^{n} (a-a_j)^2$ genau dann minimal, wenn

$$a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

<u>Beweis:</u> Proseminar. □

Extremwertaufgabe, d.h. ableiten

Definition

$\boxed{\text{Sei } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{R}^s). \text{ Dann heißt } m := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ der Mittelwert (arithmetisches Mittel) von } a_1, a_2, \dots, a_n.}$

Zufallsvariable, die den Mittelwert beschreibt:

$$M = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j$$

M ... Zufallsvariable

m ... konkreter Mittelwert (Realisierung von M)

μ ... Erwartungswert d. Zufallsvariablen

M und m hängen von n ab $(M_{(n)}, m_{(n)})$

↳ um die Abhängigkeit zu verdeutlichen

Zufallsvariable von Mittelwert

Proposition

$\boxed{\tilde{E}(M) = \mu, \text{ falls } X \text{ integrierbar ist } (\mu := E(X))}$

Modell des immer wieder Wiederholens

Beweis:

$$\tilde{E}(\underbrace{M}_{= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\tilde{E}(\tilde{X}_j)}_{= E(X) = \mu} = \mu$$

$\square$

starkes Gesetz der großen Zahlen:

$$M_{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} \mu \quad \tilde{P}\text{- fast sicher}$$

↳ d.h. Mittelwert ist ein guter Schätzwert für μ (Erwartungswert)

Proposition:

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - m)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - n \cdot m^2$$

Beweis:

$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \Rightarrow \sum a_j = n m$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(a_j - m)^2}_{= a_j^2 - 2ma_j + m^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \underbrace{2m \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j}_{= n \cdot m}}_{= 2m^2 n} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m^2}_{= n \cdot m^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - n \cdot m^2 . \qquad \square$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\tilde{X}_j - M)^2 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j^2 - n \cdot M^2$$

ω dazudenken!

(aber es gilt für alle ω - also wieder weglassen)

Proposition

Sei X quadratisch integrierbar $(\mu := E(X), \ \sigma := \sigma(X))$

Dann gilt $\tilde{E}\left(\sum_{j=1}^{n} (\tilde{X}_j - M)^2 \right) = (n-1) \cdot \sigma^2$

Beweis:

$(V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2)$

$$\tilde{E}(\underbrace{M^2}_{= \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j\right)^2}) = \underbrace{\tilde{V}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j\right)}_{= \frac{1}{n^2} \tilde{V}\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j\right)} + \tilde{E}\underbrace{\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j\right)}_{= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{E}(\tilde{X}_j) = \mu}{}^2 =$$

$\tilde{E}(\tilde{X}_j) = E(X) = \mu$

da $(\tilde{X}_j)$ unabhängig: $\tilde{V}\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\tilde{V}(\tilde{X}_j)}_{= V(X) = \sigma^2}$

$$\circledequal \ \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2 + \mu^2$$

$$\tilde{E}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\tilde{X}_j - M)^2}_{= \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j^2 - n \cdot M^2}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\tilde{E}(\tilde{X}_j^2)}_{= \underbrace{\underbrace{\tilde{V}(\tilde{X}_j)}_{=\sigma^2} + \underbrace{E(\tilde{X}_j)}_{=\mu}{}^2}_{= \sigma^2 + \mu^2}} - n \cdot \underbrace{\tilde{E}(M^2)}_{= \frac{1}{n} \cdot \sigma^2 + \mu^2} \ \circledequal$$

$$\circledequal \ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\mu^2 + \sigma^2)}_{= n \cdot \mu^2 + n \cdot \sigma^2} - \underbrace{n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sigma^2 + \mu^2\right)}_{\sigma^2 + n \cdot \mu^2} = (n-1) \cdot \sigma^2$$

$\square$

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (a_j - m)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - n \cdot m^2\right)}$$

<u>Standardabweichung</u> (empirische Standardabweichung) von $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (\tilde{X}_j - M)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j^2 - n \cdot M^2\right)}$$

S ... Zufallsvariable

s ... Messwert (Realisierung von S)

σ ... Streuung

Nach Proposition $\tilde{E}(S^2) = \sigma^2$

(Achtung: im Allgemeinen ist $\tilde{E}(S) \neq \sigma$).

2.) Konfidenzintervalle für normalverteilte Zufallsvariable mit bekanntem σ

Beispiel

Eine Maschine erzeugt Nägel. Die Länge der Nägel ist normalverteilt ($N(\mu,\sigma)$ - verteilt). Von einigen gerade erzeugten Nägel wurde die Länge gemessen. Dabei ergab sich (in cm):

4.11, 4.03, 4.27, 3.96, 4.42, 3.78, 4.18, 4.08, 3.85, 3.70, 3.95, 4.21.

Wie groß ist die durchschnittliche Länge der Nägel (μ)?

So gibt es keine Antwort dafür!

Ang.: $\sigma = 2mm$ $(= 0{,}2cm)$

Wie sieht das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0,95 für die durchschnittliche Länge der Nägel aus?

Zufallsvariable X . $N(\mu,\sigma)$ - verteilt.

$E(X) = \mu$?

$M_{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} \mu$ $\tilde{P}$ - fast sicher (starkes Gesetz der großen Zahlen)

Daher ist $\vec{m}$ (Mittelwert) ein guter Schätzwert für μ.

Wir wählen $\gamma \in (0,1)$, setzen $\alpha := 1 - \gamma$

γ ... Sicherheit, α ... Irrtumswahrscheinlichkeit

typische Werte für γ: 0,95; 0,99 — 1 nicht sinnvoll, da sonst Intervall $(-\infty, \infty)$

Müssen Verteilung von M bestimmen

$$M = \frac{1}{n}\cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\tilde{X}_j}_{N(\mu,\sigma)}}_{N(n\cdot\mu,\ \sqrt{n}\cdot\sigma)} \quad \dots \quad N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Faltung → (Summe von NV)

$:n$

auf $N(0,1)$ bringen

$$\Rightarrow \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{M-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \quad \text{ist } N(0,1)\text{-verteilt}$$

Proposition

$$\boxed{\frac{M-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \quad \text{ist } N(0,1)\text{- verteilt}}$$

Klassische Statistik: μ fest, aber unbekannt
(Bayes-Statistik: vorgegebene Verteilung für μ)

Jedem μ wird ein Schätzbereich I_μ, I_μ^*, sodass
Intervall (Menge) → rechnen mit

$$\tilde{P}(M \in I_\mu) = \gamma$$

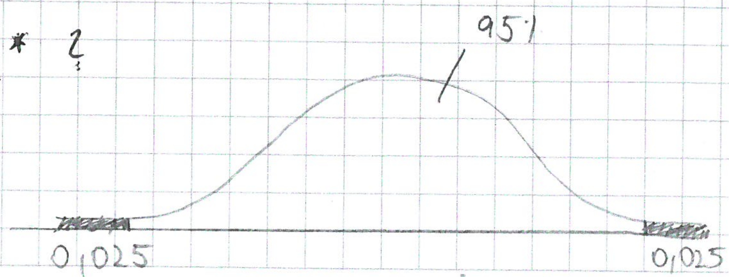
$$\tilde{P}\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \in I_\mu^*\right) = \gamma.$$

Definition

Das Konfidenzintervall K mit Sicherheit γ (mit Irrtumswahrscheinlichkeit α) ist $K := \{\mu : m \in I_\mu\}$.

$$K := \left\{\mu : \frac{m-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \in I_\mu^*\right\}$$

Wie wählen wir I_μ^*?



