Proseminar zu
Algebra für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Sommersemester 2011

Peter Raith

1) Finde die ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen.
   a) $366x_1 + 144x_2 = 42\,792\,.$
   b) $2\,856\,x_1 - 2\,108\,x_2 = 175\,508\,.$
   c) $1\,595\,x_1 + 2\,088\,x_2 = 343\,720\,.$
   d) $252x_1 + 486x_2 = 23\,886\,.$

2) Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}$.
   a) $4\,921\,x_1 + 10\,545\,x_2 = 524\,438\,.$
   b) $5\,922\,x_1 + 3\,196\,x_2 = 249\,006\,.$
   c) $4\,488\,x_1 + 9\,996\,x_2 = 120\,564\,.$
   d) $684\,x_1 - 2\,232\,x_2 = 56\,196\,.$

3) Für die Gleichungen aus Beispiel 2) bestimme diejenigen Lösungen x_1, x_2, die $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ erfüllen.

4) Von den folgenden Gleichungen berechne sowohl alle ganzzahligen Lösungen als auch alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen.
   a) $495x_1 + 225x_2 = 6\,840\,.$
   b) $456x_1 + 192x_2 = 16\,087\,.$
   c) $196x_1 + 105x_2 = 14\,420\,.$
   d) $108x_1 + 364x_2 = 10\,092\,.$

5) EinE KäuferIn möchte genau 100 Tonerpatronen kaufen und dafür genau 3 000 € ausgeben (es darf also weder mehr noch weniger kosten). Eine Tonerpatrone der Sorte A kostet 29 €, eine Tonerpatrone der Sorte B kostet 32 € und eine Tonerpatrone der Sorte C kostet 40 €. Wieviele Tonerpatronen der Sorte A, B und C muss dieseR KäuferIn kaufen, damit er/sie sein/ihr Ziel erreicht?

6) Betrachte auf $\mathcal{S}_8$ die Permutationen $\sigma := \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&8&7&1&2&6&4&5 \end{pmatrix}$ und $\tau := \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 6&1&8&4&3&2&5&7 \end{pmatrix}$.
   a) Berechne $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$.
   b) Bestimme $\operatorname{sgn}\sigma$, $\operatorname{sgn}\tau$, $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)$ und $\operatorname{sgn}(\tau\sigma)$.
   c) Schreibe σ, τ, $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$ als Produkt elementfremder Zyklen.
   d) Stelle σ, τ, $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$ als Produkt von Zweierzyklen.

7) Auf $\mathcal{S}_7$ betrachte die Permutationen $\sigma := (1\ 5\ 2\ 4\ 6)$ und $\tau := (1\ 2\ 6)(4\ 7)$.
   a) Berechne $\operatorname{sgn} \sigma$ und $\operatorname{sgn} \tau$.
   b) Schreibe σ und τ in „Matrixform“.
   c) Stelle σ und τ als Produkt von Zweierzyklen dar.
   d) Schreibe σ als ein Produkt von Dreierzyklen.

8) Betrachte die Permutationen σ und τ aus Beispiel 7). Führe alle Rechnungen in diesem Beispiel mit der Darstellung als elementfremde Zyklen durch.
   a) Bestimme $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$.
   b) Berechne σ^{-1} und τ^{-1}.

9) Es seien $n, r \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq r \leq n$. Weiters sei $\sigma := (x_1\ x_2\ \ldots\ x_r)$ ein r-Zyklus in $\mathcal{S}_n$. Zeige, dass $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{r-1}$. Weiters stelle σ als Produkt von Zweierzyklen dar.

10) Es sei $(G, \cdot)$ eine Menge mit einer assoziativen Multiplikation. Weiters gäbe es für alle $a, b \in G$ Elemente $x, y \in G$ mit $ax = b$ und $ya = b$ (es darf natürlich auch $y = x$ gelten, aber es muss nicht so sein). Fixiere ein $a_0 \in G$. Zeige die folgenden Aussagen.
   a) Es gibt ein $1 \in G$ mit $1 \cdot a_0 = a_0$.
   b) Sei $a \in G$ beliebig. Dann gilt $1a = a$.
   Hinweis: Verwende, dass man a als a_0x schreiben kann und verwende Beispiel a).
   c) Für jedes $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1}a = 1$.

