Proseminar zu Angewandte Mathematik für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Sommersemester 2017

Elisa Davoli
Franz Hofbauer
Günther Hörmann
Ilaria Perugia
Peter Raith

1) Bezeichnet man die zum Zeitpunkt t vorhandene Stoffmenge eines radioaktiven Stoffes mit $x(t)$, so lautet das *radioaktive Zerfallsgesetz* $\dot{x} = -kx$, wobei k eine vom Stoff abhängige Konstante ist (siehe Vorlesung). Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei x_0. Als Halbwertszeit T des Stoffes wird jene Zeit bezeichnet, zu der nur mehr die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist, also $x(T) = \frac{x_0}{2}$ gilt.
   a) Wie sieht die Lösung der obigen Differenzialgleichung aus (siehe Vorlesung)?
   b) Zeige, dass $x(t+T) = \frac{x(t)}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wie kann man dieses Ergebnis interpretieren?
   c) Finde eine Formel für die Halbwertszeit T, falls man k als bekannt voraussetzt.
   d) Wenn die Halbwertszeit T bekannt ist, wie kann man k berechnen?
   e) Wird man praktisch (also durch Messungen) eher k oder T feststellen können?

2) Ein (zu) einfaches Modell zum *Populationswachstum*: Mit $x(t)$ werde die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t bezeichnet. Man nimmt an, dass die Bevölkerungszunahme proportional zur vorhandenen Bevölkerung ist, also dass $\dot{x} = ax$ gilt. Berechne die Funktion $x(t)$. Was ergibt $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$?

3) Löse die Differenzialgleichung: $\dot{x} = -6x + 15y$, $\dot{y} = 15x + 10y$, $x(0) = 19$ und $y(0) = 9$.

4) Bestimme alle Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ für die $\dot{x} = 17x - 4y$, $\dot{y} = 40x - 9y$, $x(0) = 0$ und $y(0) = 9$ gilt.

5) Es seien A und B zwei reelle $n \times n$-Matrizen, und $v \in \mathbb{R}^n$. Auf einem Computer soll ABv ausgerechnet werden (die Eintragungen von A, B und v seien bereits auf dem Computer abgespeichert). Da die notwendigen Additionen in Vergleich zu den Multiplikationen einen extrem geringen Zeitaufwand benötigen, vernachlässigen wir sie, das heißt wir tun so, als ob die für eine Addition notwendige Zeit 0 wäre. In den folgenden Fällen bestimme den (ungefähren) Zeitaufwand um $(AB)v$, sowie um $A(Bv)$ zu berechnen (suche jeweils dem Ergebnis angepasste Einheiten, um das Ergebnis auszudrücken).
   a) Zunächst sei $n = 10\,000$ (also $n = 10^4$) und unser Computer schaffe 10^9 Multiplikationen (also 1 Milliarde) pro Sekunde.
   b) Jetzt sei $n = 10^6$ (also 1 Million) und die Computerkapazität betrage 10^{14} Multiplikationen pro Sekunde.
   c) Schließlich sei $n = 10^6$ und der Computer schaffe 10^{10} Multiplikationen pro Sekunde.

6) Betrachte einen Computer, der Zahlen (Dezimalzahlen) auf 4 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann. Beim Durchführen einer Rechenoperation rechnet der Computer zunächst intern das genaue Ergebnis aus, und rundet dieses (nach den üblichen Regeln) auf 4 Stellen (dieses vierstellige Ergebnis wird dann abgespeichert). Nun sei $a = 24.73$, $b = 4.678$ und $c = 7.131$. Welche Ergebnisse liefert unser Computer für $(ab)c$ und $a(bc)$?

7) Nehmen wir wieder unseren Computer aus Beispiel 6). Es sei $a = 36.72$, $b = 8.528$ und $c = 4.238$. Bestimme die Werte, die der Computer für $(a+b)c$ und $ac+bc$ liefert (dabei ist wie üblich $ac + bc$ als $(ac) + (bc)$ zu lesen).

8) Noch einmal betrachten wir den Computer aus Beispiel 6). Es sei $a = 81.57$ und $b = 6.874 \times 10^{-6}$.
   a) Berechne den Wert, den der Computer für $a + b$ erhält.
   b) Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung $a + x = a$?
   c) Finde eine Zahl c (im Computer darstellbar), sodass der Computer ein Ergebnis $c+b$ liefert, das ungleich c ist.
   d) Suche eine (im Computer darstellbare) Zahl d, sodass der Computer für $a+d$ denselben Wert wie d erhält.