^ abschneiden (auf beiden Seiten das gleiche, nicht verschieden ist unpraktisch)

Setzen $I_\mu^* := [-x, x]$, wobei x so ist, dass

$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \gamma = 1-\alpha \text{, d.h.}$$

auf beiden Seiten das gleiche weg

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

hier weiterrechnen (Ungleichung)

$$\frac{\overset{M}{m}-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \in I_\mu^* = [-x, x] \Leftrightarrow -x \leq \underbrace{\frac{\overset{M}{m}-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \leq x}_{*}$$

$$* \Leftrightarrow \overset{M}{m} - \mu \leq x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \overset{M}{m} - x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu$$

analog: $\mu \leq \overset{M}{m} + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

also: $\overset{M}{m} - x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overset{M}{m} + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Proposition

> Das Konfidenzintervall mit Sicherheit γ ist
> $K = [m - x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, wobei x so ist, dass
> $$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Antworten: (bei Prüfung (mündlich alle 3), (schriftl. 1. A))!

1.) Mit Sicherheit γ liegt μ in K. (muss bei Prüfung stehen)

2.) $P(\mu \in K) = \gamma$

fest (μ), vom Zufall abhängig (K)

(formaler: $\tilde{P}(\mu \in [M - x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, M + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]) = \gamma$

3.) ($\tilde{P}$ hängt eigentlich von μ ab):

Jedem $\mu \mapsto I_\mu$, sodass $\overset{(\sim)}{P}_{(\mu)}(M \in I_\mu) = \gamma$,

$K = \{\mu : m \in I_\mu\}$.

gewonnener Mittelwert

betrachtet nur μ, wo $m \in I_\mu$

Beispiel:

Nägelbeispiel

$\gamma = 0{,}95$
$\alpha = 0{,}05$

$\sigma = 0{,}2\,cm$

$n = 12$ (Messwerte)

$$m = \frac{4{,}11 + \ldots + 4{,}21}{12} = 4{,}045$$

x so, dass $$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0{,}975 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2}$$

$\Rightarrow x = 1{,}96$

$\Rightarrow K = [\,3{,}9318 \,;\, 4{,}1582\,]$

1. Mit Sicherheit 0,95 liegt die durchschnittliche Länge der Nägel zwischen 3,93 und 4,16.
(Antwort muss bei Prüfung stehen!!)
nach außen runden (möglichst großen Bereich)

2. $P(\mu \in K) = 0{,}95$
fest — vom Zufall abhängig

3.) (schriftlich ✗, mündlich schon !!!!)
$\mu \mapsto I_\mu$, sodass $P(M \in I_\mu) = 0{,}95$,
$K = \{\mu : m \in I_\mu\}$.

γ ... Sicherheit, Signifikanz
α ... Irrtumswahrscheinlichkeit $(\gamma = 1-\alpha,\ \alpha = 1-\gamma)$

zweiseitig: $1 - \frac{\alpha}{2} = \int_{-\infty}^{x} \ldots$

einseitig: $\int_{-\infty}^{x} \ldots = 1 - \alpha \ (= \gamma)$

3.) (Einseitige) Tests für normalverteilte Zufallsvariable mit bekanntem σ

Beispiel:

(Nägelbeispiel):

Der Hersteller behauptet die durchschnittliche Länge der Nägel ist mindestens 4.1 cm. Wir versuchen mit Sicherheit 0,95 das Gegenteil zu beweisen.

Wollen mit Sicherheit 0,95 beweisen, dass $\mu \underset{(\leq)}{<} \underbrace{4.1}_{\mu_0}$

hier dann genau umdrehen

Nullhypothese (wollen wir widerlegen): H_0 : $\mu \geq \mu_0$

Alternative (wollen wir beweisen): H_1 : $\mu < \mu_0$

von oben

Alternative

$\mu \leq \mu_0$

$\mu > \mu_0$

$\frac{M-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ ist $N(0,1)$-normalverteilt

Nullhypothese richtig

Falls $\mu \geq \mu_0$ ist, dann gilt: $\frac{M-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \underset{\geq}{\leq} \frac{M-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$

$\mu \leq \mu_0$

vgl. $-x \leq \frac{M-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq x$

hellblau

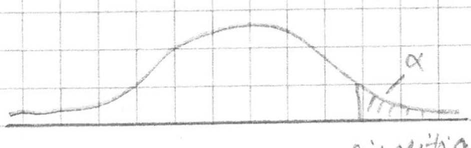
$$\Rightarrow \left\{\frac{M-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \underset{\leq\ x}{\geq -x}\right\} \subseteq \left\{\frac{M-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \underset{\leq\ x}{\geq -x}\right\}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{M-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \underset{\leq\ x}{\geq -x}\right) \leq P\left(\frac{M-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \underset{\leq\ x}{\geq -x}\right)$$

$$P\left(\frac{M-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \geq -x\right) \geq P\left(\frac{M-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \geq -x\right) = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$= 1 - \alpha = \gamma$, sofern x so gewählt ist, dass $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1-\alpha$.



einseitig, da nur auf einer Seite abgeschnitten

$$\Rightarrow \underbrace{P\left(\frac{M-\mu_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \leq -x\right)}_{} \leq \alpha$$

$$1 - P\left(\frac{M-\mu_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \geq -x\right)$$

$$P\left(\frac{M-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq x\right) \geq P\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{M-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq x\right) \leq \alpha$$

$$\frac{M-\mu_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \underset{\geq\ x}{\leq -x} \Leftrightarrow M-\mu_0 \underset{\geq +x}{\leq -x}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow M \underset{\geq}{\leq} \mu_0 \underset{+}{-} x\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Der kritische Bereich für den Test ($H_1 : \mu < \mu_0$ / $H_1 : \mu > \mu_0$) mit Sicherheit γ ist

$K := \{ t \in \mathbb{R} : t \leq \mu_0 - x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \}$, wobei x so ist,*

$K := \{ t \quad : t \geq \mu_0 + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \}$

* dass $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1-\alpha$.

Test durchführen: Erhalten m.

Antwort

1.) $m \in K$: Mit Sicherheit γ wurde H_1 bewiesen.

schlecht → (Mit Sicherheit γ wurde H_0 widerlegt).

2.) $m \notin K$: Mit Sicherheit γ sprechen die Daten nicht gegen H_0.

(Mit Sicherheit γ wurde H_1 nicht bewiesen)
H_0 nicht widerlegt

(Achtung: FALSCH!!
Mit Sicherheit γ wurde H_0 bewiesen
H_1 widerlegt)

Beispiel (Nägelbsp)

$H_0: \mu \geq 4,1$

$H_1: \mu < 4,1 \; (= \mu_0) \quad , \sigma = 0,2 \quad , n = 12$

Sicherheit 0,95:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 0,95$$

nur einseitiger Test: $1-\alpha$!!!

$$\Rightarrow x \simeq 1,645$$

Intervall hinpegen mögl. groß $\Rightarrow$ abrunden (soll möglichst klein sein $\rightarrow$ schwer sein zu beweisen)

$$K = \{ t : t \leq \mu_0 - x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \} = \{ t : t \leq 3,950034 \} = \{ t : t \leq 3,95 \} \text{ kritischer Bereich}$$

$m = 4,045$ (arith. Mittel)

$m \notin K \Rightarrow$ Mit Sicherheit 0,95 sprechen die Daten nicht dagegen, dass $\mu \geq 4,1$ (die durchschnittliche Länge der Nägel mindestens 4,1 cm ist).

Normalerweise wird in so einem Fall H_0 beibehalten.

Test durchgeführt.

Welches ist die größt mögliche Sicherheit mit der H_1 bewiesen wurde?

$H_1: \mu < \mu_0 \qquad K = \{ t : t \leq \mu_0 - x \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \}$

$H_1: \mu > \mu_0 \qquad K = \{ t : t \geq \mu_0 + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \}$

$$m = \mu_0 - x \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow x = \frac{\mu_0 - m}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

$$m = \mu_0 + x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow x = \frac{m - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Mit Sicherheit $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ wurde H_1 bewiesen.

Beispiel (Nägelbsp)

$H_1 : \mu < 4,1$

$$x = \frac{4,1 - 4,045}{0,2} \cdot \sqrt{12} \approx 0,95263$$

Tabelle

⇒ Mit Sicherheit 0,82894 wurde bewiesen, dass $\mu < 4,1$ ist.

