

Proseminar zu Differenzialgleichungen für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2015/2016

ARMIN RAINER
PETER RAITH

- 1) Bezeichnet man die zum Zeitpunkt t vorhandene Stoffmenge eines radioaktiven Stoffes mit $x(t)$, so lautet das *radioaktive Zerfallsgesetz* $\dot{x} = -kx$, wobei k eine vom Stoff abhängige Konstante ist (siehe Vorlesung). Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei x_0 . Als Halbwertszeit T des Stoffes wird jene Zeit bezeichnet, zu der nur mehr die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist, also $x(T) = \frac{x_0}{2}$ gilt.
 - a) Wie sieht die Lösung der obigen Differenzialgleichung aus (siehe Vorlesung)?
 - b) Zeige, dass $x(t + T) = \frac{x(t)}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wie kann man dieses Ergebnis interpretieren?
 - c) Finde eine Formel für die Halbwertszeit T , falls man k als bekannt voraussetzt.
 - d) Wenn die Halbwertszeit T bekannt ist, wie kann man k berechnen?
 - e) Wird man praktisch (also durch Messungen) eher k oder T feststellen können?
- 2) Ein (zu) einfaches Modell zum *Populationswachstum*: Mit $x(t)$ werde die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t bezeichnet. Man nimmt an, dass die Bevölkerungszunahme proportional zur vorhandenen Bevölkerung ist, also dass $\dot{x} = ax$ gilt. Berechne die Funktion $x(t)$. Was ergibt $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?
- 3) Löse die Differenzialgleichung: $\dot{x} = -6x + 15y$, $\dot{y} = 15x + 10y$, $x(0) = 19$ und $y(0) = 9$.
- 4) Bestimme alle Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ für die $\dot{x} = 17x - 4y$, $\dot{y} = 40x - 9y$, $x(0) = 0$ und $y(0) = 9$ gilt.
- 5) Betrachte die Differenzialgleichung $x\dot{x} = 6xt^3 + 3xt^2$. Zeige, dass die durch $x(t) = 7t^3$ definierte Funktion eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.
- 6) Beweise, dass die Funktion $x(t) = e^{2t} \sin t - 2e^{3t} + (t + 2)e^{5t}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $x^{(3)} = 9\ddot{x} - 25\dot{x} + 25x + 8e^{3t} + 10e^{5t}$ ist.

- 20) Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$.
- Zeige, dass die Funktion $x(t) = t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.
 - Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
 - Finde alle Lösungen dieser Differentialgleichung, die $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ erfüllen.
- 21) Sei $a \in \mathbb{R}$, und f_1, f_2, \dots, f_n seien Funktionen. Für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sei x_j eine Lösung von $\dot{x} = ax + f_j$. Beweise, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Funktion $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ eine Lösung von $\dot{x} = ax + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ ist.
- 22) Unter Verwendung eines passenden Ansatzes bestimme die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen in Beispiel 16).
Anleitung: Um c) zu lösen ziehe die Lösungen von a) und b) heran und verwende Beispiel 21).
- 23) Berechne die allgemeine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} -6 & 28 & 8 \\ -4 & 11 & -1 \\ 4 & -14 & -2 \end{pmatrix} x$.
- 24) Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 + x_2, & \dot{x}_2 &= 5x_2 + x_3, & \dot{x}_3 &= 5x_3 + x_4, & \dot{x}_4 &= 5x_4, \\ x_1(0) &= c_1, & x_2(0) &= c_2, & x_3(0) &= c_3, & x_4(0) &= c_4. \end{aligned}$$
 Wie sieht diese Differentialgleichung in Vektorform aus?
Anleitung: Löse zuerst die letzte Gleichung, verwende diese Lösung um die vorletzte Gleichung zu lösen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis alle Gleichungen gelöst sind.
- 25) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x + e^{6t} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}$.
- 26) Berechne die Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 52 \\ -132 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.
- 27) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2 e^{5t} \begin{pmatrix} 356 \\ -495 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- 28) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 13 & -11 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & -6 \\ -16 & 0 & 0 & 18 & -10 \\ -28 & 0 & 0 & 20 & -10 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
- 29) Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + t e^{3t} \begin{pmatrix} -38 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

30) Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + te^{3t} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

31) Berechne die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 48 & 21 & -39 \\ 18 & 5 & -13 \end{pmatrix} x + e^{3t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

32) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} x + t^2 e^{6t} \sin(2t) \begin{pmatrix} -125 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

33) Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + te^{2t} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

34) Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + te^{2t} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

35) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 52 \\ -2 & 17 \end{pmatrix} x + e^{7t} \sin(2t) \begin{pmatrix} 44 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

36) Berechne die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6e^{5t} \\ e^t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

37) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -42 & 14 \end{pmatrix} x + e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$.

