Proseminar zu
Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie

Sommersemester 2012

Günther Hörmann
Bernhard Krön
Joachim Mahnkopf
Peter Raith

Wir bezeichnen Punkte oder Vektoren in $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, also als Spaltenvektoren. Nachdem man jeden Punkt als Ortsvektor auffassen kann, unterscheiden wir nicht zwischen Punkten und Vektoren. Den *Betrag* (die Länge) eines Vektors x bezeichnen wir mit $|x|$, somit ist $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$. Weiters bezeichnen wir im $\mathbb{R}^n$ das *innere Produkt* (Skalarprodukt) von zwei Vektoren x und y mit $\langle x, y \rangle$, es ist also $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Daraus ergibt sich $\langle x, x \rangle = |x|^2$. Im Zusammenhang mit dem Betrag ist die *Dreiecksungleichung* von Bedeutung, die besagt, dass die Ungleichung $|x + y| \le |x| + |y|$ gilt, und aus der man auch $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$ (*linker Teil der Dreiecksungleichung*) erhält.
Beim mathematischen Begründen beachte man folgende Vorgehensweise. Falls man die Richtigkeit einer Aussage bestätigen will, muss man sie allgemein beweisen. Wenn man hingegen eine Aussage widerlegen will, genügt es ein (wirklich nur ein einziges!) Gegenbeispiel zu geben.

1) a) Durch welche Gleichung wird die Gerade $\binom{7}{9} + t\binom{2}{3}$ beschrieben?
   b) Finde die Parameterform der Geraden, die durch die Gleichung $2x_1 + 7x_2 = 2$ beschrieben wird.

2) Untersuche, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründe die Antworten.
   a) Jede Gleichung der Form $x_2 = kx_1 + d$ beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.
   b) Man kann jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch eine Gleichung der Form $x_2 = kx_1 + d$ beschreiben.

3) Finde die Parameterform der folgenden Geraden im $\mathbb{R}^3$, die durch das Gleichungssystem $\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5\,, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1\,, \end{array}$ beschrieben wird.

4) Durch die Gleichungen
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8\,, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 &= 11\,, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + x_4 &= 24\,, \end{aligned}$$
wird eine Gerade im $\mathbb{R}^4$ beschrieben. Gib diese Gerade in Parameterform an.

5) Bestimme die Parameterform der Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung $3x_1 + x_2 + 7x_3 = 2$ gegeben ist.

6) Offensichtlich gilt für reelle Zahlen a und b, dass aus $a = b$ die Aussage $a^2 = b^2$ folgt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht richtig ist. Weiters soll gezeigt werden, dass die Umkehrung dieser Aussage richtig ist, falls man weiß, dass a und b nichtnegativ sind.
   a) Gib ein Beispiel für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$, für die $a^2 = b^2$ gilt.
   b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $b \geq 0$, und es gelte $a^2 = b^2$. Zeige, dass dann $a = b$ gilt.

Für das Lösen von Beispiel 7) wird jetzt in einem ähnlichen Musterbeispiel gezeigt, wie man dabei etwa vorgehen sollte. Insbesondere sollen die hier gezeigten Probleme beachtet werden, und beim Lösen von Beispiel 7) exakt vorgegangen werden.
Musterbeispiel: Zu bestimmen ist die Gleichung jener Ellipse, deren Brennpunkte in $\binom{5}{3}$ und $\binom{1}{-7}$ liegen, und die die große Halbachse $a = 8$ hat.
Lösung: Zunächst überlegen wir uns, dass es sich tatsächlich um eine Ellipse handelt. Bei einer Ellipse muss die große Halbachse a größer als die Brennweite (das ist die Hälfte des Abstands der beiden Brennpunkte) sein. Als Brennweite erhält man hier $e = \sqrt{29}$, und es ist tatsächlich $a = 8 > \sqrt{29} = e$.
Jetzt sei $x = \binom{x_1}{x_2}$ ein Punkt auf der Ellipse. Nach der Definition der Ellipse (die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten muss gleich $2a$ sein) ist das äquivalent zu
$$\underbrace{\left|x - \tbinom{5}{3}\right|}_{=\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-3)^2}} + \underbrace{\left|x - \tbinom{1}{-7}\right|}_{=\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2+7)^2}} = 16\,, \text{ woraus sich}$$
$$\sqrt{(x_1-5)^2 + (x_2-3)^2} + \sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2+7)^2} = 16 \tag{1}$$
ergibt. Offensichtlich ist $16 \geq 0$ und $\sqrt{(x_1-5)^2 + (x_2-3)^2} + \sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2+7)^2} \geq 0$. Deshalb ist wegen Beispiel 6) b) die Gleichung (1) äquivalent zu
$$\left(\sqrt{(x_1-5)^2 + (x_2-3)^2} + \sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2+7)^2}\right)^2 = 16^2\,, \text{ also}$$
$$\begin{aligned} &(x_1-5)^2 + (x_2-3)^2 + (x_1-1)^2 + (x_2+7)^2 + \\ &+ 2\sqrt{\left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2\right)\left((x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right)} = 256\,. \end{aligned}$$
Diese Gleichung ist äquivalent zu
$$\begin{aligned} &2\sqrt{\left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2\right)\left((x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right)} = \\ &= 256 - \left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2 + (x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right)\,. \end{aligned} \tag{2}$$
Aus (2) ergibt sich durch Quadrieren
$$\begin{aligned} &4\left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2\right)\left((x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right) = \\ &= \left(256 - \left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2 + (x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right)\right)^2\,, \end{aligned} \tag{3}$$
aber aus (3) folgt nicht automatisch (2) (siehe Beispiel 6)). Wir müssen jetzt also noch zeigen, dass aus (3) die Gleichung (2) folgt. Da $2\sqrt{\left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2\right)\left((x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right)} \geq 0$ ist, würde aus $256 - \left((x_1-5)^2 + (x_2-3)^2 + (x_1-1)^2 + (x_2+7)^2\right) \geq 0$ wegen Beispiel 6) b) folgen, dass die Gleichung (3) zur Gleichung (2) äquivalent ist.