↑ nur andere Sicherheit

	H_1 richtig	H_1 falsch
H_1 bewiesen	✓	„$P \leq \alpha$" (Fehler 1. Art)
H_1 nicht bewiesen	„P = keine Ahnung" (*) (Fehler 2. Art)	✓

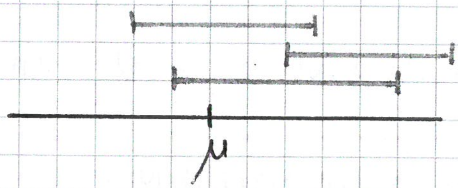
(*) „versuchen P klein zu machen, indem man n groß macht"

Konfidenzintervall K:

	$\mu \in K$	$\mu \notin K$
	✓	„$P \leq \alpha$"

2. Antwort: $P(\mu \in K) = \gamma$

fest ↗ μ; ↑ K vom Zufall abhängig



4.) Statistische Verfahren für normalverteilte Zufallsvariable (mit unbekanntem σ)

Versuchen s_1 (S) statt σ zu verwenden

($\frac{M-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ ist $N(0,1)$ – verteilt)

Verteilung von $\frac{M-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}$

$$\approx \Big(\underbrace{\frac{\tilde{X}_j-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)}\Big)^2$$

chi

χ^2-vert.

[redacted]

$$\frac{S^2}{\sigma^2}\cdot(n-1) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(\tilde{X}_j-M)^2}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\tilde{X}_j-M}{\sigma}\right)^2$$

X, Y unabhängig, X χ^2-verteilt r Freiheitsgraden,
Y χ^2-verteilt mit s Freiheitsgraden
$\Rightarrow$ $X+Y$ χ^2-verteilt mit $r+s$ Freiheitsgraden (Faltung)

$\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$ .... „χ^2 – verteilt mit n Freiheitsgraden"

M vorgegeben. frei wählbar: $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{n-1}$
$\Rightarrow$ letzter muss man so wählen dass genau der Mittelwert M herauskommt

$\Rightarrow \frac{S^2}{\sigma^2}\cdot(n-1)$ ist χ^2-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

$$\frac{\frac{M-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}}{\frac{S}{\sigma}} \quad \dots\dots \quad \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}$$

... t – verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden (W. Gosset)

hängt nicht von σ ab, aber von μ

Satz

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Es ist } \frac{M-\mu}{S}\cdot\sqrt{n} \quad t\text{-verteilt mit } (n-1)\text{-Freiheitsgraden} \\ \text{und } \frac{S^2}{\sigma^2}\cdot(n-1) \quad \chi^2\text{-verteilt mit } (n-1) \text{ Freiheitsgraden.} \end{array}}$$

hängt nicht von μ ab

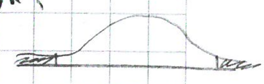
Konfidenzintervalle mit σ (unbekannt) wie Prüfungsstoff

große Buchstaben sind Zufallsvariablen !!
kleine – " – sind Zahlen

8.6.

Konfidenzintervalle für μ: $\frac{M-\mu}{S}\cdot\sqrt{n}$ ist t-verteilt mit $(n-1)$ Freiheitsgraden

Wählen x so, dass $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1-\frac{\alpha}{2}$, wobei f die Dichte der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist.



$$\tilde{P}\left(-x \le \frac{M-\mu}{S}\cdot\sqrt{n} \le x\right) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 1-\alpha = \gamma$$

$(I_\mu^* = [-x, x])$

$$-x \le \frac{\overset{M}{m}-\mu}{\underset{s}{S}}\cdot\sqrt{n} \le x \Leftrightarrow \overset{M}{m} - x\,\frac{\overset{S}{s}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overset{M}{m} + x\cdot\frac{\overset{S}{s}}{\sqrt{n}}$$

Konfidenzintervall: $K = \left[m - x\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ m + x\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Beispiel (Nägel)

$n = 12$, $m = 4{,}045$, $\gamma = 0{,}95$

$$s = \sqrt{\frac{1}{11}\cdot\left(4{,}11^2 + 4{,}03^2 + \ldots + 4{,}21^2 - 12\cdot 4{,}045^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{100}\cdot\sqrt{\frac{4859}{11}} \approx 0{,}2102$$

x so, dass $\int_{-\infty}^{x} \underbrace{f}_{\substack{\text{t-verteilt 11 Freiheitsgrade}\\ (n-1)}} = \overset{1-\frac{\alpha}{2}}{0{,}975}$

$\Rightarrow x \approx 2{,}20$ (aus Tabelle)

$K = [3{,}91152;\ 4{,}17848]$ (nach außen runden)

Antwort:

1.) Mit Sicherheit 0,95 liegt μ (die durchschnittliche Länge der Nägel) zwischen 3,91 cm und 4,18 cm.

2.) $P(\mu \in K) = 0{,}95$

μ fest, K vom Zufall abhängig

3) $\mu \mapsto I_\mu$, sodass $P(M \in I_\mu) = 0{,}95$, $K = \{\mu : m \in I_\mu\}$

Einseitige Tests für μ:

(*) Herleitung genau gleich wie bei Test mit σ
$\Rightarrow$ nur (-1) herausgehoben, daher bei dunkelblau $\geq x$

$H_0: \mu \geq \mu_0$ $\qquad \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$ $\qquad \mu > \mu_0$

$\frac{M-\mu}{S} \cdot \sqrt{n}$ ist t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

Falls $\mu \geq \mu_0$ ($\mu \leq \mu_0$): $\frac{M-\mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} \geq (\leq) \frac{M-\mu}{S} \cdot \sqrt{n}$

$\Rightarrow \frac{\mu_0 - M}{S} \cdot \sqrt{n} \leq \frac{\mu - M}{S} \cdot \sqrt{n}$

$\tilde{P}\left(\frac{\mu_0 - M}{S} \cdot \sqrt{n} \geq x\right) \leq \tilde{P}\left(\frac{\mu - M}{S} \cdot \sqrt{n} \geq x\right) = \int_x^\infty f = \alpha$ (*)

$\frac{M-\mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} \geq x$ $\qquad \frac{M-\mu}{S} \cdot \sqrt{n} \geq x$

Wähle x so, dass $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 1 - \alpha = \gamma$, wobei f die Dichte der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist.

Bestimme $y := \frac{\mu_0 - m}{S} \cdot \sqrt{n}$ $\qquad y := \frac{m-\mu_0}{S} \cdot \sqrt{n}$

Für $y \leq x$: Die Daten sprechen mit Sicherheit γ nicht gegen H_0.

Für $y > x$: Mit Sicherheit γ wurde H_1 bewiesen.

Beispiel: (Nägel)

$n = 12, \quad m = 4{,}045, \quad s \approx 0{,}2102$

$H_0: \quad \mu \geq 4{,}1$

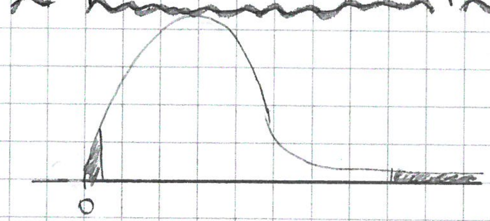
$H_1: \quad \mu < 4{,}1$

$y \approx 0{,}9065$

x so, dass $\int_{-\infty}^{x} \underbrace{f}_{\substack{t\text{-Verteilung} \\ 11 \text{ Freiheitsgrade}}} = \overbrace{0{,}95}^{\text{einseitig}} \Rightarrow x \approx 1{,}80$

$y < x \Rightarrow$ Mit Sicherheit 0,95 sprechen die Daten nicht dagegen, dass die durchschnittliche Länge der Nägel mindestens 4,1 cm ist

Konfidenzintervalle für σ: $\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$ ist χ^2-verteilt mit $(n-1)$ Freiheitsgraden (= Fg)