9) Die auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ definierte Funktion $f(x) := x\left(\left(3 + \dfrac{5}{x}\right)^2 - 9\right)$ werde ausgewertet, indem man zunächst $w_1 := \frac{5}{x}$, dann $w_2 := 3 + w_1$, dann $w_3 := {w_2}^2$, dann $w_4 := w_3 - 9$, und schließlich $f(x) = xw_4$ berechnet. Wir benützen einen Computer, der Zahlen auf 5 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann, und der analog wie in Beispiel 6) beschrieben rechnet.
   a) Welche Werte liefert unser Computer für $f(100)$, $f(10\,000)$ und $f(1\,000\,000)$? Vergleiche diese Werte mit den tatsächlichen Funktionswerten.
   b) Finde den Wert für $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, den wir erhalten, wenn wir mit diesem Computer versuchen diesen Grenzwert auszurechnen.
   c) Berechne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

10) Betrachte die auf $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ definierte Funktion $f(x) := \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$.

a) Kann die direkte Auswertung dieser Ausdrücke für große x zu „Auslöschung“ führen?

b) Finde einen zu $f(x)$ äquivalenten Ausdruck, der für große x nicht zu „Auslöschung“ führt.

c) Ein Computer kann Zahlen auf 8 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen, und rechnet analog wie in Beispiel 6) beschrieben (auch die Quadratwurzel wird zunächst auf mehr Stellen genau ausgerechnet, und dann gerundet). Bestimme die Werte, die dieser Computer für $f(1000)$ liefert, und zwar sowohl mit der direkten Methode (wie in Beispiel a)), als auch mit der in Beispiel b) gefundenen Methode. Weiters vergleiche diese Ergebnisse mit dem tatsächlichen Wert von $f(1000)$.

11) a) Mit einem Computer, der Zahlen auf 3 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann, und der analog wie in Beispiel 6) beschrieben rechnet, wird $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ berechnet. Finde den Wert, den man dabei erhält.

b) Welchen exakten Wert erhält man für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? Vergleiche den numerischen Wert dieser Lösung mit dem Ergebnis von Beispiel a).
Hinweis: Wenn man das Ergebnis dieser Reihe nicht weiß, dann kann man es mit einem Computer, etwa unter Verwendung von Mathematica, bestimmen.

12) Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 7\,, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 21\,, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3\,, \\ 3x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= -8\,. \end{aligned}$$

13) a) Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 3\,, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 &= 7\,, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 4\,, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 5\,, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 7\,. \end{aligned}$$

b) Zu der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ bestimme eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, sodass $A = LR$ gilt.

c) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

14) Uns steht wieder der in Beispiel 6) beschriebene Computer zur Verfügung. Unter „Zuhilfenahme" dieses Computers löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6.541 \times 10^{-3}\, x_1 + 4.147 \times 10^{-3}\, x_2 + 0.6871\, x_3 &= 15.27\ , \\ 31.28\, x_1 + 19.77\, x_2 + 7.295\, x_3 &= 1385\ , \\ 8.257\, x_1 + 4.086\, x_2 + 4.439\, x_3 &= 378.3\ . \end{aligned}$$

15) a) Bestimme die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 - x_5 - 2x_6 &= 4\ , \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 - 2x_5 - 3x_6 &= 5\ , \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 - 2x_6 &= 5\ , \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 4x_5 + x_6 &= 9\ , \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 - 7x_5 - 2x_6 &= 4\ , \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 - 5x_6 &= 7\ . \end{aligned}$$

b) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 5 & 8 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 6 & -7 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

16) a) Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6\ , \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 6\ , \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 7\ , \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 2\ , \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 3\ . \end{aligned}$$

b) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -7 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & -3 & 3 \\ 4 & -7 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

17) Unter „Zuhilfenahme" des in Beispiel 6) beschriebenen Computers bestimme die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 17.83\, x_1 + 10.64\, x_2 + 12.39\, x_3 &= 1729\ , \\ 2.318\, x_1 + 1.392\, x_2 + 9.476\, x_3 &= 883.6\ , \\ 8.631\, x_1 + 4.978\, x_2 + 15.79\, x_3 &= 1655\ . \end{aligned}$$

18) Es sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^{n}$ eine diagonaldominante $n \times n$-Matrix (d.h.: $|a_{j,j}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{j,k}|$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Beweise, dass dann auch für $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die im Gauß-Verfahren auftretenden Matrizen A_r diagonaldominant sind.

19) Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 57.93 & 8.427 & 12.84 & 5.904 \\ 2.813 & 31.75 & 18.62 & 2.356 \\ 9.726 & 1.891 & 28.27 & 7.082 \\ 2.836 & 8.241 & 1.993 & 14.83 \end{pmatrix}.$$

Für die Rechnungen in diesem Beispiel „verwende" wieder den in Beispiel 6) beschriebenen Computer.

a) Untersuche, ob A diagonaldominant ist.

b) Ist es sinnvoll für diese Matrix A das Gauß-Verfahren ohne Pivotsuche zu verwenden?

c) Berechne $\det A$.

d) Finde die Lösung des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 3581 \\ 2094 \\ 2659 \\ 793.5 \end{pmatrix}$.

e) Mit einem Computer (etwa unter Verwendung von Mathematica) berechne genauere numerische Werte für die Beispiele c) und d) und vergleiche diese mit den bei diesen Beispielen bestimmten Ergebnissen.

