# Proseminar zu Differenzialgleichungen für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

*Wintersemester 2011/2012*

Peter Raith

1) Bezeichnet man die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Stoffmenge eines radioaktiven Stoffes mit $x(t)$, so lautet das *radioaktive Zerfallsgesetz* $\dot{x} = -kx$, wobei $k$ eine vom Stoff abhängige Konstante ist (siehe Vorlesung). Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei $x_0$. Als Halbwertszeit $T$ des Stoffes wird jene Zeit bezeichnet, zu der nur mehr die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist, also $x(T) = \frac{x_0}{2}$ gilt.
   a) Wie sieht die Lösung der obigen Differenzialgleichung aus (siehe Vorlesung)?
   b) Zeige, dass $x(t+T) = \frac{x(t)}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wie kann man dieses Ergebnis interpretieren?
   c) Finde eine Formel für die Halbwertszeit $T$, falls man $k$ als bekannt voraussetzt.
   d) Wenn die Halbwertszeit $T$ bekannt ist, wie kann man $k$ berechnen?
   e) Wird man praktisch (also durch Messungen) eher $k$ oder $T$ feststellen können?

2) Ein (zu) einfaches Modell zum *Populationswachstum*: Mit $x(t)$ werde die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt $t$ bezeichnet. Man nimmt an, dass die Bevölkerungszunahme proportional zur vorhandenen Bevölkerung ist, also dass $\dot{x} = ax$ gilt. Berechne die Funktion $x(t)$. Was ergibt $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$?

3) Löse die Differenzialgleichung: $\dot{x} = -6x + 15y$, $\dot{y} = 15x + 10y$, $x(0) = 19$ und $y(0) = 9$.

4) Bestimme alle Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ für die $\dot{x} = 17x - 4y$, $\dot{y} = 40x - 9y$, $x(0) = 0$ und $y(0) = 9$ gilt.

5) Löse die Differenzialgleichung: $\dot{x} = -x - 3y$, $\dot{y} = -12x + 4y$, $x(0) = 8$ und $y(0) = 2$.

6) Betrachte die Differenzialgleichung $x\dot{x} = 6\dot{x}t^3 + 3xt^2$. Zeige, dass die durch $x(t) = 7t^3$ definierte Funktion eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

7) Beweise, dass die Funktion $x(t) = e^{2t}\sin t - 2e^{3t} + (t+2)e^{5t}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $x^{(3)} = 9\ddot{x} - 25\dot{x} + 25x + 8e^{3t} + 10e^{5t}$ ist.

8) Die Funktion $x : (-\infty, 5) \to \mathbb{R}$ sei durch $x(t) := \dfrac{1}{t-5}$ definiert. Zeige, dass $x$ eine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = -x^2$ ist.

9) Betrachte die *Wellengleichung* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Zeige, dass die durch $u(x,t) = x^2 + c^2t^2$ definierte Funktion eine Lösung der Wellengleichung ist.

10) Die Funktion $u$ sei durch $u(x,t) = \sin x\, \cos(ct)$ definiert. Beweise, dass $u$ eine Lösung der *Wellengleichung* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ist.

11) Zeige, dass die durch $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$ definierte Funktion eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung* $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ist.

12) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = t^7 \sin t^4$, $x(0) = 0$.

13) Mit Hilfe der „Variation der Konstanten“ bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 3x + 8e^{7t}$.

14) Bestimme die Lösung der folgenden Differenzialgleichungen mit Hilfe der „Variation der Konstanten“.
a) $\dot{x} = -5x + 8e^{-3t}$, $x(0) = 7$.
b) $\dot{x} + 6x = 4e^{-6t}$, $x(0) = 5$.

15) Verwende die Methode der „Variation der Konstanten“ um die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 4x + 10e^{5t}\cos 3t$ zu bestimmen.

16) Die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen ist mit Hilfe der „Variation der Konstanten“ zu bestimmen.
a) $\dot{x} = 5x + 6e^{7t}$.
b) $\dot{x} = 5x - 8e^{-3t}$.
c) $\dot{x} = 5x + 6e^{7t} - 8e^{-3t}$.
d) Besteht ein Zusammenhang der Lösungen von Beispiel a), b) und c)?

17) Bestimme die allgemeine Lösung von $\dot{x} = -3x + 4te^{-2t}\sin t$ mit Hilfe eines passenden Ansatzes.

18) Mit Hilfe eines passenden Ansatzes bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 6x + 8t^3e^{4t}$.

19) Verwende einen passenden Ansatz um die allgemeine Lösung von $\dot{x} = 4x + (2t+5)e^{4t}$ zu bestimmen.

