Computerbeispiele für das

Proseminar zu Einführung in die Analysis

Sommersemester 2014

Sebastian Banert
Thomas Glatz
Armin Rainer
Tobias Wassmer
Thomas Widlak
Peter Raith

Die folgenden Beispiele sind mit dem Computer, etwa mit Mathematica, Maple oder Maxima, zu rechnen. Wenn man wxMaxima verwendet, sollte `set_display('none)$` eingegeben werden, damit auch alle Stellen des Ergebnisses angezeigt werden. Die geforderten Erklärungen können händisch auf den Ausdruck oder einen zusätzlichen Zettel gemacht werden. Nicht vergessen auch die Plots auszudrucken.

1) Das folgende Verfahren liefert eine Intervallschachtelung für $\sqrt[3]{5}$. Es sei $a_0 := 1$ und $b_0 := 5$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \dfrac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{3}$ und $b_n := \dfrac{5}{{a_n}^2}$. Man kann dann beweisen (und das soll dann für dieses Beispiel vorausgesetzt werden), dass
$$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < \sqrt[3]{5} < \cdots < a_3 < a_2 < a_1$$
gilt (Achtung: $a_0 < \sqrt[3]{5} < b_0$). Berechne die numerischen Werte der ersten Glieder dieser Intervallschachtelung, und zwar so lange, bis man damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{5}$ auf 250 Stellen nach dem Komma genau erhält.

2) Es sei $f(x) := x^2$. Plotte f und die folgenden Funktionen auf $[-5, 5]$.
   a) $f_1(x) := f(x - 2)$. b) $f_2(x) := 2f(x)$. c) $f_3(x) := f(x) + 3$.
   d) Versuche zu beschreiben, wie sich der Graph einer Funktion f ändert, wenn man $f(x - a)$, bzw. $cf(x)$, bzw. $f(x) + b$ betrachtet.
   e) $f_4(x) := 4 + \frac{1}{2}f(x - 1)$.
   f) Wie verändert sich der Graph von f, wenn man $b + cf(x - a)$ betrachtet?

3) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \dfrac{32\,209^n}{n!}$. Bestimme die numerischen Werte von a_5, a_{10}, a_{20}, a_{50}, a_{100}, a_{500}, a_{1000} und a_{10000}. Weiters berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4) Bestimme das Maximum (und den Wert des Maximums) der folgenden Funktionen f.

a) Es sei $f : [-6, 19] \to \mathbb{R},\ f(x) := 2x^5 - 65x^4 + 600x^3 - 2\,430x^2 + 4\,590x + 344\,412\,.$

b) Die Funktion $f : [-14, 15] \to \mathbb{R}$ sei durch

$$\begin{aligned} f(x) := {} & 140x^9 - 1\,575x^8 - 29\,700x^7 + 504\,000x^6 - 1\,381\,464x^5 - 28\,583\,100x^4 + \\ & + 380\,116\,800x^3 - 2\,131\,920\,000x^2 + 5\,774\,146\,560x + 319\,854\,927\,684 \end{aligned}$$

definiert.