20) Untersuche die folgenden Fragen für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 31 , \\ 3x_1 - x_2 &= 39 , \\ 3x_1 + 5x_2 &= -12 , \\ 5x_1 + 4x_2 &= 1 . \end{aligned}$$

a) Besitzt dieses Gleichungssystem eine (exakte) Lösung?

b) Was versteht man unter einer „besten Lösung" eines Gleichungssystems?

c) Finde die „beste Lösung" dieses Gleichungssystems.

21) Suche die „beste Lösung" des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12 , \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 , \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 &= 24 , \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 25 . \end{aligned}$$

22) Für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 12 , \\ 2x_1 + x_2 &= 15 , \\ x_1 - x_2 &= 13 , \\ 2x_1 - x_2 &= 16 , \\ 4x_1 - x_2 &= 20 , \\ 3x_1 - 2x_2 &= 1 , \end{aligned}$$

bestimme die „beste Lösung".

23) Von einer Funktion sind die Funktionswerte y_j an den Stellen x_j für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bekannt, wobei $n \geq 3$ (das bedeuted: $f(x_j) = y_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n$). Wir wollen diese Funktion durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 approximieren. Dabei suchen wir ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 2, sodass $\sum_{j=1}^{n} \big(p(x_j) - y_j\big)^2$ so klein wie möglich ist.

a) Beschreibe, wie man dabei vorgeht.
b) In der folgenden Tabelle findet man die Daten für eine Funktion, die an den Stellen -1, 0, 1, 3 und 7 bekannt ist.

j	1	2	3	4	5
x_j	-1	0	1	3	7
y_j	-33	15	37	-72	28

Finde in diesem konkreten Beispiel das oben beschriebene Polynom $p(x)$.

24) Finde die „beste Lösung“ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 32\,, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 28\,, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7\,, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

25) Bestimme die „beste Lösung“ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 22\,, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 16\,, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 67\,, \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 61\,. \end{aligned}$$

26) Berechne die „beste Lösung“ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 &= 43\,, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \phantom{{}+4x_5} &= 9\,, \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 25\,, \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 63\,, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 32\,, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -23\,, \\ 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &= 65\,. \end{aligned}$$

27) Betrachte das Polynom $p(x) := x^3 - 13x + 12$. Verwende das Horner-Schema um folgende Aufgaben zu lösen.
a) Berechne $p(2)$.
b) Finde ein Polynom $q(x)$ und eine Zahl a, sodass $p(x) = \big(x-2\big)q(x) + a$ gilt.
c) Bestimme die Nullstellen von p.

28) Für das Polynom $p(x) := 2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 8x + 3$ berechne den Funktionswert $p(7)$, sowie die Werte $p^{(n)}(7)$ der Ableitungen für $n \geq 1$. Weiters führe die Division mit Rest von $p(x)$ durch $(x-7)$ durch.

29) Es sei $p(x) := 5x^5 - 42x^4 + 54x^3 + 128x^2 - 99x - 126$.
a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ bestimme $p^{(n)}(1)$.
b) Finde die Nullstellen von p.
c) Führe die Division mit Rest von p durch $(x-1)$ durch.

30) Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynome.
a) $p(x) := x^5 + 31x^4 - 824x^2 + 2224x - 1680$.
b) $p(x) := 2x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 4$.
c) $p(x) := 24x^3 - 50x^2 - 23x + 21$.
d) $p(x) := 3x^4 - 17x^3 - x^2 + 65x - 50$.

31) Definiere $p(x) := x^6 - x^5 - 282x^4 + 1096x^3 + 32x^2 - 4368x + 4320$.
a) Bestimme die Werte $p^{(n)}(3)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
b) Führe die Division mit Rest von p durch $(x-3)$ durch.
c) Berechne die Nullstellen von p.

32) Bestimme die allgemeine Lösung von $\dot{x} = -3x + 4te^{-2t}\sin t$ mit Hilfe eines passenden Ansatzes.

33) Betrachte die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x + t^2e^{2t}\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$.
a) Zeige, dass die Funktion $x(t) = t^2e^{2t}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.
b) Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
c) Finde alle Lösungen dieser Differenzialgleichung, die $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ erfüllen.

34) Mit Hilfe eines passenden Ansatzes bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 6x + 8t^3e^{4t}$.

35) Verwende einen passenden Ansatz um die allgemeine Lösung von $\dot{x} = 4x + (2t+5)e^{4t}$ zu bestimmen.

36) Sei $a \in \mathbb{R}$, und $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seien Funktionen. Für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei x_j eine Lösung von $\dot{x} = ax + f_j$. Beweise, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Funktion $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ eine Lösung von $\dot{x} = ax + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$ ist.

37) Berechne die allgemeine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} -6 & 28 & 8 \\ -4 & 11 & -1 \\ 4 & -14 & -2 \end{pmatrix} x$.