Wählen x_1, x_2 so, dass $\int_0^{x_1} f(t)\,dt = \frac{\alpha}{2}$, und $\int_0^{x_2} f(t)\,dt = 1 - \frac{\alpha}{2}$, wobei f die Dichte der χ^2-Verteilung mit $(n-1)$-Freiheitsgraden ist.

$$\tilde{P}\left(x_1 \leq \frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \leq x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = 1 - \alpha = \gamma$$

$$I_\sigma^* = [x_1, x_2]$$

$$x_1 \leq \frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \leq S^2 \cdot \frac{n-1}{x_1} \underset{\substack{x_1 \geq 0, \text{ da bei} \\ \text{Null Vert. beginnt}}}{\Leftrightarrow} \sigma \leq S \cdot \sqrt{\frac{n-1}{x_1}}$$

insgesamt: $s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{x_2}} \leq \sigma \leq s \sqrt{\frac{n-1}{x_1}}$

Konfidenzintervall: $K = \left[s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{x_2}}, s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{x_1}} \right]$

Beispiel (Nägel)

$n = 12$, $(m = 4{,}045)$, $s \approx 0{,}2102$

x_1, x_2 so, dass $\int_0^{x_1} f = 0{,}025$ und $\int_0^{x_2} f = 0{,}975$

χ^2-verteilt, 11 Fg.

Tabelle

$\Rightarrow$ $x_1 \approx 3{,}8157$

$x_2 \approx 21{,}920$

$K = [0{,}1488 ; 0{,}3569]$

Antworten:

1.) Mit Sicherheit 0,95 liegt σ zwischen 0,14 und 0,36.

2.) $P(\sigma \in K) = 0{,}95$

σ: fest, K: vom Zufall abhängig

3.) $\sigma \mapsto I_\sigma$, sodass $\tilde{P}(S \in I_\sigma) = 0{,}95$,

$K = \{ \sigma : s \in I_\sigma \}$

5.) Statistische Verfahren für Wahrscheinlichkeiten

Anstatt Wahrscheinlichkeiten könnte man auch Prozentsätze sagen.
für Praxis wichtig

Beispiel:

Es wurde ein neues Medikament entwickelt. Damit wurden 727 Personen behandelt. Dabei zeigte es bei 591 Personen heilende Wirkung.
Bestimme Konfidenzintervall mit Sicherheit 0,99 für den Wirkungsgrad dieses Medikamentes (bei viel % heilende Wirkung; WH, dass es heilende Wirkung zeigt)

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $A \in \mathfrak{A}$ ← σ-Algebra

erkrankte Personen

Gesucht $P(A) =: p$ ≙ 2. Korollar nach st. G. d. g. Z.

$$X(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E(X) = p, \quad \sigma(X) = \sqrt{p\,q} = \sqrt{p-p^2}$$

→ normalerweise hängt σ nicht von E ab, hier schon → UNTERSCHIED

$$M = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j \Rightarrow nM = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j \text{ ist } B(n,p)$$

ungefähr $N(np, \underbrace{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}_{\sqrt{n \cdot (p-p^2)}})$ - verteilt

M ungefähr $N\left(p, \sqrt{\frac{p-p^2}{n}}\right)$

$$\frac{M-p}{\sqrt{\frac{p-p^2}{n}}} = \frac{M-p}{\sqrt{p-p^2}} \sqrt{n} \text{ ungefähr } N(0,1)\text{-verteilt}$$

Satz

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_{(n)}-p}{\sqrt{p-p^2}}\cdot\sqrt{n} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt ,}$$

Wir nehmen an, dass n so groß ist, dass wir für $\frac{M-p}{\sqrt{p-p^2}}\cdot\sqrt{n}$ die $N(0,1)$ - Verteilung nehmen können.

Konfidenzintervalle:

Wir wählen x so, dass $\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1-\frac{\alpha}{2}$

$I^*_p = [-x, x]$.

quadriert, da ≥ 0

$$-x \leq \frac{\frac{M}{m}-p}{\sqrt{p-p^2}}\cdot\sqrt{n} \leq x \iff \left|\frac{\frac{M}{m}-p}{\sqrt{p-p^2}}\cdot\sqrt{n}\right| \leq x$$

$$\iff \frac{(M-p)^2}{p-p^2}\cdot n \leq x^2 \iff \frac{M^2-2Mp+p^2}{p-p^2} \leq \frac{x^2}{n}$$

$$\iff M^2-2Mp+p^2 \leq \frac{x^2}{n}\cdot p - \frac{x^2}{n}\cdot p^2$$

$$\iff \underbrace{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\cdot p^2 - \left(2M+\frac{x^2}{n}\right)\cdot p + M^2}_{=\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\left[(p-p_1)\cdot(p-p_2)\right]} \leq 0 \qquad p_1 < p_2$$

$$\iff p_1 \leq p \leq p_2$$

Konfidentintervalle:

$$K = \left[\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}\left(m+\frac{x^2}{2n}-\sqrt{\frac{x^2}{n}\cdot m(1-m)+\left(\frac{x^2}{2n}\right)^2}\right),\right.$$

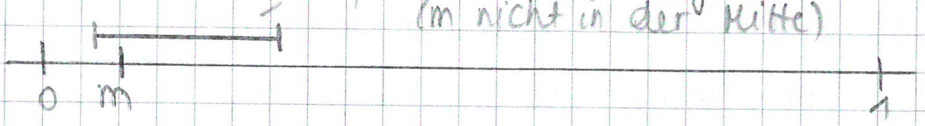
nicht merken

$$\left.\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}\left(m+\frac{x^2}{2n}+\sqrt{\frac{x^2}{n}\cdot m(1-m)+\left(\frac{x^2}{2n}\right)^2}\right)\right].$$

Zum Rechnen: $\frac{m-p}{\sqrt{p-p^2}} \cdot \sqrt{n} \leq x$ zwei Lösungen ergeben dann die Grenzen für unser Intervall

m... relative Häufigkeit

Konfidenzintervall asymmetrisch (m nicht in der Mitte)



Beispiel (Medikamente)

$n = 727$ relative Häufigkeit

$m = \frac{591}{727} \approx 0{,}8129$

x so, dass $\int\limits_{-\infty}^{x} \underbrace{f}_{N(0,1)} = \overset{1-\frac{\alpha}{2}}{0{,}995} \Rightarrow x \approx 2{,}575$

$\frac{0{,}8129 - p}{\sqrt{p-p^2}} \cdot \sqrt{727} = 2{,}575 \Rightarrow$ Quadrieren, Umformen, quadr. Gleichung lösen

$\Rightarrow$ Lösungen: $0{,}77292$; $0{,}84729$

$\Rightarrow K = [0{,}77292;\ 0{,}84729]$

Antworten:

1.) Mit Sicherheit 0,99 liegt der Wirkungsgrad des Medikaments zwischen 0,7729 und 0,8473.

2.) $P(p \in K) = 0{,}99$
fest zum Zufall abhängig

3.) $p \mapsto I_p$, sodass $P(M \in I_p) = 0{,}99$, $K := \{p : m \in I_p\}$

Einseitige Tests

Beispiel (Medikamente)

Wir möchten mit Sicherheit 0,99 beweisen, dass der Wirkungsgrad mindestens 75% ist.

$H_0: p \leq p_0$ $\qquad$ $H_0: p \geq p_0$

$H_1: p > p_0$ $\qquad$ $H_1: p < p_0$

Lemma

Für $a \in [0,1]$ ist $x \mapsto \frac{a-x}{\sqrt{x-x^2}} \cdot \sqrt{n}$ monoton fallend auf $[0,1]$.