20) Sei $a \in \mathbb{R}$, und $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seien Funktionen. Für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $x_j$ eine Lösung von $\dot{x} = ax + f_j$. Beweise, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Funktion $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ eine Lösung von $\dot{x} = ax + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$ ist.

21) Unter Verwendung eines passenden Ansatzes bestimme die allgemeinen Lösungen der Differenzialgleichungen in Beispiel 16).
*Anleitung*: Um c) zu lösen ziehe die Lösungen von a) und b) heran und verwende Beispiel 20).

22) Betrachte die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$.
  a) Zeige, dass die Funktion $x(t) = t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.
  b) Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
  c) Finde alle Lösungen dieser Differenzialgleichung, die $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ erfüllen.

23) Berechne die allgemeine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} -6 & 28 & 8 \\ -4 & 11 & -1 \\ 4 & -14 & -2 \end{pmatrix} x$.

24) Löse das Differenzialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2\,,\ \dot{x}_2 = 5x_2 + x_3\,,\ \dot{x}_3 = 5x_3 + x_4\,,\ \dot{x}_4 = 5x_4\,,$$
$$x_1(0) = c_1\,,\ x_2(0) = c_2\,,\ x_3(0) = c_3\,,\ x_4(0) = c_4\,.$$

Wie sieht diese Differenzialgleichung in Vektorform aus?
*Anleitung*: Löse zuerst die letzte Gleichung, verwende diese Lösung um die vorletzte Gleichung zu lösen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis alle Gleichungen gelöst sind.

25) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 13 & -11 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & -6 \\ -16 & 0 & 0 & 18 & -10 \\ -28 & 0 & 0 & 20 & -10 \end{pmatrix} x\,, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

26) Berechne die Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 52 \\ -132 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

27) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2 e^{5t} \begin{pmatrix} 356 \\ -495 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$.

28) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + t e^{3t} \begin{pmatrix} -38 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

29) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + t e^{3t} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

30) Berechne die Lösung der Differenzialgleichung
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 48 & 21 & -39 \\ 18 & 5 & -13 \end{pmatrix} x + e^{3t}\cos(2t)\begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

31) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x + e^{6t}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}$.

32) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -42 & 14 \end{pmatrix} x + e^{-4t}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$.

33) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} x + t^2 e^{6t}\sin(2t)\begin{pmatrix} -125 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

34) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + te^{2t}\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

35) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + te^{2t}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

36) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 52 \\ -2 & 17 \end{pmatrix} x + e^{7t}\sin(2t)\begin{pmatrix} 44 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

37) Berechne die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6e^{5t} \\ e^t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

38) Löse die Differenzialgleichung
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -6 \\ 29 & -11 & 2 \\ -9 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + e^{-6t}\begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

39) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$\ddot{x} + \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -24 & 1 \end{pmatrix} x = 0.$$

40) Finde die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $x^{(3)} + 8\ddot{x} + \dot{x} - 42x = 0$.

41) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 23\ddot{x} - 62\dot{x} + 34x = 0.$$

42) Betrachte die Differenzialgleichung $\ddot{x} + x = 0$.
 a) Finde die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
 b) Löse diese Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
 c) Welche Lösung dieser Differenzialgleichung erfüllt $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$?

43) Für die Differenzialgleichung $\ddot{x} - x = 0$ löse folgende Aufgaben.
 a) Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
 b) Löse diese Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
 c) Finde diejenige Lösung dieser Differenzialgleichung, für die $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt sind.

44) Berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen.

a) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 1258\, e^{3t} \sin(2t)$.

b) $x^{(3)} - \ddot{x} - 44\dot{x} + 84x = 60e^{3t}$.

c) $\ddot{x} - 3\dot{x} - 10x = 14e^{5t} - 10e^{3t}$.

d) $x^{(3)} - 19\ddot{x} + 135\dot{x} - 325x = 40e^{5t}$.

e) $x^{(4)} - x^{(3)} - 18\ddot{x} + 52\dot{x} - 40x = 20580\, t^2 e^{2t}$.

45) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.

a) $\ddot{x} - 11\dot{x} + 28x = 578\, te^{3t} \sin t\,,\ x(0) = 4\,,\ \dot{x}(0) = 3$.

b) $x^{(3)} - 17\ddot{x} + 116\dot{x} - 222x = 0\,,\ x(0) = 2\,,\ \dot{x}(0) = 13\,,\ \ddot{x}(0) = -7$.

c) $x^{(3)} - \ddot{x} - 40\dot{x} + 112x = 726\, te^{4t}\,,\ x(0) = 2\,,\ \dot{x}(0) = -9\,,\ \ddot{x}(0) = 11$.

d) $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 7\, e^{2t}\,,\ x(0) = 7\,,\ \dot{x}(0) = 2$.