38) Berechne die Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2e^{2t}\begin{pmatrix} 52 \\ -132 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

39) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2e^{5t}\begin{pmatrix} 356 \\ -495 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$.

40) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 13 & -11 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & -6 \\ -16 & 0 & 0 & 18 & -10 \\ -28 & 0 & 0 & 20 & -10 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

41) Löse das Differenzialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2\,,\ \dot{x}_2 = 5x_2 + x_3\,,\ \dot{x}_3 = 5x_3 + x_4\,,\ \dot{x}_4 = 5x_4\,,$$
$$x_1(0) = c_1\,,\ x_2(0) = c_2\,,\ x_3(0) = c_3\,,\ x_4(0) = c_4\,.$$

Wie sieht diese Differenzialgleichung in Vektorform aus?
Anleitung: Löse zuerst die letzte Gleichung, verwende diese Lösung um die vorletzte Gleichung zu lösen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis alle Gleichungen gelöst sind.

42) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + te^{3t} \begin{pmatrix} -38 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

43) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + te^{3t} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

44) Berechne die Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 48 & 21 & -39 \\ 18 & 5 & -13 \end{pmatrix} x + e^{3t}\cos(2t) \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

45) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -42 & 14 \end{pmatrix} x + e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}.$

46) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} x + t^2 e^{6t}\sin(2t) \begin{pmatrix} -125 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

47) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 52 \\ -2 & 17 \end{pmatrix} x + e^{7t}\sin(2t) \begin{pmatrix} 44 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

48) Löse die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -6 \\ 29 & -11 & 2 \\ -9 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + e^{-6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

49) Berechne die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6e^{5t} \\ e^t \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$

50) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x + e^{6t} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}.$

51) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + te^{2t} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

52) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + te^{2t} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

53) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -24 & 1 \end{pmatrix} x = 0\,.$$

54) Finde die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $x^{(3)} + 8\ddot{x} + \dot{x} - 42x = 0$.

55) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 23\ddot{x} - 62\dot{x} + 34x = 0 .$$

56) Betrachte die Differenzialgleichung $\ddot{x} + x = 0$.
a) Finde die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
b) Löse diese Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
c) Welche Lösung dieser Differenzialgleichung erfüllt $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$?

57) Für die Differenzialgleichung $\ddot{x} - x = 0$ löse folgende Aufgaben.
a) Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
b) Löse diese Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
c) Finde diejenige Lösung dieser Differenzialgleichung, für die $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt sind.

58) Berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 1258\, e^{3t} \sin(2t)$.
b) $x^{(3)} - \ddot{x} - 44\dot{x} + 84x = 60e^{3t}$.
c) $\ddot{x} - 3\dot{x} - 10x = 14e^{5t} - 10e^{3t}$.
d) $x^{(3)} - 19\ddot{x} + 135\dot{x} - 325x = 40e^{5t}$.
e) $x^{(4)} - x^{(3)} - 18\ddot{x} + 52\dot{x} - 40x = 20580\, t^2 e^{2t}$.

59) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x} - 11\dot{x} + 28x = 578\, te^{3t} \sin t$, $x(0) = 4$, $\dot{x}(0) = 3$.
b) $x^{(3)} - 17\ddot{x} + 116\dot{x} - 222x = 0$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 13$, $\ddot{x}(0) = -7$.
c) $x^{(3)} - \ddot{x} - 40\dot{x} + 112x = 726\, te^{4t}$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = -9$, $\ddot{x}(0) = 11$.
d) $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 7\, e^{2t}$, $x(0) = 7$, $\dot{x}(0) = 2$.

60) In gewissen physikalischen Systemen (Feder; Saite, die zum Schwingen gebracht werden soll; Brücke; ...) wirkt auf einen Massenpunkt, der aus der Ruhelage ausgelenkt wird, eine Kraft, die proportional zur Auslenkung ist und versucht ihn wieder in die Ruhelage zu bringen. Dadurch erfährt dieser Punkt eine Beschleunigung in Richtung der Ruhelage, die proportional zur Auslenkung ist (und umgekehrt proportional zur Masse). Ein eindimensionales Modell für den obigen Vorgang kann man folgendermaßen erhalten. Die Ruhelage sei in 0, die Position unseres Punktes zur Zeit t sei $x(t)$. Dann erhalten wir $\ddot{x}(t) = -ax(t)$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Finde eine Formel für $x(t)$.

61) Nehmen wir an auf das System aus Beispiel 60) wirkt eine äußere Schwingung ein. Um möglichst einfach zu bleiben sagen wir, es sei $b > 0$ und unsere Differenzialgleichung lautet jetzt $\ddot{x}(t) = -ax(t) + \sin(bt)$. Löse diese Differenzialgleichung. Gibt es gewisse Werte von b, bei denen sich die Lösung „dramatisch“ von den Lösungen für andere b unterscheidet? Was bedeutet das in der Praxis? Ändert sich prinzipiell etwas an der Lösung, wenn man die Störfunktion $\sin(bt)$ durch $\alpha_1 \cos(bt) + \alpha_2 \sin(bt)$ ersetzt?