Um $256-((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2) \geq 0$ zu zeigen, nehmen wir indirekt an, dass $256-((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2) < 0$ gilt, woraus sich ergibt, dass $((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2)-256 > 0$ gilt. Weiters ist wegen (3) dann

$$\begin{aligned} &4\left((x_1-5)^2+(x_2-3)^2\right)\left((x_1-1)^2+(x_2+7)^2\right) = \\ &= \left(((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2)-256\right)^2 . \end{aligned}$$

Wegen $2\sqrt{((x_1-5)^2+(x_2-3)^2)\,((x_1-1)^2+(x_2+7)^2)} \geq 0$ und

$$((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2)-256 > 0$$

folgt aus Beispiel 6) b), dass

$$\begin{aligned} &2\sqrt{((x_1-5)^2+(x_2-3)^2)\,((x_1-1)^2+(x_2+7)^2)} = \\ &= ((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2)-256 \end{aligned}$$

gilt. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &(x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2+ \\ &-2\sqrt{((x_1-5)^2+(x_2-3)^2)\,((x_1-1)^2+(x_2+7)^2)} = 256\,, \text{ und daher} \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-3)^2}-\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2+7)^2}\right)^2 = 16^2\,.$$

Weil für jede reelle Zahl r die Gleichung $r^2=|r|^2$ gilt, ergibt sich daraus

$$\left|\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-3)^2}-\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2+7)^2}\right|^2 = 16^2\,.$$

Nachdem $\left|\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-3)^2}-\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2+7)^2}\right| \geq 0$ und $16 \geq 0$ gelten, folgt aus Beispiel 6) b), dass

$$\Bigl|\underbrace{\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-3)^2}}_{=\left|x-\binom{5}{3}\right|}-\underbrace{\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2+7)^2}}_{=\left|x-\binom{1}{-7}\right|}\Bigr| = 16$$

gilt. Daraus erhält man, wenn man auch den linken Teil der Dreiecksungleichung verwendet,

$$16 = \left|\left|x-\tbinom{5}{3}\right|-\left|x-\tbinom{1}{-7}\right|\right| \leq \Bigl|\underbrace{\left(x-\tbinom{5}{3}\right)-\left(x-\tbinom{1}{-7}\right)}_{=\binom{-4}{-10}}\Bigr| = \left|\tbinom{-4}{-10}\right| = \sqrt{116}\,,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist (es ist ja $\sqrt{116} < 16$). Daher muss

$$256-((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2) \geq 0$$

gelten.