38) Löse die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -6 \\ 29 & -11 & 2 \\ -9 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + e^{-6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

39) Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x^{(3)} + 8\ddot{x} + \dot{x} - 42x = 0$.

40) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 23\ddot{x} - 62\dot{x} + 34x = 0.$$

41) Betrachte die Differentialgleichung $\ddot{x} + x = 0$.

- Finde die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
- Löse diese Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
- Welche Lösung dieser Differentialgleichung erfüllt $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$?

42) Für die Differentialgleichung $\ddot{x} - x = 0$ löse folgende Aufgaben.

- Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
- Löse diese Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
- Finde diejenige Lösung dieser Differentialgleichung, für die $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt sind.

- 43) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -24 & 1 \end{pmatrix} x = 0.$$

- 44) Berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen.

a) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 1258 e^{3t} \sin(2t).$ b) $x^{(3)} - \ddot{x} - 44\dot{x} + 84x = 60e^{3t}.$
 c) $\ddot{x} - 3\dot{x} - 10x = 14e^{5t} - 10e^{3t}.$ d) $x^{(3)} - 19\ddot{x} + 135\dot{x} - 325x = 40e^{5t}.$
 e) $x^{(4)} - x^{(3)} - 18\ddot{x} + 52\dot{x} - 40x = 20580 t^2 e^{2t}.$

- 45) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.

a) $\ddot{x} - 11\dot{x} + 28x = 578 te^{3t} \sin t, x(0) = 4, \dot{x}(0) = 3.$
 b) $x^{(3)} - 17\ddot{x} + 116\dot{x} - 222x = 0, x(0) = 2, \dot{x}(0) = 13, \ddot{x}(0) = -7.$
 c) $x^{(3)} - \ddot{x} - 40\dot{x} + 112x = 726 te^{4t}, x(0) = 2, \dot{x}(0) = -9, \ddot{x}(0) = 11.$
 d) $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 7e^{2t}, x(0) = 7, \dot{x}(0) = 2.$

- 46) In gewissen physikalischen Systemen (Feder; Saite, die zum Schwingen gebracht werden soll; Brücke; ...) wirkt auf einen Massenpunkt, der aus der Ruhelage ausgelenkt wird, eine Kraft, die proportional zur Auslenkung ist und versucht ihn wieder in die Ruhelage zu bringen. Dadurch erfährt dieser Punkt eine Beschleunigung in Richtung der Ruhelage, die proportional zur Auslenkung ist (und umgekehrt proportional zur Masse). Ein eindimensionales Modell für den obigen Vorgang kann man folgendermaßen erhalten. Die Ruhelage sei in 0, die Position unseres Punktes zur Zeit t sei $x(t)$. Dann erhalten wir $\ddot{x}(t) = -ax(t)$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Finde eine Formel für $x(t)$.

- 47) Nehmen wir an auf das System aus Beispiel 46) wirkt eine äußere Schwingung ein. Um möglichst einfach zu bleiben sagen wir, es sei $b > 0$ und unsere Differenzialgleichung lautet jetzt $\ddot{x}(t) = -ax(t) + \sin(bt)$. Löse diese Differenzialgleichung. Gibt es gewisse Werte von b , bei denen sich die Lösung „dramatisch“ von den Lösungen für andere b unterscheidet? Was bedeutet das in der Praxis? Ändert sich prinzipiell etwas an der Lösung, wenn man die Störfunktion $\sin(bt)$ durch $\alpha_1 \cos(bt) + \alpha_2 \sin(bt)$ ersetzt?

- 48) Bei dem System in Beispiel 46) haben wir die Reibung nicht berücksichtigt. Diese Kraft wirkt proportional zur Geschwindigkeit und in die entgegengesetzte Richtung. Man erhält die Differenzialgleichung $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t)$, wobei auch $r \geq 0$ eine Konstante ist. Löse diese Differenzialgleichung.

- 49) Ähnlich wie in Beispiel 47) untersuchen wir jetzt das System aus Beispiel 48) unter einer äußeren Schwingung, also $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + \sin(bt)$. Was lässt sich über die Lösung sagen? Schließlich untersuche den Fall, dass es sich bei dem äußeren Einfluss um eine „gedämpfte Schwingung“ handelt, das heißt $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + e^{-dt} \sin(bt)$ für ein $d \geq 0$.

- 50) Finde die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 28x^2 \cos(4t), x(0) = \frac{1}{9}$.