62) Bei dem System in Beispiel 60) haben wir die Reibung nicht berücksichtigt. Diese Kraft wirkt proportional zur Geschwindigkeit und in die entgegengesetzte Richtung. Man erhält die Differenzialgleichung $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t)$, wobei auch $r \geq 0$ eine Konstante ist. Löse diese Differenzialgleichung.

63) Ähnlich wie in Beispiel 61) untersuchen wir jetzt das System aus Beispiel 62) unter einer äußeren Schwingung, also $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + \sin(bt)$. Was lässt sich über die Lösung sagen? Schließlich untersuche den Fall, dass es sich bei dem äußeren Einfluss um eine „gedämpfte Schwingung“ handelt, das heißt $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + e^{-dt}\sin(bt)$ für ein $d \geq 0$.

64) Finde die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 28x^2\cos(4t)$, $x(0) = \frac{1}{9}$.

65) Betrachte die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{36e^{2t}}{6x^2+1}$, $x(0) = 2$.

a) Bestimme die Lösung dieser Differenzialgleichung.

b) Zeige, dass $\left|\dfrac{36e^{2t}}{6x^2+1}\right| \leq 36e^{10} \leq 795\,000$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Verwende die Menge $\overline{B}(2, 100\,000\,000) \times [-5,5]$ um zu beweisen, dass diese Differenzialgleichung eine eindeutige Lösung auf $[-5,5]$ besitzt.

d) Zeige, dass die Lösung $\left|x(5)\right| \leq 4\,000\,000$ erfüllt. Ist es möglich diese Abschätzung zu beweisen ohne die Lösung dieser Differenzialgleichung zu kennen?

66) Für die Differenzialgleichung $\dot{x} = -\dfrac{3t\sin t^2}{x}$, $x(0) = 2$ löse die folgenden Aufgaben.

a) Zeige, dass $\left|-\dfrac{3t\sin t^2}{x}\right| \leq \dfrac{9}{5}$ für alle $(x,t) \in \overline{B}(2,1) \times \left[-\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5}\right]$ gilt.

b) Finde ein Intervall I, sodass die Differenzialgleichung auf I eine eindeutige Lösung hat (exakte Begründungen!).

67) Finde eine Lösung der Differenzialgleichung aus Beispiel 66).

68) Zwei Armeen kämpfen miteinander. Die Anzahl der KämpferInnen der ersten Armee zum Zeitpunkt t sei $x_1(t)$, jene der KämpferInnen der zweiten Armee zum Zeitpunkt t sei $x_2(t)$. Zum Zeitpunkt 0 habe die erste Armee ξ_1 KämpferInnen und die zweite Armee ξ_2 KämpferInnen, wobei $\xi_1 > 0$ und $\xi_2 > 0$ seien. Weiters seien $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$, und es gelten $\dot{x_1}(t) = -\alpha_2 x_2(t)$ und $\dot{x_2}(t) = -\alpha_1 x_1(t)$, soferne $x_1(t) > 0$ und $x_2(t) > 0$. Löse diese Differenzialgleichung. Interpretiere das Ergebnis.

69) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 6x^5t^2e^{t^3}$.

70) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{x}{1+t^2}$.

71) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{7t\sin t}{x^3}$, $x(0) = 3$.

72) Finde die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{7x}{t^2+3t-10}$, $x(1) = 3$.

73) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{4e^{-5x}}{t^2-6t+13}$.

74) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $(15x^2 \sin t - e^{3t})\dot{x} = 3xe^{3t} - 5x^3 \cos t$.

75) Bestimme die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{12e^{-4t} - 2te^x}{t^2 e^x}$.

76) Finde die orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar $y = cx$ (Geradenschar durch 0, die Gleichung kann man als $\frac{y}{x} = c$ schreiben).

77) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{7t^5 e^{t^7} - 6 \sin x}{3t \cos x}$.
Anleitung: Suche einen von x unabhängigen integrierenden Faktor.

78) Bestimme die Lösungen der Differenzialgleichung $(3 - 7xt^3)\dot{x} = 3x^2 t^2$.
Anleitung: Suche einen von t unabhängigen integrierenden Faktor.

79) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 3xt^2 - 18t^2 \sin t^3$.

80) Finde die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = -\dfrac{3x}{t} + \sin t$.

81) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} - 5x = 2250t^2 x^7$, $x(0) = 1$.
Hinweis: Bernoullische Differenzialgleichung.

82) Finde die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 12x + 9e^{2t}\sqrt[3]{x}$.
Hinweis: Bernoullische Differenzialgleichung.

83) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 14x \cos(2t) + 25t^4 e^{7\sin(2t)}$, $x(0) = 3$.

84) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} + t^2 x = 7t^5 x^4$, $x(0) = \frac{1}{2}$.
Hinweis: Bernoullische Differenzialgleichung.

85) Finde die Fixpunkte der Differenzialgleichung

$$\dot{x_1} = 10{x_2}^2 - 2x_1{x_2}^2 ,$$
$$\dot{x_2} = {x_1}^2 - 16x_2 + 7 .$$

Außerdem untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

86) Bestimme die Fixpunkte der Differenzialgleichung

$$\dot{x_1} = x_2 e^{x_1 - 7} - x_2 ,$$
$$\dot{x_2} = {x_1}^2 - 17x_2 + 155 .$$

Weiters untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

87) Von der Differenzialgleichung

$$\dot{x_1} = 4{x_1}^2 - {x_2}^2 - 99x_1 + 706 ,$$
$$\dot{x_2} = 2x_1 + x_2 - 19 ,$$

berechne die Fixpunkte und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

88) Betrachte die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= 27x_1 + 97e^{4x_2-12} - 20x_3 + 97\,,\\ \dot{x_2} &= 6 - 2x_2\,,\\ \dot{x_3} &= 48x_1 + 31{x_2}^2 - 35x_3 + 62\,.\end{aligned}$$

Berechne die Fixpunkte dieser Differenzialgleichung und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

89) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L^2, $f \in L^2$ und es gelte $f_n \to f$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$). Weiters sei $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx)$ die Fourierreihe von f und für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_0(n) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(n) \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(n) \sin(2\pi kx)$ die Fourierreihe von f_n. Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} a_k(n) = a_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{n\to\infty} b_k(n) = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$ gelten.
Anleitung: Ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ die Fourierreihe von f und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(n) e^{2\pi ikx}$ die Fourierreihe von f_n, dann ist die zu beweisende Aussage zu $\lim_{n\to\infty} c_k(n) = c_k$ für $k \in \mathbb{Z}$ äquivalent. Jetzt kann man $c_k = \langle f, e^{2\pi ikx}\rangle$ und $c_k(n) = \langle f_n, e^{2\pi ikx}\rangle$ verwenden.

90) Die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$ konvergiere in L^2 (das bedeutet bezüglich $\|.\|_2$). Es gibt also ein $f \in L^2$ mit $f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)\,.$
Bestimme die Fourierreihe von f.
Anleitung: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2\pi kx)\,.$ Berechne die Fourierreihe von f_n und verwende Beispiel 89).

91) Es konvergiere die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$ in L^2 (das bedeutet bezüglich $\|.\|_2$). Beweise, dass es ein $f \in L^2$ gibt, deren Fourierreihe gleich

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$$

ist.
Anleitung: Verwende Beispiel 90).

92) Betrachte die Funktion $f(x) := x\,.$
a) Berechne die Fourierreihe von f.
b) Konvergiert die Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)? Wenn sie (in L^2) konvergiert, gib ihren Grenzwert an.
c) Untersuche für welche x die Fourierreihe (punktweise) konvergiert.
d) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe in jenen Punkten, in denen sie zwar konvergiert, aber der Grenzwert ungleich $f(x)$ ist?
e) Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig? Soferne sie (gleichmäßig) konvergiert bestimme ihren Grenzwert.

93) Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x - x^2$.
- a) Bestimme die Fourierreihe von f.
- b) Untersuche die Konvergenz der Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$). Gib ihren Grenzwert an, falls sie (in L^2) konvergiert.
- c) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise)?
- d) Gib an für welche x die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$ konvergiert. Weiters finde jene Werte, gegen die die Fourierreihe in den Punkten konvergiert, in denen sie zwar konvergiert, aber der Grenzwert ungleich $f(x)$ ist.
- e) Ist die Fourierreihe sogar gleichmäßig konvergent? Im Falle der (gleichmäßigen) Konvergenz bestimme den Grenzwert.

94) a) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. b) Bestimme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Anleitung: Verwende Beispiel 93).

95) Für die folgenden Reihen untersuche, ob sie in L^2 (das bedeutet bezüglich $\|.\|_2$) konvergieren. Weiters gib jeweils an, ob es eine Funktion f in L^2 gibt, die diese Reihe als Fourierreihe hat.
- a) $-\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x)$.
- b) $\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x)$.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n x)$.
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sin(4\pi n x)$.

96) Betrachte die Funktion $f(x) := \sin x$.
- a) Finde die Fourierreihe von f.
- b) Ist die Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$) konvergent? Soferne sie (in L^2) konvergiert bestimme ihren Grenzwert.
- c) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$? Weiters gib für jene Punkte x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$, den Grenzwert der Fourierreihe an.
- d) Erhalten wir sogar gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe? Finde den Grenzwert, falls gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

97) Definiere die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x - \frac{1}{2}$.
- a) Berechne die Fourierreihe von f.
- b) Erhalten wir Konvergenz der Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)? Finde ihren Grenzwert, falls sie (in L^2) konvergiert.
- c) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$? Weiters gib für jene Punkte x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber der Grenzwert nicht $f(x)$ ist, an, gegen welchen Wert die Fourierreihe konvergiert.
- d) Untersuche die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe. Soferne sie (gleichmäßig) konvergiert bestimme ihren Grenzwert.