11) Sei $(G, \cdot)$ eine Menge mit einer assoziativen Multiplikation. Beweise, dass G genau dann eine Gruppe ist, wenn es für alle $a, b \in G$ Elemente $x, y \in G$ gibt, sodass $ax = b$ und $ya = b$ gelten.
Anleitung: Verwende Beispiel 10).

12) Betrachte eine Menge $(G, \cdot)$ mit n Elementen und einer assoziativen Multiplikation. Es gelten die Kürzungsregeln, also für $a, b, x \in G$ folgt aus $ax = bx$, dass $a = b$, und aus $xa = xb$, dass $a = b$. Zeige die folgenden Aussagen.
   a) Sei $a \in G$. Dann gilt $\{ax : x \in G\} = G$.
   Anleitung: Zeige, dass $\{ax : x \in G\}$ genau n Elemente hat.
   b) Für $a \in G$ ist $\{xa : x \in G\} = G$.
   c) Seien $a, b \in G$. Dann gibt es $x, y \in G$ mit $ax = b$ und $ya = b$.

13) Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Menge mit einer assoziativen Multiplikation. Beweise, dass G genau dann eine Gruppe ist, wenn die Kürzungsregeln gelten, das heißt für $a, b, x \in G$ folgt aus $ax = bx$, dass $a = b$, und aus $xa = xb$, dass $a = b$.
Hinweis: Verwende Beispiel 12) und Beispiel 11).

14) Zeige, dass $G := \{a + b\sqrt{-7} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}$ bezüglich der Multiplikation eine Abel'sche Gruppe bildet.

15) Betrachte eine Gruppe $(G, \cdot)$. Zeige, dass G genau dann eine Abel'sche Gruppe ist, wenn $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$ gilt.

16) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit 5 Elementen. Beweise, dass G eine Abel'sche Gruppe ist.

17) a) In einer Gruppe $(G, \cdot)$ gelte $a^2 = 1$ für alle $a \in G$. Zeige, dass G eine Abel'sche Gruppe ist.
b) Gilt $a^2 = 1$ für alle $a \in G$ in einer Abel'schen Gruppe $(G, \cdot)$?

18) a) Zeige, dass jede Gruppe mit höchstens 5 Elementen eine Abel'sche Gruppe ist.
Anleitung: Verwende eine passende Verallgemeinerung von Beispiel 16), sowie Beispiel 17) a).
b) Gib ein Beispiel einer Gruppe mit 6 Elementen, die keine Abel'sche Gruppe ist.
c) Finde ein Beispiel einer Gruppe mit höchstens 5 Elementen, die nicht zyklisch ist.

19) Betrachte $\left({}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}, +\right)$, wobei ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ die Menge aller Äquivalenzklassen rationaler Zahlen ist, und zwei rationale Zahlen als äquivalent betrachtet werden, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist. Man kann sich ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ als die Menge aller rationalen Zahlen vorstellen, die in $[0, 1)$ liegen, wobei die Addition von $x, y \in {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ als $x + y$ definiert ist, falls $x + y < 1$, und als $x + y - 1$, falls $x + y \geq 1$. Zeige, dass in ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ alle Elemente endliche Ordnung haben. Wieviele Elemente besitzt ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$?

20) Es seien $(G_1, \cdot)$, $(G_2, \cdot)$ und $(G_3, \cdot)$ Gruppen, $\varphi_1 : G_1 \to G_2$ und $\varphi_2 : G_2 \to G_3$ Gruppenhomomorphismen. Zeige, dass $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G_1 \to G_3$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus ist.

21) Auf $\mathcal{S}_9$ betrachte die Permutationen $\sigma := (1\ 7\ 5\ 6\ 9\ 2\ 4)$ und $\tau := (2\ 9\ 6\ 5\ 4)$.
a) Bestimme $\operatorname{ord}(\sigma)$ und $\operatorname{ord}(\tau)$.
b) Berechne $\sigma\tau$ und $\operatorname{ord}(\sigma\tau)$.
c) Die Zahl n sei das Produkt von $\operatorname{ord}(\sigma)$ und $\operatorname{ord}(\tau)$. Welchen Wert hat n? Was ergibt $(\sigma\tau)^n$?