- 51) Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{36e^{2t}}{6x^2 + 1}$, $x(0) = 2$.
- Bestimme die Lösung dieser Differentialgleichung.
 - Zeige, dass $\left| \frac{36e^{2t}}{6x^2 + 1} \right| \leq 36e^{10} \leq 795\,000$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
 - Verwende die Menge $\overline{B}(2, 100\,000\,000) \times [-5, 5]$ um zu beweisen, dass diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung auf $[-5, 5]$ besitzt.
 - Zeige, dass die Lösung $|x(5)| \leq 4\,000\,000$ erfüllt. Ist es möglich diese Abschätzung zu beweisen ohne die Lösung dieser Differentialgleichung zu kennen?
- 52) Zwei Armeen kämpfen miteinander. Die Anzahl der KämpferInnen der ersten Armee zum Zeitpunkt t sei $x_1(t)$, jene der KämpferInnen der zweiten Armee zum Zeitpunkt t sei $x_2(t)$. Zum Zeitpunkt 0 habe die erste Armee ξ_1 KämpferInnen und die zweite Armee ξ_2 KämpferInnen, wobei $\xi_1 > 0$ und $\xi_2 > 0$ seien. Weiters seien $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$, und es gelten $\dot{x}_1(t) = -\alpha_2 x_2(t)$ und $\dot{x}_2(t) = -\alpha_1 x_1(t)$, sofern $x_1(t) > 0$ und $x_2(t) > 0$. Löse diese Differentialgleichung. Interpretiere das Ergebnis.
- 53) Für die Differentialgleichung $\dot{x} = -\frac{3t \sin t^2}{x}$, $x(0) = 2$ löse die folgenden Aufgaben.
- Zeige, dass $\left| -\frac{3t \sin t^2}{x} \right| \leq \frac{9}{5}$ für alle $(x, t) \in \overline{B}(2, 1) \times \left[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right]$ gilt.
 - Finde ein Intervall I , sodass die Differentialgleichung auf I eine eindeutige Lösung hat (exakte Begründungen!).
- 54) Finde eine Lösung der Differentialgleichung aus Beispiel 53).
- 55) Berechne die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = 6x^5 t^2 e^{t^3}$.
- 56) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{x}{1 + t^2}$.
- 57) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{7t \sin t}{x^3}$, $x(0) = 3$.
- 58) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{4e^{-5x}}{t^2 - 6t + 13}$.
- 59) Berechne die Lösungen der Differentialgleichung $(15x^2 \sin t - e^{3t})\dot{x} = 3xe^{3t} - 5x^3 \cos t$.
- 60) Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{12e^{-4t} - 2te^x}{t^2 e^x}$.
- 61) Finde die orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar $y = cx$ (Geradenschar durch 0, die Gleichung kann man als $\frac{y}{x} = c$ schreiben).
- 62) Finde die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{7x}{t^2 + 3t - 10}$, $x(1) = 3$.

- 63) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{7t^5 e^{t^7} - 6 \sin x}{3t \cos x}$.
Anleitung: Suche einen von x unabhängigen integrierenden Faktor.
- 64) Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung $(3 - 7xt^3)\dot{x} = 3x^2 t^2$.
Anleitung: Suche einen von t unabhängigen integrierenden Faktor.
- 65) Berechne die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = 3xt^2 - 18t^2 \sin t^3$.
- 66) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = 14x \cos(2t) + 25t^4 e^{7 \sin(2t)}$, $x(0) = 3$.
- 67) Finde die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = -\frac{3x}{t} + \sin t$.
- 68) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} + t^2 x = 7t^5 x^4$, $x(0) = \frac{1}{2}$.
Hinweis: Bernoullische Differentialgleichung.
- 69) Finde die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = 12x + 9e^{2t} \sqrt[3]{x}$.
Hinweis: Bernoullische Differentialgleichung.
- 70) Von der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1^2 - x_2^2 - 99x_1 + 706, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - 19, \end{aligned}$$
 berechne die Fixpunkte und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.
- 71) Berechne die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} - 5x = 2250t^2 x^7$, $x(0) = 1$.
Hinweis: Bernoullische Differentialgleichung.
- 72) Bestimme die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 e^{x_1 - 7} - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 17x_2 + 155. \end{aligned}$$
 Weiters untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.
- 73) Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 27x_1 + 97e^{4x_2 - 12} - 20x_3 + 97, \\ \dot{x}_2 &= 6 - 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 48x_1 + 31x_2^2 - 35x_3 + 62. \end{aligned}$$
 Berechne die Fixpunkte dieser Differentialgleichung und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.
- 74) Finde die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10x_2^2 - 2x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 16x_2 + 7. \end{aligned}$$
 Außerdem untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

- 75) Betrachte die Funktion $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $Tz := z^2$.
- Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n z = 0$ für alle z mit $|z| < 1$ gilt.
 - Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n z = \infty$ für alle z mit $|z| > 1$ gilt.
 - Bestimme alle Fixpunkte von T . Welche davon sind stabil, welche nicht stabil?
 - Bestimme die Menge aller Punkte, deren ω -Limes kein stabiler Fixpunkt ist.
- 76) Wie in Beispiel 75) sei $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch $Tz := z^2$ definiert. Wie groß ist die topologische Entropie von T .
- 77) Definiere die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$Tx := \begin{cases} 1 - 2x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ 2x - \frac{1}{3}, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{17}{9} - \frac{4}{3}x, & \text{für } x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{11}{12}\right], \\ \frac{4}{3}x - \frac{5}{9}, & \text{für } x \in \left[\frac{11}{12}, 1\right]. \end{cases}$$

Diese Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt.