98) a) Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(2\pi n x)$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$) konvergiert.

b) Definiere $f \in L^2$ durch

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(2\pi n x) \ .$$

Wegen Beispiel a) gibt es so ein $f \in L^2$. Bestimme die Fourierreihe von f.
Hinweis: Verwende Beispiel 90).

c) Betrachte die Fourierreihe von f aus Beispiel b). Untersuche die Konvergenz dieser Fourierreihe an den Stellen 0 und $\frac{1}{2}$. Gib auch jeweils die Werte an, gegen die die Fourierreihe konvergiert.

99) Finde die Fourierreihen der folgenden Funktionen.

a) $\sin(2\pi x)$.
b) $3\cos(8\pi x)$.
c) $17\cos(756\pi x)$.
d) $1 + 3\cos(14\pi x) + 2\cos(4\pi x)$.
e) $2\cos(2\pi x) + 7\cos(4\pi x)$.
f) 7 .
g) $31 + 24\sin(8\pi x)\cos(8\pi x)$.
h) $8\cos(2\pi x) + 15\sin(4\pi x) + \sin(24\pi x)$.

100) Löse folgende Aufgaben für die Funktion $f(x) := \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

a) Berechne die Fourierreihe von f.

b) Konvergiert die Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)? Finde ihren Grenzwert, wenn sie (in L^2) konvergiert.

c) Bestimme diejenigen x, für die die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$ konvergiert. Für die Werte x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber der Grenzwert nicht $f(x)$ ist, gib an, gegen welchen Wert die Fourierreihe konvergiert.

d) Untersuche die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe (dabei ist der Grenzwert anzugeben, falls sie (gleichmäßig) konvergiert).

101) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x\ , & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0\ , & \text{falls } \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$ definiert.

a) Bestimme die Fourierreihe von f.

b) Untersuche die Konvergenz der Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$). Weiters gib ihren Grenzwert an, wenn sie (in L^2) konvergiert.

c) Finde diejenigen Punkte x, in denen die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$ konvergiert. Bei denjenigen x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber der Grenzwert ungleich $f(x)$ ist, gib an, gegen welchen Wert die Fourierreihe konvergiert.

d) Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig? Im Falle der (gleichmäßigen) Konvergenz bestimme ihren Grenzwert.

102) Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(2\pi n x)$.
Für die Lösung dieses Beispiels verwende den folgenden *Satz*, der vielleicht in der Analysis gemacht wurde:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leq C$ erfüllt ist.
Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

a) Zeige, dass die Reihe für alle $x \in [0,1]$ (punktweise) konvergiert.
Anleitung: Um zu zeigen, dass es eine Konstante C mit $\left|\sum_{j=1}^{n} \sin(2\pi j x)\right| \leq C$ gibt, verwende, dass $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ ($\operatorname{Im} z$ ist der Imaginärteil der komplexen Zahl z) und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

b) Konvergiert diese Reihe in L^2?

103) a) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L^2 (eigentlich: Repräsentanten von Elementen aus L^2), $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Zeige, dass $f_n \to f$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$) gilt.

b) Die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$ konvergiere gleichmäßig. Konvergiert sie auch in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)?

c) Konvergiert die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$), wenn sie punktweise konvergiert?

104) Für das Polynom aus Beispiel 27) führe das Newton-Verfahren durch.

a) Gib eine möglichst einfache Funktion an (bzw. gib eine möglichst einfache Rekursionsformel an), die das Newton-Verfahren für dieses Polynom beschreibt.

b) Führe einen Schritt des Newton-Verfahrens für den Startwert 0 durch (exakte Rechnung). Kann man bereits vermuten gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren für den Startwert 0 konvergiert?

c) Verwende einen Computer (etwa mit Mathematica) um das Newton-Verfahren für obiges Polynom mit dem Startwert 0 so lange durchzuführen, bis man den Grenzwert (die Nullstelle) auf 100 Stellen genau „erhält". Wie viele Iterationen benötigt man dafür?

105) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Verwende das Newton-Verfahren um eine Methode zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[5]{a}$ anzugeben.

106) Finde Näherungswerte für $\sqrt[5]{7}$ mit der in Beispiel 105) gewonnenen Methode unter Zuhilfenahme eines Computers (etwa mit Mathematica). Wie viele Iterationsschritte benötigt man, um das Ergebnis auf 10 Stellen, bzw. auf 100 Stellen genau zu erhalten?
Hinweis: Um unnötig lange Rechenzeiten zu vermeiden runde die Zwischenergebnisse auf 1000 Stellen, und um Platz zu sparen lass nicht mehr als 100 Stellen anzeigen.