22) Es seien $a, b \in G$, wobei $(G, \cdot)$ eine Abel'sche Gruppe ist. Weiters seien sowohl $n_1 := \operatorname{ord}(a)$ als auch $n_2 := \operatorname{ord}(b)$ endlich. Zeige, dass $\operatorname{ord}(ab) \mid n_1 n_2$.

23) Gilt die Aussage von Beispiel 22) auch in beliebigen (nicht Abel'schen) Gruppen.

24) In einer Abel'sche Gruppe $(G, \cdot)$ seien die Elemente a und b von endlicher Ordnung. Es gelte $\gcd\big(\operatorname{ord}(a), \operatorname{ord}(b)\big) = 1$. Beweise, dass $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(a)\operatorname{ord}(b)$ gilt.
Anleitung: Verwende Beispiel 22) und die Tatsache, dass in jeder Gruppe $\operatorname{ord}(x) \mid n$ aus $x^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ folgt.

25) Die Klein'sche Vierergruppe $\mathcal{V}_4 \subseteq \mathcal{S}_4$ ist durch $\mathcal{V}_4 := \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ definiert.
a) Zeige, dass $\mathcal{V}_4$ ein Normalteiler in $\mathcal{A}_4$ ist.
b) Ist ${}^{\mathcal{A}_4}\!/\!_{\mathcal{V}_4}$ eine Abel'sche Gruppe?
c) Beweise, dass $\mathcal{V}_4$ eine Abel'sche Gruppe ist.
Hinweis: Zeige zuerst, dass $\sigma^2 = \mathrm{id}$ für alle $\sigma \in \mathcal{V}_4$ gilt, und verwende dann Beispiel 17) a).
d) Leite daraus ab, dass $\mathcal{S}_4$ auflösbar ist.

26) Betrachte $\mathbb{Z}_{14}$ (die Restklassen modulo 14) mit der Addition und der Multiplikation.
   a) Bestimme die Menge ${\mathbb{Z}_{14}}^*$ der Einheiten in $\mathbb{Z}_{14}$.
   b) Finde alle Nullteiler in $\mathbb{Z}_{14}$.
   c) Zeige, dass die Gruppe $\left({\mathbb{Z}_{14}}^*, \cdot\right)$ von $\{5\}$ erzeugt wird.

27) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Zeige, dass $(R^*, \cdot)$ eine Gruppe ist.

28) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zeige dass ${\mathbb{Z}_n}^* = \left\{k \in \{1, 2, \ldots, n-1\} : \gcd(k, n) = 1\right\}$ gilt.
Anleitung: Um zu zeigen, dass die linke Seite in der rechten Seite enthalten ist, führe den Beweis indirekt. Für die andere Richtung verwende eine Folgerung aus dem Euklidischen Algorithmus.

29) Sei $(S, +, \cdot)$ ein Schiefkörper und $I \subseteq S$ ein Ideal. Beweise, dass $I = \{0\}$ oder $I = S$ gilt.

30) Es seien $(R_1, +, \cdot)$, $(R_2, +, \cdot)$ und $(R_3, +, \cdot)$ Ringe, $\varphi_1 : R_1 \to R_2$ und $\varphi_2 : R_2 \to R_3$ Ringhomomorphismen. Zeige, dass $\varphi_2 \circ \varphi_1 : R_1 \to R_3$ ebenfalls ein Ringhomomorphismus ist.

31) Beweise, dass ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ mit Eins genau dann ein Körper ist, wenn $\{0\}$ und R die einzigen Ideale in R sind.
Hinweis: Für die eine Richtung verwende Beispiel 29) und für die andere, dass für jedes $a \in R$ die Menge aR ein Ideal ist.