Nachdem wir $256-((x_1-5)^2+(x_2-3)^2+(x_1-1)^2+(x_2+7)^2) \geq 0$ bewiesen haben, ist die Gleichung (2) äquivalent zur Gleichung (3). Durch Ausmultiplizieren ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} &4{x_1}^4+4{x_2}^4+8{x_1}^2{x_2}^2-48{x_1}^3+32{x_2}^3+32{x_1}^2x_2-48x_1{x_2}^2+416{x_1}^2+ \\ &-512x_1x_2-2272x_1+704x_2+6800 = 4{x_1}^4+4{x_2}^4+8{x_1}^2{x_2}^2-48{x_1}^3+32{x_2}^3+32{x_1}^2x_2+ \\ &-48x_1{x_2}^2-544{x_1}^2-624{x_2}^2-192x_1x_2+4128x_1-2752x_2+29584\,. \end{aligned}$$

Indem man „alles auf die linke Seite bringt“, erhält man

$$960{x_1}^2+624{x_2}^2-320x_1x_2-6400x_1+3456x_2-22784 = 0\,,$$

und Dividieren durch 16 ergibt

$$60{x_1}^2+39{x_2}^2-20x_1x_2-400x_1+216x_2-1424 = 0\,.$$

Damit haben wir bewiesen, dass x genau dann auf der Ellipse liegt, wenn die Gleichung

$$60{x_1}^2+39{x_2}^2-20x_1x_2-400x_1+216x_2-1424 = 0$$

erfüllt ist. □

Bemerkung: In einer späteren Vorlesung (etwa *Lineare Algebra und Geometrie für Lehramtskandidatinnen*) wird behandelt werden, wie man von so einer Gleichung feststellen kann, um welche Kurve es sich handelt, und wie man die Brennpunkte und die große Halbachse bestimmen kann.

7) Bestimme die Gleichung der Hyperbel, die ihre Brennpunkte in $\binom{13}{6}$ und $\binom{-3}{-4}$ hat, und deren große Halbachse $a = 6$ beträgt.

Unter einer Matrix versteht man ein „rechteckiges Schema“ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{j,k} \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, ...) für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sind. Man spricht in diesem Fall von einer (reellen, komplexen, ...) $n \times m$-*Matrix* (also n Zeilen und m Spalten). Einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$, ...) kann man daher als $n \times 1$-Matrix auffassen (analog Zeilenvektoren als $1 \times n$-Matrix), und eine Zahl kann man als 1×1-Matrix auffassen. Für eine Zahl c und eine $n \times m$-Matrix A definiert man $cA := \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \dots & ca_{1,m} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \dots & ca_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n,1} & ca_{n,2} & \dots & ca_{n,m} \end{pmatrix}$, also man multipliziert eine Zahl mit einer Matrix, indem man c mit jeder Komponente von A multipliziert (und erhält wieder eine $n \times m$-Matrix). Für den Spezialfall eines Vektors erhält man c multipliziert mit dem Vektor, und für eine Zahl ergibt sich c multipliziert mit der Zahl. Sind A und B zwei $n \times m$-Matrizen (Achtung: sowohl die Anzahl der Zeilen, als auch die Anzahl der Spalten muss übereinstimmen!), so definiert man die Summe $A + B$ als $A + B := \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,m} + b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \dots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix}$, es wird also komponentenweise addiert. Im Fall von Vektoren ist das die Vektoraddition und für Zahlen die gewöhnliche Addition. Die folgenden Rechenregeln sind leicht nachzurechnen: $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + B = B + A$, $c(A + B) = cA + cB$ (wie üblich kommt die Multiplikation vor der Addition, falls keine Klammern gesetzt sind!), $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$, $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$ und $1A = A$. Bezeichnet man die $n \times m$-Nullmatrix, das ist diejenige $n \times m$-Matrix, bei der alle Eintragungen 0 sind, mit 0, dann gelten weiters $0 + A = A$, $0A = 0$ (hier steht auf der linken Seite 0 für die Zahl 0 und auf der rechten Seite für die Nullmatrix) und $A + (-A) = 0$, wobei $-A$ diejenige Matrix ist, bei der alle Eintragungen von A durch ihre Negativen ersetzt werden (also in der j-ten Zeile und k-ten Spalte von $-A$ steht $-a_{j,k}$).

Wichtig ist die *Matrixmultiplikation*, die jetzt definiert werden wird. Ist $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,r} \end{pmatrix}$ eine $n \times r$-Matrix und $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,m} \end{pmatrix}$ eine $r \times m$-Matrix (Achtung: die Anzahl der Spalten der ersten Matrix muss gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix sein!), dann definiert man das Produkt AB durch $AB := \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,m} \end{pmatrix}$ (das Produkt ist also eine $n \times m$-Matrix), wobei für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ die Komponente $c_{j,k}$ durch

$$c_{j,k} := \sum_{t=1}^{r} a_{j,t} b_{t,k} = a_{j,1} b_{1,k} + a_{j,2} b_{2,k} + \cdots + a_{j,r} b_{r,k}$$