46) In gewissen physikalischen Systemen (Feder; Saite, die zum Schwingen gebracht werden soll; Brücke; ...) wirkt auf einen Massenpunkt, der aus der Ruhelage ausgelenkt wird, eine Kraft, die proportional zur Auslenkung ist und versucht ihn wieder in die Ruhelage zu bringen. Dadurch erfährt dieser Punkt eine Beschleunigung in Richtung der Ruhelage, die proportional zur Auslenkung ist (und umgekehrt proportional zur Masse). Ein eindimensionales Modell für den obigen Vorgang kann man folgendermaßen erhalten. Die Ruhelage sei in 0, die Position unseres Punktes zur Zeit $t$ sei $x(t)$. Dann erhalten wir $\ddot{x}(t) = -ax(t)$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Finde eine Formel für $x(t)$.

47) Nehmen wir an auf das System aus Beispiel 46) wirkt eine äußere Schwingung ein. Um möglichst einfach zu bleiben sagen wir, es sei $b > 0$ und unsere Differenzialgleichung lautet jetzt $\ddot{x}(t) = -ax(t) + \sin(bt)$. Löse diese Differenzialgleichung. Gibt es gewisse Werte von $b$, bei denen sich die Lösung „dramatisch“ von den Lösungen für andere $b$ unterscheidet? Was bedeutet das in der Praxis? Ändert sich prinzipiell etwas an der Lösung, wenn man die Störfunktion $\sin(bt)$ durch $\alpha_1 \cos(bt) + \alpha_2 \sin(bt)$ ersetzt?

48) Bei dem System in Beispiel 46) haben wir die Reibung nicht berücksichtigt. Diese Kraft wirkt proportional zur Geschwindigkeit und in die entgegengesetzte Richtung. Man erhält die Differenzialgleichung $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t)$, wobei auch $r \geq 0$ eine Konstante ist. Löse diese Differenzialgleichung.

49) Ähnlich wie in Beispiel 47) untersuchen wir jetzt das System aus Beispiel 48) unter einer äußeren Schwingung, also $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + \sin(bt)$. Was lässt sich über die Lösung sagen? Schließlich untersuche den Fall, dass es sich bei dem äußeren Einfluss um eine „gedämpfte Schwingung“ handelt, das heißt $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + e^{-dt} \sin(bt)$ für ein $d \geq 0$.

50) Zwei Armeen kämpfen miteinander. Die Anzahl der KämpferInnen der ersten Armee zum Zeitpunkt $t$ sei $x_1(t)$, jene der KämpferInnen der zweiten Armee zum Zeitpunkt $t$ sei $x_2(t)$. Zum Zeitpunkt 0 habe die erste Armee $\xi_1$ KämpferInnen und die zweite Armee $\xi_2$ KämpferInnen, wobei $\xi_1 > 0$ und $\xi_2 > 0$ seien. Weiters seien $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$, und es gelten $\dot{x_1}(t) = -\alpha_2 x_2(t)$ und $\dot{x_2}(t) = -\alpha_1 x_1(t)$, soferne $x_1(t) > 0$ und $x_2(t) > 0$. Löse diese Differenzialgleichung. Interpretiere das Ergebnis.

51) Finde die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 28x^2 \cos(4t)\,,\ x(0) = \frac{1}{9}$.

52) Betrachte die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{36e^{2t}}{6x^2+1}\,,\ x(0) = 2\,.$

a) Bestimme die Lösung dieser Differenzialgleichung.

b) Zeige, dass $\left|\dfrac{36e^{2t}}{6x^2+1}\right| \leq 36e^{10} \leq 795\,000$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Verwende die Menge $\overline{B}(2, 100\,000\,000) \times [-5, 5]$ um zu beweisen, dass diese Differenzialgleichung eine eindeutige Lösung auf $[-5, 5]$ besitzt.

d) Zeige, dass die Lösung $\big|x(5)\big| \leq 4\,000\,000$ erfüllt. Ist es möglich diese Abschätzung zu beweisen ohne die Lösung dieser Differenzialgleichung zu kennen?

53) Für die Differenzialgleichung $\dot{x} = -\dfrac{3t\sin t^2}{x}\,,\ x(0) = 2$ löse die folgenden Aufgaben.

a) Zeige, dass $\left|-\dfrac{3t\sin t^2}{x}\right| \leq \dfrac{9}{5}$ für alle $(x, t) \in \overline{B}(2, 1) \times \left[-\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5}\right]$ gilt.

b) Finde ein Intervall $I$, sodass die Differenzialgleichung auf $I$ eine eindeutige Lösung hat (exakte Begründungen!).

