Computerbeispiele für das

Proseminar zu Analysis in einer Variablen für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2014/2015

Sebastian Banert
Calin Iulian Martin
Armin Rainer
Peter Raith

Die folgenden Beispiele sind mit dem Computer, etwa mit Mathematica, Maple oder Maxima, zu rechnen. Wenn man wxMaxima verwendet, sollte `set_display('none)$` eingegeben werden, damit auch alle Stellen des Ergebnisses angezeigt werden. Die geforderten Erklärungen können händisch auf den Ausdruck oder einen zusätzlichen Zettel gemacht werden. Nicht vergessen auch die Plots auszudrucken.
Das Beispiel 2) kann nicht leicht mit Maxima gemacht werden, dieses Beispiel bitte mit Mathematica oder Maple machen.

1) Untersuche, ob $f(x) := \begin{cases} (x+13)^4 \sin \frac{1}{(x+13)^6}\ , & \text{für } x \neq -13, \\ 0\ , & \text{für } x = -13, \end{cases}$ stetig ist und berechne $f'(x)$ für alle x, für die f differenzierbar ist. Plotte f und f' auf dem Intervall $[-13.5, -12.5]$. Ist f' stetig?

2) Berechne den Umfang der Ellipse $\left(\frac{x_1}{37}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{12}\right)^2 = 1$ auf mindestens 100 Stellen nach dem Komma genau.

3) Es sei $f(x) := \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$, wobei

$$\begin{aligned} g_1(x) &:= x^9 - 669x^8 + 28\,116x^7 - 626\,400x^6 + 9\,121\,218x^5 - 91\,999\,350x^4 + \\ &\quad + 646\,114\,056x^3 - 3\,034\,567\,668x^2 + 8\,116\,652\,169x - 7\,294\,209\,361 \quad \text{und} \\ g_2(x) &:= x^{11} - 59x^{10} + 1\,813x^9 - 37\,263x^8 + 558\,726x^7 - 6\,359\,538x^6 + \\ &\quad + 55\,701\,246x^5 - 373\,451\,946x^4 + 1\,871\,063\,481x^3 + \\ &\quad - 6\,628\,814\,227x^2 + 14\,751\,928\,877x - 15\,339\,295\,111 \end{aligned}$$

sind. Um $\int f(x)\,dx$ zu berechnen und die dazu notwendigen Rechenschritte zu erklären, löse die folgenden Aufgaben.

a) Berechne die Nullstellen von g_2 und bestimme die reelle Faktorisierung dieses Polynoms (erkläre zunächst, wie man von den Nullstellen zu der Faktorisierung kommt, erst danach berechne diese Faktorisierung). Erkläre welcher Ansatz für die Partialbruchzerlegung von f zu machen ist.

b) Bestimme die Partialbruchzerlegung von f.

c) Erkäre detailliert, wie man jetzt das Integral berechnen kann (Substitutionen angeben, notwendige Formeln explizit (also nicht nur die Rekursionsformeln angeben, sondern die nötigen Formeln daraus bestimmen!) angeben.

d) Schließlich berechne $\int f(x)\,dx$.

4) Bestimme die folgenden uneigentlichen Integrale. Bei denjenigen Integralen, die konvergieren berechne weiters den numerischen Wert auf mindestens 100 Stellen nach dem Komma. Außerdem begründe jeweils die Konvergenz, bzw. Divergenz der Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{15}}{x^{16}+1}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{7}}{x^{10}+1}\,dx\,.$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{128}{x^3+6x^2-52x-120}\,dx\,.$