32) Betrachte $\mathbb{Z}_{15}$ (die Restklassen modulo 15) mit der Addition und der Multiplikation.
   a) Wie sieht die Menge ${\mathbb{Z}_{15}}^*$ der Einheiten in $\mathbb{Z}_{15}$ aus?
   b) Für jedes $a \in {\mathbb{Z}_{15}}^*$ bestimme $\operatorname{ord}(a)$ (in der multiplikativen Gruppe $\left({\mathbb{Z}_{15}}^*, \cdot\right)$).
   c) Finde alle Nullteiler in $\mathbb{Z}_{15}$.
   d) Ist die Gruppe $\left({\mathbb{Z}_{15}}^*, \cdot\right)$ zyklisch?

33) Sei $(S, +, \cdot)$ ein Schiefkörper, $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $\varphi : S \to R$ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi \neq 0$. Beweise, dass φ injektiv ist.
Anleitung: Betrachte $\ker \varphi$ und verwende Beispiel 29).

34) Beweise die folgenden Aussagen.
   a) Falls $(S, +, \cdot)$ ein Schiefkörper, $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit mindestens zwei Elementen und $\varphi : S \to R$ ein surjektiver Ringhomomorphismus ist, dann ist φ ein Isomorphismus und $(R, +, \cdot)$ ein Schiefkörper.
   b) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $\varphi : K \to R$ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi \neq 0$. Dann ist φ injektiv.
   c) Wenn $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit mindestens zwei Elementen und $\varphi : K \to R$ ein surjektiver Ringhomomorphismus ist, dann ist φ ein Isomorphismus und $(R, +, \cdot)$ ein Körper.

Hinweis: Verwende Beispiel 33).

35) Zeige, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ die folgenden Aussagen gelten.
a) Das Element 3 ist nicht irreduzibel. b) Die Zahl 5 ist irreduzibel.
c) Es ist $3 + 2\sqrt{-2}$ irreduzibel. d) Die Zahl 17 ist nicht irreduzibel.

36) Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen.
a) $x^2 - 15y^2 = 2\,.$ b) $x^2 - 15y^2 = 7\,.$
c) $x^2 - 15y^2 = -2\,.$ d) $x^2 - 15y^2 = -7\,.$
Hinweis: Betrachte diese Gleichungen modulo 5.

37) Betrachte $\mathbb{Z}[\sqrt{15}] := \{a + b\sqrt{15} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a) Zeige, dass 2, 7, $1 + \sqrt{15}$ und $-1 + \sqrt{15}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{15}]$ sind.
Hinweis: Verwende dazu Beispiel 36).
b) Ist 2 prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{15}]$?
c) Gilt in $\mathbb{Z}[\sqrt{15}]$ die eindeutige Zerlegung in Irreduzible?

38) Über $\mathbb{Z}_7$ bestimme von den folgenden Polynomen p ihren Grad $\mathrm{grad}(p)$, ihre formale Ableitung p' und deren Grad $\mathrm{grad}(p')$.
a) $p = x^7\,.$ b) $p = x^7 + 3x^5\,.$ c) $p = x^{14} + 5x^{10}\,.$

39) Es sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}] := \{a + b\sqrt{-13} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a) Beweise, dass 7, 11, $5 + 2\sqrt{-13}$ und $5 - 2\sqrt{-13}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ sind.
b) Untersuche, ob 7 prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ ist.
c) Ist 17 irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$?
d) Kann jedes Element von $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ als eindeutiges Produkt von irreduziblen Elementen geschrieben werden?

40) Führe für die folgenden Polynome (über $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$) die Division mit Rest von p_1 durch p_2 durch.
a) $p_1 := 6x^5 + 14x^4 + 17x^3 + 15x^2 + 9x + 7$ durch $p_2 := 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1\,.$
b) $p_1 := x^4 + 3x^3 + x + 3$ durch $p_2 := x^3 + x^2 - 2x + 1\,.$

41) Betrachte $p_1 := 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ und $p_2 := 2x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2$ (über $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$). Bestimme $\gcd(p_1, p_2)$ und finde Polynome s_1, s_2 mit $s_1p_1 + s_2p_2 = \gcd(p_1, p_2)$.

42) Für die Polynome
$$p_1 := 6x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \text{ und } p_2 := 6x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 9x + 6$$
(über $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$) berechne $\gcd(p_1, p_2)$. Weiters bestimme Polynome s_1, s_2 mit $s_1p_1 + s_2p_2 = \gcd(p_1, p_2)$.