54) Finde eine Lösung der Differenzialgleichung aus Beispiel 53).

55) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 6x^5t^2e^{t^3}\,.$

56) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{x}{1+t^2}\,.$

57) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{7t\sin t}{x^3}\,,\ x(0) = 3\,.$

58) Finde die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{7x}{t^2+3t-10}\,,\ x(1) = 3\,.$

59) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{4e^{-5x}}{t^2-6t+13}\,.$

60) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $(15x^2\sin t - e^{3t})\dot{x} = 3xe^{3t} - 5x^3\cos t\,.$

61) Bestimme die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{12e^{-4t} - 2te^x}{t^2e^x}\,.$

62) Finde die orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar $y = cx$ (Geradenschar durch 0, die Gleichung kann man als $\frac{y}{x} = c$ schreiben).

63) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \dfrac{7t^5e^{t^7} - 6\sin x}{3t\cos x}\,.$
*Anleitung*: Suche einen von $x$ unabhängigen integrierenden Faktor.

64) Bestimme die Lösungen der Differenzialgleichung $(3 - 7xt^3)\dot{x} = 3x^2t^2\,.$
*Anleitung*: Suche einen von $t$ unabhängigen integrierenden Faktor.

65) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 3xt^2 - 18t^2 \sin t^3$.

66) Finde die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = -\frac{3x}{t} + \sin t$.

67) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 14x\cos(2t) + 25t^4 e^{7\sin(2t)}$, $x(0) = 3$.

68) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} + t^2 x = 7t^5 x^4$, $x(0) = \frac{1}{2}$.
*Hinweis*: Bernoullische Differenzialgleichung.

69) Finde die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 12x + 9e^{2t}\sqrt[3]{x}$.
*Hinweis*: Bernoullische Differenzialgleichung.

70) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} - 5x = 2250t^2x^7$, $x(0) = 1$.
*Hinweis*: Bernoullische Differenzialgleichung.

71) Bestimme die Fixpunkte der Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 e^{x_1 - 7} - x_2\,, \\ \dot{x_2} &= {x_1}^2 - 17x_2 + 155\,. \end{aligned}$$

Weiters untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

72) Von der Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 4{x_1}^2 - {x_2}^2 - 99x_1 + 706\,, \\ \dot{x_2} &= 2x_1 + x_2 - 19\,, \end{aligned}$$

berechne die Fixpunkte und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

73) Betrachte die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 27x_1 + 97e^{4x_2 - 12} - 20x_3 + 97\,, \\ \dot{x_2} &= 6 - 2x_2\,, \\ \dot{x_3} &= 48x_1 + 31{x_2}^2 - 35x_3 + 62\,. \end{aligned}$$

Berechne die Fixpunkte dieser Differenzialgleichung und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

74) Finde die Fixpunkte der Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 10{x_2}^2 - 2x_1{x_2}^2\,, \\ \dot{x_2} &= {x_1}^2 - 16x_2 + 7\,. \end{aligned}$$

Außerdem untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

75) Betrachte die Funktion $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $Tz := z^2$.
a) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} T^n z = 0$ für alle $z$ mit $|z| < 1$ gilt.
b) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} T^n z = \infty$ für alle $z$ mit $|z| > 1$ gilt.
c) Bestimme alle Fixpunkte von $T$. Welche davon sind stabil, welche nicht stabil?
d) Bestimme die Menge aller Punkte, deren $\omega$-Limes kein stabiler Fixpunkt ist.

76) Wie in Beispiel 75) sei $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch $Tz := z^2$ definiert. Wie groß ist die topologische Entropie von $T$.

77) Definiere die Abbildung $T : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$Tx := \begin{cases} 1 - 2x\,, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ 2x - \frac{1}{3}\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{17}{9} - \frac{4}{3}x\,, & \text{für } x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{11}{12}\right], \\ \frac{4}{3}x - \frac{5}{9}\,, & \text{für } x \in \left[\frac{11}{12}, 1\right]. \end{cases}$$

Diese Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt.

a) Bestimme die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T)$.

b) Gilt $\lim\limits_{\widetilde{T} \to T} h_{\text{top}}(\widetilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?

c) Gilt $\limsup\limits_{\widetilde{T} \to T} p(\widetilde{T}, f) \le p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?