Beweis:

$\sqrt{n}$ kann man weglassen, nur Faktor

$$f(x) := \frac{a-x}{\underbrace{\sqrt{x-x^2}}},$$

$$= (a-x) \cdot (x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Produktregel

$$f'(x) = - \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x-x^2}}} + (a-x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x-x^2)^{-\frac{3}{2}} (1-2x) =$$

mit $\frac{x-x^2}{x-x^2}$ erweitert $= \frac{x-x^2}{(x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ * um gleichen Nenner zu erhalten

$$= \frac{1}{(x-x^2)^{3/2}} \left(-x + x^2 - \frac{1}{2} \underbrace{(a-x)(1-2x)}_{2x^2-2ax-x+a}\right) =$$

$$= \frac{1}{(x-x^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-x + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + ax + \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(x-x^2)^{\frac{3}{2}}}_{>0}} \left(\underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot x - \frac{a}{2}}_{\text{soll } \leq 0 \text{ werden}}\right)$$

→ nicht für 0 u. 1 !
⇒ offenes Intervall

1. Fall:

$a \le \frac{1}{2} \Rightarrow a - \frac{1}{2} \le 0 \overset{\cdot x}{\Rightarrow} (a - \frac{1}{2}) \cdot x \le 0$

$\overset{-\frac{a}{2}}{\Rightarrow} (a - \frac{1}{2}) \cdot x - \frac{a}{2} \le 0$

$\Rightarrow f'(x) \le 0 \quad \forall x \in (0,1)$

2. Fall:

$a \ge \frac{1}{2} \Rightarrow a \le 1 \overset{:2}{\Rightarrow} \frac{a}{2} \le \frac{1}{2} \overset{+\frac{a}{2}}{\Rightarrow} a \le \frac{a}{2} + \frac{1}{2}$

$\overset{-\frac{1}{2}}{\Rightarrow} a - \frac{1}{2} \le \frac{a}{2} \overset{\cdot x}{\Rightarrow} (a - \frac{1}{2}) \cdot x \le \frac{a}{2} \cdot \underbrace{x}_{\le 1} \le \frac{a}{2}$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2}) x - \frac{a}{2} \le 0$

$\Rightarrow f'(x) \le 0 \quad \forall x \in (0,1)$

Daher ist f monoton fallend $[0,1]$. $\square$

Randwerte egal

einseitiger Test

Wir wählen x so, dass $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha = \gamma$.

alle $p \le p_0$:

$\tilde{P}\Big(\underbrace{\frac{(M - p_0)}{\sqrt{p_0 - p_0^2}} \cdot \sqrt{n}}_{} \underset{\le -x}{\ge x}\Big) \le \tilde{P}\Big(\frac{M - p}{\sqrt{p - p^2}} \cdot \sqrt{n} \underset{\le -x}{\ge x}\Big) \approx \int_{x}^{\infty} \underset{N(0,1)}{f} = \alpha$

$\underset{\text{Lemma}}{\overset{\le}{\ge}} \frac{M-p}{\sqrt{p-p^2}} \cdot \sqrt{n}$

$\frac{M - p_0}{\sqrt{p_0 - p_0^2}} \cdot \sqrt{n} \underset{\le -x}{\ge x} \Leftrightarrow \overset{M}{m} \underset{\le}{\ge} p_0 \underset{-}{+} x \cdot \frac{\sqrt{p_0 - p_0^2}}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow \overset{nM}{nm} \underset{\le}{\ge} n \cdot p_0 \underset{-}{+} x \cdot \sqrt{n(p_0 - p_0^2)}$

nm .. absolute Häufigkeit

merken

kritischer Bereich: $K = \{ t : t \geq np_0 + x \cdot \sqrt{n(p_0 - p_0^2)} \}$

$K = \{ t : t \leq np_0 - x \cdot \sqrt{n(p_0 - p_0^2)} \}$

1.) $nm \in K \Rightarrow$ Mit Sicherheit γ wurde H_1 bewiesen.

2.) $nm \notin K \Rightarrow$ Mit Sicherheit γ sprechen die Daten nicht gegen H_0.

Beispiel (Medikamente)

$n = 727$

$H_0 : p \leq 0{,}75$

$H_1 : p > 0{,}75$

x so, dass $\int_{-\infty}^{x} \overset{N(0,1)}{f} = 0{,}99 \Rightarrow x \approx 2{,}325$

da wir H_1 beweisen wollen

$K = \{ t : t \geq \underbrace{727 \cdot 0{,}75 + 2{,}325 \cdot \sqrt{727 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}_{572{,}3951} \} =$

$= \{ 573, 574, \ldots, 727 \}$

$591 \in K \Rightarrow$ Mit Sicherheit 0,99 wurde bewiesen, dass der Wirkungsgrad mindestens 75% beträgt.

6.) Der Chi-Quadrat Anpassungstest

Beispiel:

Eine Maschine erzeugt Nägel. Es soll mit Sicherheit 0,94 getestet werden, ob die Länge der Nägel $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 4\,cm$ und $\sigma = 2\,mm$ $(= 0{,}2\,cm)$ ist.

Dann haben wir die Länge von einigen Nägeln gemessen. Es ergab sich.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
	$\leq 3{,}7$	$3{,}7 - 3{,}8$	$3{,}8 - 3{,}9$	$3{,}9 - 4{,}0$	$4{,}0 - 4{,}1$	$4{,}1 - 4{,}2$	$4{,}2 - 4{,}3$	$\geq 4{,}3$	
f_j	9	5	11	19	26	26	15	6	$n = 117$
$n \cdot p_j$	7,8164	10,746	17,536	22,401	22,401	17,536	10,746	7,8164	
p_j	0,066807	0,09185	0,14988	0,19146	0,19146	0,14988	0,09185	0,066807	

$n = 117$

Werte hier gespiegelt

Art Nullh.

H_0': X ist $N(4; 0{,}2)$-verteilt,

H_1': X ist nicht $N(4; 0{,}2)$-verteilt.

Angenommen X wäre $N(4; 0{,}2)$-verteilt

$n = 117$, $r = 8$ $\qquad P(X \in A_j)$

A_6: $P(4{,}1 \leq X \leq 4{,}2) \ominus$

$4{,}1 = 4 + a \cdot 0{,}2 \rightarrow a = 0{,}5$

$4{,}2 = 4 + b \cdot 0{,}2 \rightarrow b = 1$

$$\ominus \int_{-\infty}^{1} f - \int_{-\infty}^{0{,}5} f = 0{,}84134 - 0{,}69146 =$$

$$= 0{,}14988 \rightarrow \text{zuerst } p_j!$$

Allgemeines Problem: $p_1, \dots, p_r \geq 0$, $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$

$H_0: P(A_j) = p_j \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}$

$H_1: \exists j$ mit $P(A_j) \neq p_j$

$$d^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(t_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$$, Zufallsvariable T_j

$$D^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$$

T_j ist $B(n, p_j)$, $\sim N(np_j, \sqrt{n \cdot p_j \cdot q_j})$

$$\frac{T_j - n \cdot p_j}{\sqrt{n \cdot p_j \cdot q_j}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j \cdot q_j}}_{} \sim$$ χ^2- verteilt mit 1Fg

$$\approx \frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$$

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$$ χ^2- vert. mit ~~r~~ Fg.

mit $(r-1)$ Fg

Di, 15.6

$$\sum_{j=1}^{r} \underbrace{\frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j \cdot q_j}}_{}$$ χ^2-verteilt mit r Fg

$$\underbrace{\frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j \cdot q_j} \cdot (p_j + q_j)}_{}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \frac{(T_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}}_{= D^2} + \sum_{j=1}^{r} p_j \frac{(T_j - np_j)^2}{n \cdot p_j \cdot q_j}$$

$$\Rightarrow D^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(T_j - n\cdot p_j)^2}{n\cdot p_j \cdot q_j} - \sum_{j=1}^{r} p_j \cdot \frac{(T_j - n\cdot p_j)^2}{n\cdot p_j \cdot q_j}$$

$D^{(2)}$ χ^2-verteilt mit $r-1$ Fg.