107) Bestimme näherungsweise eine Nullstelle von $f(x) := e^{7x} + \sin x - 23000$. Verwende dazu die Startwerte 1 und 2. Welcher der beiden Startwerte ist der „Bessere“? Gib die Nullstelle auf 10 Stellen genau an.

108) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := e^x + 5x - \cos x - 1$ definiert.

a) Zeige, dass $\left|f'(x)\right| \geq 4$ und $\left|f''(x)\right| \leq 4$ für alle $x \in [-1, 1]$ gelten.

b) Beschreibe das Newton-Verfahren für f durch eine möglichst einfache Funktion (oder durch eine möglichst einfache Rekursionsformel).

c) Führe (mit exakten Rechnungen!) einen Schritt des Newton-Verfahrens für f mit dem Startwert 0 durch.

d) Betrachte den Startwert 0 und $\delta = 1$. Gib eine Abschätzung für die Abweichung des Wertes nach n Schritten des Newton-Verfahrens von der Nullstelle von f (ohne den exakten Wert dieser Nullstelle zu kennen!).

e) Unter Verwendung von Beispiel d) gib an, wieviele Schritte notwendig sind, um die Nullstelle von f auf 10, bzw. 100, bzw. 1000 Stellen genau zu bestimmen.

f) Verwende Beispiel d) und einen Computer (etwa mit Mathematica) um die Nullstelle von f auf mindestens 100 Stellen genau zu bestimmen.
Hinweis: Runde die Zwischenergebnisse auf 1000 Stellen um unnötig lange Rechenzeiten zu vermeiden.

109) Betrachte die Funktion $f(x) := 13x^4 - 113x^2 + 100$. Wende das Newton-Verfahren mit dem Startwert 2 auf diese Funktion an.

110) Analog zu Beispiel 105) gib ein Verfahren an, um $\sqrt[6]{11}$ näherungsweise zu bestimmen. Für den Startwert $\frac{3}{2}$ und $\delta = \frac{1}{2}$ finde Abschätzungen für den Fehler nach n Schritten (ohne den exakten Wert zu kennen!). Wieviele Schritte sind notwendig, um $\sqrt[6]{11}$ auf 10, bzw. 100, bzw. 1000 Stellen genau zu bestimmen? Bestimme $\sqrt[6]{11}$ auf mindestens 10 Stellen.

111) Betrachte die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{t\,x^6}{180}$, $x(0) = 2$. Es soll $x(1)$ bestimmt werden. Um dieses Beispiel zu lösen soll ein Computer verwendet werden, der Zahlen auf 3 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann, und der analog wie in Beispiel 6) beschrieben rechnet.

a) Zunächst verwende das Eulerverfahren mit 5 Schritten (also Schrittweite 0.2).

b) Dann verwende das Eulerverfahren mit 10 Schritten (also Schrittweite 0.1).

c) Schließlich verwende das Eulerverfahren mit 40 Schritten (also Schrittweite 0.025).

d) Bereits aus den oben durchgeführten Rechnungen kann man vermuten, welches der drei Ergebnisse am besten mit dem tatsächlichen Wert übereinstimmt. Welches? Versuche zu erklären, warum das so ist.

112) Es soll für die Differenzialgleichung $\dot{x} = 12\,t^{11}\,x^5 - 2\,t^3\,x$, $x(0) = \dfrac{1}{2}$ der Wert $x(1)$ numerisch bestimmt werden. Verwende dazu einen Computer, etwa mit Maxima, Mathematica oder Maple.
Hinweis: Für die Zwischenergebnisse verwende numerische Werte und runde diese auf 1000 Stellen.

a) Führe das Eulerverfahren mit 10, bzw. 100, bzw. 1000 Schritten durch.

b) Verwende das Heun-Verfahren mit 10, bzw. 100, bzw. 1000 Schritten.

c) Welchen Wert erhält man mit dem Runge-Kutta-Verfahren mit 10, bzw. 100, bzw. 1000 Schritten?

113) Für die Differenzialgleichung $\dot{x} = \frac{3}{8}\sqrt{t}\,x - \frac{1}{40}\,t^3 + \frac{4}{9}\,,\ x(0) = 3$ berechne numerisch den Wert $x(2)$. Dazu verwende einen Computer, etwa mit Maxima, Mathematica oder Maple.
Hinweis: Verwende numerische Werte für die Zwischenergebnisse und runde diese auf 1000 Stellen.

a) Berechne den gesuchten Wert mit Hilfe des Eulerverfahrens mit 10, bzw. 100, bzw. 1000 Schritten.

b) Führe das Heun-Verfahren mit 10, bzw. 100, bzw. 1000 Schritten durch.

c) Verwende das Runge-Kutta-Verfahren mit 10, bzw. 100, bzw. 1000 Schritten.