43) Die Polynome p_1 und p_2 (über $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$) seien durch $p_1 := 2x^5 - 7x^4 + 9x^2 + x - 3$ und $p_2 := 6x^6 - 7x^5 - 49x^4 + 28x^3 + 62x^2 - 18$ definiert. Finde $\gcd(p_1, p_2)$ und gib Polynome s_1, s_2 an, für die $s_1p_1 + s_2p_2 = \gcd(p_1, p_2)$ gilt.

44) Betrachte in diesem Beispiel den Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ (also die Polynome über $\mathbb{Z}$, und daher nicht über einem Körper!).

a) Zeige, dass $I := \{p = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid a_0\}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}[x]$ ist.

b) Beweise, dass $I = (2, x)$ für I aus Beispiel a) gilt (also I ist das von 2 und x erzeugte Ideal).

c) Für I aus Beispiel a) beweise, dass es kein $p \in \mathbb{Z}[x]$ mit $I = (p)$ gibt.

d) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?

45) a) Für $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ zeige, dass $N(a) = |a|^2$ gilt.

b) Es seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass es $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\left|(q_1 + iq_2) - (n_1 + in_2)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Anleitung: Überlege zuerst, dass es zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $|q - n| \leq \frac{1}{2}$ gibt.

c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ mit $b \neq 0$. Beweise, dass es $q, r \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ mit $N(r) < N(b)$ gibt, sodass $a = qb + r$ gilt.

Bemerkung: Auf $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ gibt es somit eine Division mit Rest.

Hinweis: Verwende Beispiel b).

d) Welche weiteren Eigenschaften gelten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ wegen Beispiel c)?

46) a) Lässt sich eine ähnliche Argumentation wie in Beispiel 45) auch auf $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ anwenden? Erkläre die Details dazu.

b) Wo bricht eine ähnliche Argumentation wie in Beispiel 45) für $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zusammen?

c) Kann es auf $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ eine Division mit Rest geben?

Achtung: Die entsprechende „Messgröße“ muss ja nicht die Norm sein!

47) Finde die Nullstellen in $\mathbb{C}$ der folgenden Polynome p über $\mathbb{C}$.

a) $p := x^4 + 10x^3 - 144x^2 - 250x + 2975$.

b) $p := 12x^4 - 32x^3 - 329x^2 + 1055x - 550$.

48) Untersuche welche der folgenden Polynome p irreduzibel über $\mathbb{C}$ und welche irreduzibel über $\mathbb{R}$ sind.

a) $p := x^2 + 1$. b) $p := x - 5$. c) $p := 5x - 7$.

d) $p := x^3 - 18x^2 + 108x - 216$. e) $p := x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$.

f) $p := x^2 - 4$. g) $p := 3x - 12$. h) $p := x^2 + 9x$.

i) $p := x^2 + 9$. j) $p := x + 17$. k) $p := 2x + 11$.

49) a) Beweise, dass 2, 11, $1 + \sqrt{-21}$ und $1 - \sqrt{-21}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ sind.

b) Ist 11 prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$?

c) Zeige, dass $2 \nmid 1 + \sqrt{-21}$ und $1 + \sqrt{-21} \nmid 2$.

d) Kann jedes Element von $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ als eindeutiges Produkt von irreduziblen Elementen geschrieben werden?

e) Es sei $I := (2, 1 + \sqrt{-21})$ (also das von 2 und $1 + \sqrt{-21}$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$). Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a + b\sqrt{-21} \in I$ zeige, dass $a \equiv b \pmod 2$ gilt.

Anleitung: Verwende, dass $a + b\sqrt{-21} = 2(a_1 + b_1\sqrt{-21}) + (1 + \sqrt{-21})(a_2 + b_2\sqrt{-21})$.

f) Für I aus Beispiel e) zeige, dass es kein $s \in \mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ mit $I = (s)$ gibt.

Hinweis: Verwende Beispiel e).