Satz

> Für $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
> $$\lim_{n\to\infty} P(D^2_{(n)} \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$
> wobei f die Dichte der χ^2-Verteilung mit $(r-1)$ Freiheitsgraden ist.

Proposition

$$\boxed{d^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{t_j^2}{n\cdot p_j} - n}$$

merken (braucht man zum Rechen)

Beweis:

$$d^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(t_j - n\cdot p_j)^2}{n\cdot p_j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{t_j^2}{n\cdot p_j} - 2\cdot \sum_{j=1}^{r} \frac{t_j \cdot n p_j}{n\cdot p_j} + \sum_{j=1}^{r} \frac{(n p_j)^2}{n p_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{t_j^2}{n\cdot p_j} - 2\cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{r} t_j}_{=n} + n\cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{r} p_j}_{=1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{t_j^2}{n\cdot p_j} - n.$$

$\square$

$$D^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^2}{n p_j} - n.$$

$$P(D^2 \le x) = \underbrace{\int_0^x f}_{\chi^2\text{-VT},\ r-1\text{Fg}} = \gamma = 1-\alpha$$

Wähle x so, dass $\int_0^x f(t)\,dt = 1-\alpha = \gamma$, wobei f die Dichte der χ^2-Verteilung mit $(r-1)$ Fg ist.

Falls $d^2 \le x$: Mit Sicherheit γ sprechen die Daten nicht gegen die vorgegebene Verteilung (also $P(A_j) = p_j \quad \forall_j$).

Falls $d^2 > x$: Mit Sicherheit γ wurde bewiesen, dass die vorgegebene Verteilung falsch ist. (Also: Mit Sicherheit γ wurde bewiesen, dass $\exists_j$ mit $P(A_j) \neq p_j$).

Beispiel: (Nägel)

x so, dass $\underbrace{\int_0^x f}_{\chi^2\text{-VT},\ 7\text{Fg}} = 0{,}94 \quad \Rightarrow x \approx 13{,}540$

$$d^2 = \frac{9^2}{7{,}8165} + \frac{5^2}{10{,}746} + \ldots + \frac{6^2}{7{,}8165} - 117 \approx 12{,}974$$

$d^2 \le x$: Mit Sicherheit 0,94 sprechen die Daten nicht gegen die $N(4;\ 0{,}2)$-Verteilung.

7.) Der Chi-Quadrat Unabhängigkeitstest

X, Y Zufallsvariablen.

Sind X, Y unabhängig?

Sind zwei Merkmale unabhängig oder nicht?
(z.B: Körpergröße und -gewicht, Raucher mit Lungenkrebs)

H_0: X, Y sind unabhängig

H_1: X, Y sind nicht unabhängig (d.h. nicht abhängig)

abelle:

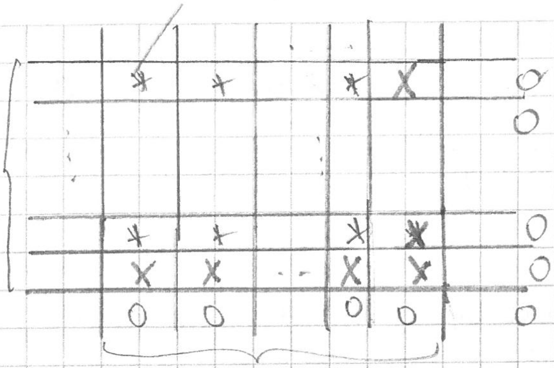
$Y \backslash X$	A_1	A_2		A_r	
B_1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$			$\sum_{k=1}^{r} t_{1,k}$ → Zeilensumme
B_2					$\sum_{k=1}^{r} t_{2,k}$
$\vdots$			$t_{j,k}$		
B_s					$\sum_{k=1}^{r} t_{s,k}$
	$\sum_{j=1}^{s} t_{j,1}$	$\sum_{j=1}^{s} t_{j,2}$		$\sum_{j=1}^{s} t_{j,r}$	n

↳ Spaltensumme

$$P(X \in A_k \text{ und } Y \in B_j) = \underbrace{P(X \in A_k)}_{\approx \frac{\sum_{j=1}^{s} t_{j,k}}{n} = \frac{\sum_{p=1}^{s} t_{p,k}}{n}} \cdot \underbrace{P(Y \in B_j)}_{\approx \frac{\sum_{k=1}^{r} t_{j,k}}{n} = \frac{\sum_{p=1}^{r} t_{j,p}}{n}}$$

Es soll getestet werden, ob $P(X \in A_k \cap Y \in B_j) = \frac{\sum_{p=1}^{s} t_{p,k}}{n} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{r} t_{j,p}}{n}$
(Anpassungstest)

$*$ … frei wählbar



o … vorgegeben (Zeilen -, Spaltensumme

X … zu berechnen

$\Rightarrow$ $(r-1)\cdot(s-1)$ sind frei wählbar

$$\underline{\underline{d^2}} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \frac{t_{j,k}^2}{\cancel{n}\cdot\frac{\sum_{p=1}^{s} t_{p,k}}{\cancel{n}} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{r} t_{j,p}}{n}} - n =$$

$$= n \cdot \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \frac{t_{j,k}^2}{\left(\sum_{p=1}^{s} t_{p,k}\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{r} t_{j,p}\right)} - n = \text{[redacted]}$$

$$= n \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \frac{t_{j,k}^2}{\left(\sum_{p=1}^{s} t_{p,k}\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{r} t_{j,p}\right)} - 1 \right)$$

$$D^2 := n \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \frac{T_{j,k}^2}{\left(\sum_{p=1}^{s} T_{p,k}\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{r} T_{j,p}\right)} - 1 \right)$$

Satz

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{n\to\infty} P\left(D^2_{(n)} \le x\right) = \int_0^x f(t)\,dt$, wobei f die Dichte der χ^2-Verteilung mit $(r-1)\cdot(s-1)$ Freiheitsgraden ist.

Wähle x so, dass $\int_0^x f(t)\,dt = \gamma = 1-\alpha$ ist, wobei f die Dichte der χ^2-Verteilung mit $(r-1)\cdot(s-1)$ Freiheitsgraden ist.

Falls $d^2 \leq x$: Mit Sicherheit γ sprechen die Daten nicht gegen die Unabhängigkeit.

Falls $d^2 > x$: Mit Sicherheit γ wurde bewiesen, dass die Merkmale nicht unabhängig sind.

(Achtung: heißt nicht, dass sie abhängig sind!)

Beispiel:

Sind Körpergröße und Körpergewicht unabhängig?

Größe \ Gewicht	≤70kg	70–80	80–90	90–100	≥100	
≤ 170	125	28	14	9	7	183
170–175	128	247	70	38	22	505
175–180	102	432	238	131	51	954
180–185	89	242	511	139	88	1069
185–190	43	59	202	104	57	465
≥ 190	11	13	19	50	22	115
	498	1021	1054	471	247	3291

$$d^2 = 3291\left(\frac{125^2}{498 \cdot 183} + \frac{28^2}{1021 \cdot 183} + \ldots + \frac{139^2}{471 \cdot 1069} + \ldots + \frac{22^2}{247 \cdot 115} - 1\right) =$$

$$\approx 1034{,}5$$

Sicherheit 0,94

x so, dass $\int_0^x \underset{\sim}{f} = 0{,}94$, $r=5$, $s=6$

χ^2-VT, mit $\underset{=20}{4 \times 5}$ Fg

$\Rightarrow x \approx 30{,}649$

$d^2 > x$: Mit Sicherheit 0,94 wurde bewiesen, dass Körpergröße und -gewicht nicht unabhängig sind.

Beispiel:

Es soll mit Sicherheit 0,96 getestet werden, ob in einem Restaurant ein Zusammenhang zwischen „eine Person bestellt Suppe" und „eine Person bestellt Wein" besteht. Dazu werden folgende Daten erhoben.