- Bestimme die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T)$.
- Gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?
- Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

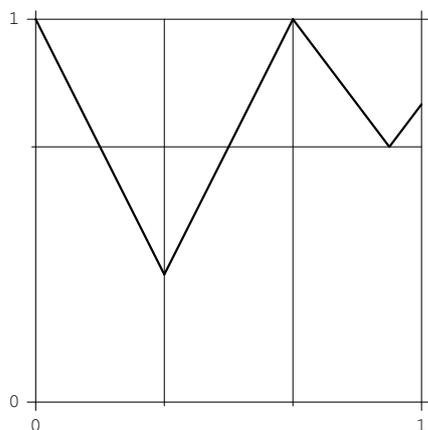


Abbildung 1. Die Abbildung T aus Beispiel 77).

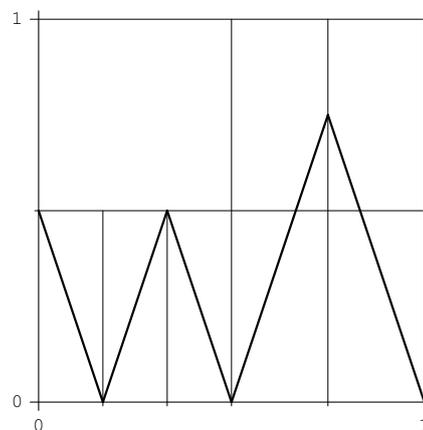


Abbildung 2. Die Abbildung T aus Beispiel 78).

- 78) Die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sei durch

$$Tx := \begin{cases} \frac{1}{2} - 3x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{6}\right], \\ 3x - \frac{1}{2}, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{3}{2} - 3x, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \\ 3x - \frac{3}{2}, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ 3 - 3x, & \text{für } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases}$$

definiert (siehe Abbildung 2).

- a) Bestimme die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T)$.
- b) Gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?
- c) Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

79) Betrachte die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, die durch

$$Tx := \begin{cases} 1 - 3x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{7}{4}x - \frac{7}{12}, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right], \\ \frac{7}{2} - \frac{7}{2}x, & \text{für } x \in \left[\frac{7}{9}, 1\right], \end{cases}$$

definiert ist (siehe Abbildung 3). Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

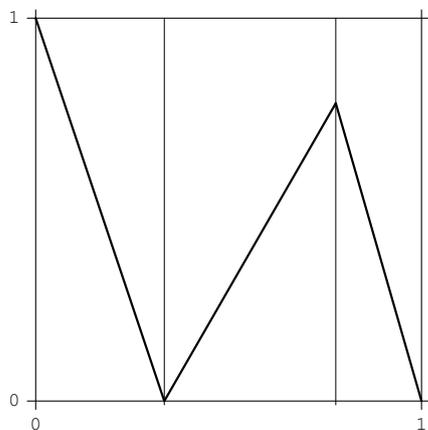


Abbildung 3. Die Abbildung T aus Beispiel 79).

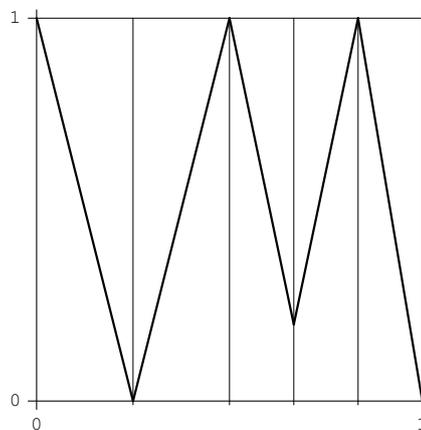


Abbildung 4. Die Abbildung T aus Beispiel 80).

80) Definiere die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch (siehe Abbildung 4)

$$Tx := \begin{cases} 1 - 4x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 4x - 1, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{17}{5} - \frac{24}{5}x, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{24}{5}x - 3, & \text{für } x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right], \\ 6 - 6x, & \text{für } x \in \left[\frac{5}{6}, 1\right]. \end{cases}$$

- a) Gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?
- b) Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?