50) Bestimme die Nullstellen (in $\mathbb{C}$) der folgenden Polynome p. Weiters gib die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Q}$ an.
a) $p := x^5 - 6x^4 - 334x^3 + 9261x - 18522\,.$
b) $p := 1848x^5 - 10442x^4 + 21201x^3 - 18431x^2 + 6255x - 575\,.$
c) $p := x^4 + x^3 - 7x^2 - 5x + 10\,.$
d) $p := x^5 + 11x^4 + 34x^3 + 30x^2 + 125x + 375\,.$

51) Von den folgenden Polynome p bestimme die Nullstellen (in $\mathbb{C}$). Außerdem gib die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Q}$ an.
a) $p := 42x^5 - 379x^4 + 1058x^3 - 1066x^2 + 25\,.$
b) $p := x^6 - 4x^5 - 49x^4 + 302x^3 + 398x^2 - 3088x - 4760\,.$
c) $p := x^5 + 18x^3 + 302x^2 - 1063x + 742\,.$
d) $p := x^4 + 82x^3 + 48x^2 - 24178x + 136367\,.$

52) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $\dfrac{20x^3 - 748x^2 + 3772x - 7812}{x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 158x^2 - 543x + 585}$ (also die Partialbruchzerlegung über $\mathbb{R}$).

53) Untersuche ob die folgenden Polynome irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind.
a) $p := x^3 - 7x^2 + 35x + 28\,.$
b) $p := 14x^3 + 33x^2 - 63x - 69\,.$
c) $p := x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81\,.$
d) $p := x^3 + 9x^2 + 51x - 61\,.$
e) $p := 18x^3 - 60x^2 - 72x + 84\,.$
f) $p := 9x^3 + 287x^2 - 697x + 82\,.$

54) Zeige, dass $p := x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

55) Es sei $p := x^7 + 1\,.$
a) Bestimme die Nullstellen (in $\mathbb{C}$) von p.
b) Gib die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{C}$ an.
c) Zerlege p in Irreduzible über $\mathbb{R}$.
d) Finde die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{Q}$.
e) Zeige, dass $p = (x+1)^7$ in $\mathbb{Z}_7$ gilt.

56) Betrachte das Polynom $p := x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\,.$
a) Berechne die Nullstellen (in $\mathbb{C}$) von p.
b) Bestimme die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{C}$.
c) Gib die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{R}$ an.
d) Beweise, dass p irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
e) Zeige, dass $p = (x-1)^{10}$ in $\mathbb{Z}_{11}$ gilt.

57) Es sei das Polynom p durch

$$\begin{aligned} p := x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + \\ + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

definiert.
a) Zerlege p in Irreduzible über $\mathbb{C}$.
b) Bestimme die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{R}$.
c) Gib die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{Q}$ an.
d) Finde die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{Z}_{23}$.
Hinweis: Dazu zeige, dass $p = (x-1)^{22}$ in $\mathbb{Z}_{23}$ gilt.

58) Definiere das Polynom p durch

$$p := x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} + x^{30} + x^{29} + x^{28} + x^{27} + x^{26} + x^{25} + x^{24} + \\ + x^{23} + x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + \\ + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^{9} + x^{8} + x^{7} + x^{6} + x^{5} + x^{4} + x^{3} + x^{2} + x + 1\,.$$

a) Bestimme die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{C}$.
b) Finde die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{R}$.
c) Zerlege p in Irreduzible über $\mathbb{Q}$.
d) Gib die Zerlegung von p in Irreduzible über $\mathbb{Z}_{37}$ an.
Hinweis: Dazu zeige, dass $p = (x-1)^{36}$ in $\mathbb{Z}_{37}$ gilt.

59) Sei p durch $p := x^5 - 28x + 21$ definiert. Beweise, dass die Nullstellen von p nicht durch eine algebraische Formel der Koeffizienten von p beschrieben werden können.

60) Definiere p durch $p := x^7 - 12x + 10$. Zeige, dass man die Nullstellen von p nicht durch eine algebraische Formel der Koeffizienten von p ausdrücken kann.

61) Betrachte das Polynom $p := x^{17} - 25x + 15$. Beweise, dass die Nullstellen von p nicht durch eine algebraische Formel der Koeffizienten von p ausgedrückt werden können.