	Person bestellt Wein	Person bestellt nicht Wein	
Person bestellt Suppe	1930	543	2473
Person bestellt keine Suppe	1298	402	1700
	3228	945	4173

$$d^2 = 4173 \cdot \left(\frac{1930^2}{3228 \cdot 2473} + \frac{1298^2}{3228 \cdot 1700} + \frac{543^2}{945 \cdot 2473} + \frac{402^2}{945 \cdot 1700} - 1 \right)$$

$\approx 1{,}642439$.

x so, dass $\int_0^x \underset{\sim}{f} = 0{,}96 \Rightarrow x \approx 4{,}2179$

χ^2-VT, 1Fg

$d^2 < x \Rightarrow$ Mit Sicherheit 0,96 sprechen die Daten nicht gegen die Unabhängigkeit.

Beispiel:

Wir wollen Sicherheit 0,999 feststellen, ob ein Zusammenhang zwischen „Fußballweltmeister (der Männer) kommt aus Europa" und „Fußballweltmeisterschaft findet in Europa statt" besteht.

	WM in Europa	WM nicht in Europa	
WM aus Europa	9	0	9
WM nicht aus Europa	1	8	9
	10	8	18

$$d^2 = 18\left(\frac{9^2}{90} + \frac{1}{90} + \frac{64}{72} - 1\right) = \frac{72}{5} = 14{,}4$$

x so, dass $\int_0^x \underbrace{f}_{\chi^2\text{-VT m. 1Fg.}} = 0{,}999 \Rightarrow x \approx 10{,}828$

$d^2 > x \Rightarrow$ Mit Sicherheit 0,999 wurde bewiesen, dass „Fußballweltmeister kommt aus Europa" und „Fußballweltmeisterschaft findet in Europa statt" nicht unabhängig ist.

zweiseitige Tests

Versucht $\mu = \mu_0$ zu testen.

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

x so, dass $\int_{-\infty}^{x} f = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$H_0: \mu \in [\mu_1, \mu_2]$

$H_1: \mu \notin [\mu_1, \mu_2]$

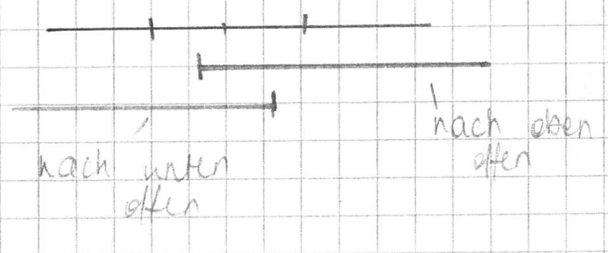
---

möglichst klein sein!

$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu \notin [\mu_1, \mu_2] \\ H_1: \mu \in [\mu_1, \mu_2] \end{array}\right\}$ ⇒ hier kann kritischer Bereich $\emptyset$ sein

einseitige Konfidenzintervalle

x so, dass $\int_{-\infty}^{x} f = 1 - \alpha \, (= \gamma)$



wie groß/klein kann Erwartungswert werden?

NACHTRAG

zu III. 13.) Zentraler Grenzwertsatz

Formel von Laplace - de Moivre

Korollar

X_n $B(n, \underset{\text{fest}}{p})$ - verteilt, $-\infty \le a \le b \le +\infty$:

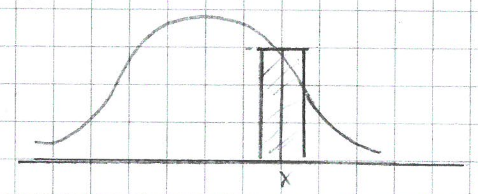
$$\lim_{n\to\infty} P\left(np + a\sqrt{n\cdot p\cdot \underbrace{q}_{=1-p}} \le X_n \le n\cdot p + b\sqrt{n\cdot p\cdot q}\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Beweisidee:

Stirling'sche Formel: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ für „kleine x"



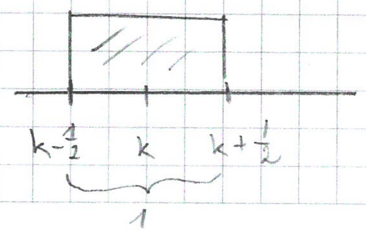
f Dichte

Fixiere $x \in \mathbb{R}$: Wähle $k(n,x)$ so, dass

$$k(n,x) - \frac{1}{2} \le n\cdot p + x\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q} \le k(n,x) + \frac{1}{2}$$

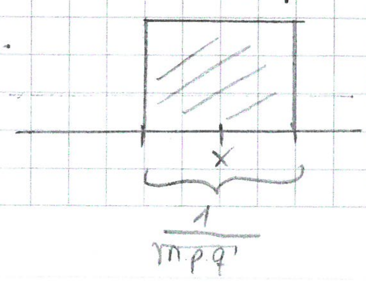
Setze $k := k(n,x)$

$$\frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} - \frac{1}{2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \le x \le \frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$$



Fläche gl. groß

soll so sein



gleiche Fläche

$$\sqrt{n\cdot pq}\cdot \overbrace{P(X_n=k)}^{\text{BV-Verteilung}} = \sqrt{n\cdot p\cdot q}\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}$$

Setze $a_k \ (= a_k(n,x)) := \sqrt{np\cdot q}\cdot P(X_n=k)$

$$\boxed{\begin{array}{l} k \approx n\cdot p + x\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q} \\ \hline n-k \approx n\cdot q - x\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q}\end{array}}$$

$$n-k \approx \underbrace{n-n\cdot p}_{n(\underbrace{1-p}_{=q})} - x\sqrt{n\cdot p\cdot q}$$

$$a_k = \sqrt{n\cdot p\cdot q}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k\cdot q^{n-k} \approx$$

$$\approx \sqrt{n\cdot p\cdot q}\,\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\cancel{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{n}}{\left(\frac{k}{e}\right)^k\cancel{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{k}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\sqrt{2\pi}\sqrt{n-k}}\cdot p^k\cdot q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{p\cdot q}\cdot\underbrace{\frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}}}\cdot\underbrace{\frac{e^k\cdot e^{n-k}}{e^n}}_{=1}\sqrt{\underbrace{\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{(n-k)}}_{\frac{1}{\frac{k}{n}\cdot(1-\frac{k}{n})}}}\,p^k\cdot$$

$$= \underbrace{\frac{n^k\cdot n^{n-k}}{k^k\,(n-k)^{n-k}}}_{\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{p\cdot q}\,\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}\cdot p^k\cdot q^{n-k} \approx$$

$$\left(\frac{k}{n}\approx p + x\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ 1-\frac{k}{n}\approx q - x\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\underbrace{\sqrt{p\cdot q}\,\frac{1}{\sqrt{\left(p+x\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)\left(q-x\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)}}}_{①}\ \underbrace{\frac{1\cdot p^k\cdot q^{n-k}}{\left(p+x\cdot\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)^k\cdot\left(q-x\cdot\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k}}}_{②}$$

$$① \quad \sqrt{pq}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(p+x\cdot\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(q-x\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

2.) $$\frac{1}{\left(p + x\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^k \left(q - x\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k}} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^k \left(1 - \frac{x}{q}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k}} \approx$$

durch p div. durch q div.