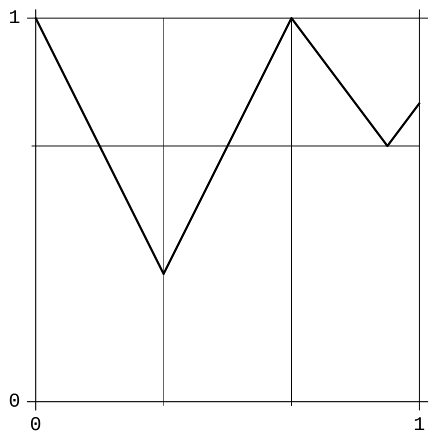


**Abbildung 1.** Die Abbildung $T$ aus Beispiel 77).

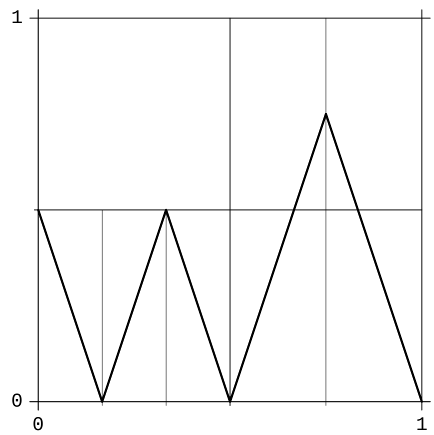


**Abbildung 2.** Die Abbildung $T$ aus Beispiel 78).

78) Die Funktion $T : [0,1] \to [0,1]$ sei durch

$$Tx := \begin{cases} \frac{1}{2} - 3x\,, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{6}\right], \\ 3x - \frac{1}{2}\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{3}{2} - 3x\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \\ 3x - \frac{3}{2}\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ 3 - 3x\,, & \text{für } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases}$$

definiert (siehe Abbildung 2).

a) Bestimme die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T)$.

b) Gilt $\lim\limits_{\widetilde{T} \to T} h_{\text{top}}(\widetilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?

c) Gilt $\limsup\limits_{\widetilde{T} \to T} p(\widetilde{T}, f) \le p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?

79) Betrachte die Abbildung $T : [0,1] \to [0,1]$, die durch

$$Tx := \begin{cases} 1 - 3x\,, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{7}{4}x - \frac{7}{12}\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right], \\ \frac{7}{2} - \frac{7}{2}x\,, & \text{für } x \in \left[\frac{7}{9}, 1\right], \end{cases}$$

definiert ist (siehe Abbildung 3). Gilt $\limsup_{\widetilde{T} \to T} p(\widetilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?

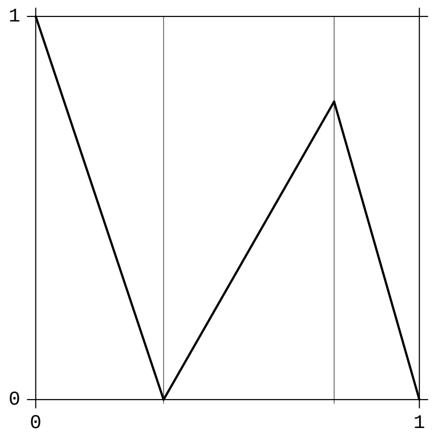


**Abbildung 3.** Die Abbildung $T$ aus Beispiel 79).

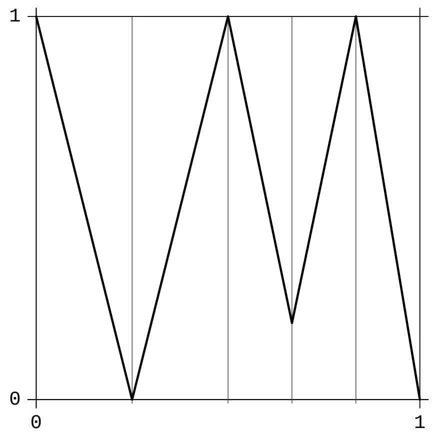


**Abbildung 4.** Die Abbildung $T$ aus Beispiel 80).

80) Definiere die Funktion $T : [0,1] \to [0,1]$ durch (siehe Abbildung 4)

$$Tx := \begin{cases} 1 - 4x\,, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 4x - 1\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{17}{5} - \frac{24}{5}x\,, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{24}{5}x - 3\,, & \text{für } x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right], \\ 6 - 6x\,, & \text{für } x \in \left[\frac{5}{6}, 1\right]. \end{cases}$$

a) Gilt $\lim_{\widetilde{T} \to T} h_{\mathrm{top}}(\widetilde{T}) = h_{\mathrm{top}}(T)$?

b) Gilt $\limsup_{\widetilde{T} \to T} p(\widetilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?