$$\approx \left(1 + \frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^{-n\cdot p - x\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \left(1 - \frac{x}{q}\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^{-n\cdot q + x\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q}} =$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^{-np} \left(1 - \frac{x}{q}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)^{-nq}}_{a.)} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{x}{p}\cdot\sqrt{pq}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{-x\sqrt{p\cdot q}} \cdot \left(\left(1 - \frac{x}{q}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{x\sqrt{p\cdot q}}}_{b.)}$$

b.) $$:= \Bigg(\underbrace{\left(1 + \frac{\frac{x}{p}\cdot\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}_{\to e^{\frac{x}{p}\cdot\sqrt{p\cdot q}}}\Bigg)^{-x\sqrt{p\cdot q}} \Bigg(\underbrace{\left(1 - \frac{\frac{x}{q}\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}_{\to e^{-\frac{x}{q}\sqrt{p\cdot q}}}\Bigg)^{x\cdot\sqrt{p\cdot q}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow e^{-x^2\cdot q} \cdot e^{-x^2 p} = e^{-x^2(\overbrace{p+q}^{=1})} = e^{-x^2}$$

a.) $$= e^{-n\cdot p\log\left(1 + \frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)} e^{-nq\log\left(1 - \frac{x}{q}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)} =$$

$$= e^{-np\log\left(1 + \frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right) - n\cdot q\cdot\log\left(1 - \frac{x}{q}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\right)} =$$

$$-n\cdot p\cdot\log\left(1 + \frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right) - n\cdot q\cdot\log\left(1 - \frac{x}{q}\cdot\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right) \approx$$

$$\approx -np\left(\frac{x}{p}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{p^2}\cdot\frac{p\cdot q}{n}\right) - nq\left(-\frac{x}{q}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}} + \right.$$

$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$

$$- \frac{1}{2} \frac{x^2}{q^2} \cdot \frac{pq}{n} \Big) =$$

$$= - \cancel{x \sqrt{n \cdot p \cdot q}} + \frac{x^2}{2} \cdot q + \cancel{x \cdot \sqrt{n \cdot pq}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \; p =$$

$$= \frac{x^2}{2} \big(\overbrace{q + p}^{=1} \big) = \frac{x^2}{2}$$

$$a_k \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \overset{1.)}{1} \cdot \overset{a}{e}^{\frac{x^2}{2}} \cdot \overset{b.)}{e}^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\square$

Wiederholung:

- Zusammenhang zu naiver u. axiomat. Def.
  → sieht man bei Gesetz d. großen Zahlen
- $P(6er) = \frac{1}{6}$ → • da symmetrisch
  • od. z.B. mit Entropie (Satz, Def + Beweis → auswendig)
  (Würfel merkt sich nichts → Laplace)
- ZV, Erwartungswert (naiv: Grenzwert vom Mittelwert bei ∞ - vielen Versuchen)
- ZV: diskret u. kontinuierlich
  5 Hauptverteilungen (z.B. Beweis für E(x) oder σV^2)
- unabhängige ZV: Eigenschaften, Faltung
- Statistik: verschiedene Verfahren: K.Intervalle + Tests (Def.)
- Gesetz der großen Zahlen (Beweis mit Skript)
- Modell d. immer wieder wiederholen

(Kombinatorik → viel, z.B. Ostereier)

Beispiel: Roulette

37

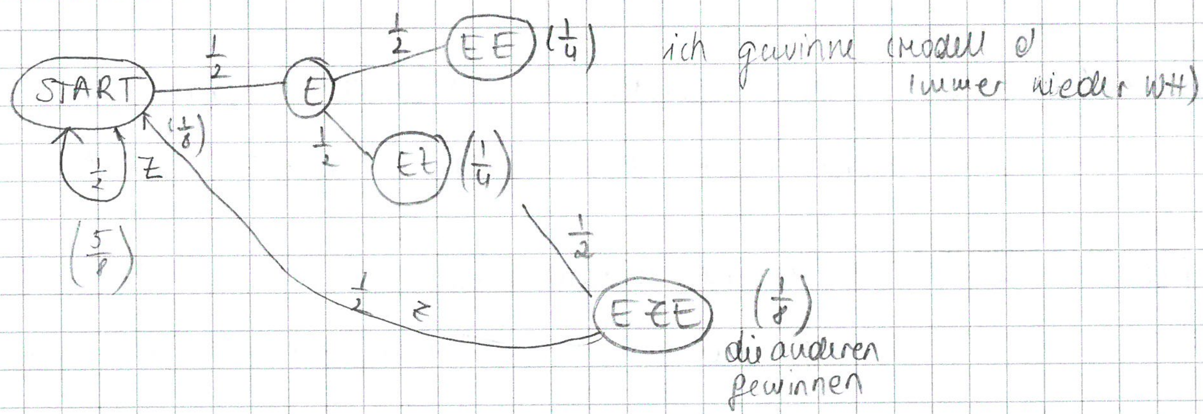
$P(\text{meine Zahl}) = \frac{1}{37}$ (bekomm 36 fache, wenn ich gewinne → 1 € Einsatz)

$$E = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn ich gewinne,} \\ \text{dann 35-fache}}}{35} \cdot \frac{1}{37} - \underbrace{\frac{36}{37} \cdot 1}_{\text{¬ gewinne}} = -\frac{1}{37}$$

Beispiel

1 Münze werfen: EEZ ... gewinne ich

EZE ... gewinnen die anderen



$$P(\text{ich gewinne}) = \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n}_{\text{geom. Reihe } \frac{1}{1-\frac{5}{8}}} = \qquad \left|\frac{5}{8}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

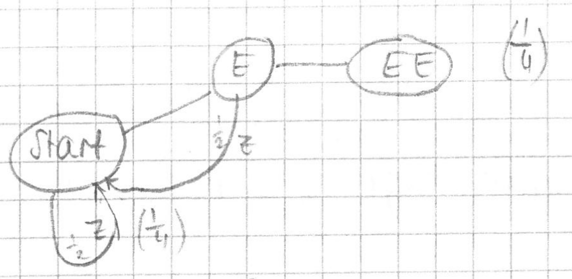
$p := P(\text{ich gewinne})$

$p = \frac{1}{4} + \frac{5}{8} p \Rightarrow \frac{3}{8} \cdot p = \frac{1}{4}$

$p = \frac{2}{3}$

→ muss hintereinander passieren,
↗ in 3er Gruppen zerlegen
→ kann sein, dass man 5x wirft und letzten 3 sind es!

E (Würfeln bis EEZ kommt) =: n



Würfeln

$k := E(W$ bis EE kommt$)$:

$$k = \overset{EE}{\frac{1}{4}} \cdot \underset{2\times\text{ werfen}}{2} + \overset{Z}{\frac{1}{2}} \cdot (k+1) + \frac{1}{4} \cdot \underset{EZ}{(k+2)} =$$

1x geworfen, brauche noch k Versuche, da ich am Start bin

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} k = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow k = 6$$

bedingte Erwartung: $E(W \text{ bis } Z \mid EE) = \underbrace{E(\text{Würfe bis Zahl kommt})}_{\text{geom. VT mit } p = \frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

$E(W$ bis EEZ$) = 6 + 2 = 8$

$E(W$ bis EZE$) = 10$

$E(W$ bis ZEZZ$) = 18$

$E(W$ bis EZEZ$) = 20$

ZEZZ gegen EZEZ

$P($EZEZ vor ZEZZ$) = \frac{9}{14} \approx 0{,}6429$

Bsp: 53.) $P = 2 \dfrac{\binom{3}{3}\binom{12}{2} + \binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1}\binom{12}{3}}{\binom{15}{5}}$

28.) P(1 Antwort richtig | AssistentIn sagt: „3. falsch") =

$$= \frac{\frac{11}{30}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{11}{30}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0}$$

Warum gleichwahrscheinlich?

⇒ Warum sollte eine Antwort wahrscheinlicher sein?

⇒ Entropie ... durchschnittliche Information

→ größt mögliche bei gleich Wh

Poissonverteilung : P(vt)
Exponentialverteilung : E(v)

} wenn t = 1, dann gleich

FÜR PRÜFUNG:

→ mit Brüche, Wurzeln rechnen

Mündliche:

→ was ist Wahrscheinlichkeit? – Naive WH: $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$

Anzahl wie oft A bei n Versuchen eintrifft

→ Welche Probleme macht diese Def? (2 Probleme)

⇒ Axiomatische Def. : braucht σ – Algebra (Def!)

braucht WH-Maß (Def!)

was ist das? Fkt von $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$

→ Zusammenhang zw. naiv u. axiom. Def : Starkes Gesetz der gr. Zahlen (formulieren, Bew mit Skript)