(„entsprechende Zeile von A mal entsprechender Spalte von B“) definiert ist. Als Produkt zwischen zwei Matrizen oder zwischen einer Matrix und einem Vektor wird stets das Matrixprodukt gemeint, und auch hier hat die Multiplikation Vorrang gegenüber der Addition oder Subtraktion ($A - B := A + (-B)$). Relativ leicht nachzurechnen sind die Rechenregeln $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ und $(cA)B = A(cB) = c(AB)$. In der Vorlesung wird gezeigt werden, dass $(AB)C = A(BC)$ gilt. Man beachte aber, dass im Allgemeinen $AB = BA$ **nicht** gilt (also für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz nicht gilt)!
Falls A und B zwei $n \times n$-Matrizen sind (also die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten ist), dann ist daher AB definiert (ebenso BA, das im Allgemeinen nicht mit AB übereinstimmt!). Im Fall von Zahlen ist das Matrixprodukt das gewöhnliche Produkt dieser Zahlen. Man definiert die $n \times n$-Einheitsmatrix id (auch oft als I bezeichnet) durch $\mathrm{id} := \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,n} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \dots & e_{n,n} \end{pmatrix}$, wobei für $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Komponente $e_{j,k}$ durch

$$e_{j,k} := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } j = k, \\ 0\,, & \text{falls } j \neq k, \end{cases}$$

definiert ist, also $\mathrm{id} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gelten dann $\mathrm{id}\, A = A\, \mathrm{id} = A$. Für eine $n \times n$-Matrix A definiert man $A^0 := \mathrm{id}$, und für $k \in \mathbb{N}$ definiert man $A^k := A^{k-1}A$ („Definition mittels vollständiger Induktion“, „rekursive Definition“). Damit haben wir die Potenzen A^k von A für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert. Es ist leicht zu sehen, dass $A^1 = A$ gilt und $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-mal}}$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Für eine $n \times m$-Matrix A definiert man die *transponierte Matrix* A^t von A als diejenige $m \times n$-Matrix, die in der j-ten Zeile und k-ten Spalte die Eintragung $a_{k,j}$ hat („Spiegelung von A an der Hauptdiagonale“). So ist etwa für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ die Transponierte $A^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

8) Es seien $A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Multipliziere 5 mit diesen Matrizen.
b) Welche Paare dieser Matrizen kann man addieren? Berechne die Summe derjenigen Paare dieser Matrizen, die man addieren kann.
c) Für welche Paare dieser Matrizen kann man das Produkt berechnen? Bestimme das Produkt bei denjenigen Paaren, bei denen das möglich ist.

9) Für die folgenden Matrizen A und B berechne A^t, AB und BA.

a) $A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

c) $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10) Betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Berechne A^0, A^1, A^2 und A^3.

11) Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$.

a) Berechne $y^t x$.

b) Was ergibt $x^t x$?

Bemerkung: Man kann also das innere Produkt und das Quadrat des Betrags als Matrixmultiplikation schreiben.

12) Betrachte die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimme $v_1 + v_2$.

b) Berechne $3v_1$.

13) Auf der Menge der Polynome vom Grad ≤ 2 betrachte die Polynome $p_1(x) := 2x^2 + 6x + 3$ und $p_2(x) := 4x^2 - 3x + 1$.

a) Bestimme $p_1 + p_2$.

b) Berechne $3p_1$.

14) Betrachte die Funktionen $f_1(x) := 2 + 6e^{5x} + 3xe^{5x}$ und $f_2(x) := 4 - 3e^{5x} + xe^{5x}$ auf der Menge der Funktionen der Form $c_1 + c_2e^{5x} + c_3xe^{5x}$.

a) Bestimme $f_1 + f_2$.

b) Berechne $3f_1$.

c) Welche Gemeinsamkeiten gibt es bei diesem Beispiel, Beispiel 12) und Beispiel 13)?

15) a) Für welche reellen Zahlen r besitzt das Gleichungssystem $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 3\,, \\ 3x_1 + rx_2 &= -5\,, \end{aligned}$ eine Lösung.

b) Finde diejenigen $r \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 3\,, \\ 3x_1 + rx_2 &= 9\,, \end{aligned}$ eine Lösung besitzt.

c) Gib diejenigen reellen Zahlen r an, für die das Gleichungssystem aus Beispiel b) eine eindeutige Lösung hat.

16) Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 7\,, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 8\,, \\ 4x_1 \phantom{{}- 4x_2} - 7x_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

17) Berechne die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 2\,,\\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 8x_4 &= 3\,,\\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 9\,,\\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 9\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 2\,,\\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 8x_4 &= 7\,,\\ 3x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 9x_4 &= 7\,,\\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 7x_4 &= 6\,. \end{aligned}$$

18) Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 18\,,\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5\,,\\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 7x_4 &= 26\,,\\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 9x_4 &= 15\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 - 8x_5 &= 2\,,\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 8x_5 &= 5\,,\\ x_1 + x_2 - x_3 - 8x_4 + 3x_5 &= 6\,,\\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 13x_4 + x_5 &= 14\,,\\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= -3\,. \end{aligned}$$

19) Löse die folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 6\,,\\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 9\,,\\ 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 - x_5 &= 8\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 3\,,\\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 6x_5 &= 2\,,\\ 4x_1 - 8x_3 + 3x_4 - 12x_5 &= 19\,. \end{aligned}$$

20) Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 7x_4 - x_5 - x_6 - 2x_7 &= 1\,,\\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - 12x_4 - x_5 - 3x_6 - 2x_7 &= 7\,,\\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 3x_5 - 9x_6 - x_7 &= 13\,,\\ 3x_1 + 4x_2 - 24x_3 - 7x_4 + 8x_5 - 22x_6 + 2x_7 &= 42\,,\\ 2x_1 + 3x_2 - 17x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 11x_6 + 20x_7 &= 31\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4\,,\\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 9\,,\\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6\,. \end{aligned}$$

21) Finde die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 15x_4 &= 7\,,\\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 &= 4\,,\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 6\,,\\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 45\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 15x_4 &= 8\,,\\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 &= 9\,,\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 9\,,\\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 6\,. \end{aligned}$$

22) Berechne die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= 4\,,\\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 5\,,\\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 7\,,\\ x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 15x_5 &= 4\,,\\ 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 - 9x_4 - 6x_5 &= 2\,. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= 4\,, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0\,, \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 2\,, \\ x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 15x_5 &= 8\,, \\ 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 - 9x_4 - 6x_5 &= 6\,. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= 4\,, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0\,, \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= -8\,, \\ x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 15x_5 &= -16\,, \\ 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 - 9x_4 - 6x_5 &= -14\,. \end{aligned}$$

23) Löse die folgenden Gleichungssysteme.

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 &= 2\,, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 - x_6 &= 6\,, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 12\,, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 - x_5 + x_6 &= 16\,, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 8x_5 - 3x_6 &= -8\,, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 - 2x_6 &= 18\,, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 8x_5 - 4x_6 &= -8\,. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 &= 1\,, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 - x_6 &= 4\,, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 6\,, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 - x_5 + x_6 &= 3\,, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 8x_5 - 3x_6 &= 4\,, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 - 2x_6 &= 2\,, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 8x_5 - 4x_6 &= 7\,. \end{aligned}$$

24) a) Bestimme die Matrix X, die $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 4 & 15 & 5 \\ -5 & -17 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 24 & 11 & 20 \\ 2 & 23 & 50 & 7 & 41 \\ 7 & 46 & 108 & 17 & 89 \\ 4 & -62 & -118 & -7 & -96 \end{pmatrix}$ erfüllt.

b) Finde die Matrix X, die $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & -8 & -18 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -13 & -5 & 3 \\ 10 & -17 & 53 & 17 & -7 \\ -14 & 13 & -53 & -3 & 19 \end{pmatrix}$ erfüllt.

25) Berechne die Matrix X, die $X \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -8 & -5 & -7 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -1 & 9 \\ -2 & 5 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 & 6 \\ -3 & -1 & -2 & -9 & -26 \\ 7 & -18 & -1 & -5 & 47 \\ -1 & 2 & 6 & 6 & 20 \\ -4 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & -27 & -15 & -24 & -1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

26) Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Finde die Matrix X, die $AX = B$ erfüllt.

b) Bestimme die Matrix X, die $XA = B$ erfüllt.

27) Für die folgenden Matrizen A berechne die inverse Matrix A^{-1}.

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & -3 \\ -5 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & 3 & 9 & 6 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 & -7 & -3 \\ 3 & -3 & -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 7 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 5 & 1 & -3 & -1 & -4 \\ -3 & -5 & 8 & -2 & -13 & -26 \\ 4 & 7 & -8 & -2 & 19 & 67 \\ -2 & -2 & 9 & -7 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

28) Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + (2+i)\,x_2 + (-1+3i)\,x_3 + (-5+i)\,x_4 &= 3+6i\,, \\ (1-i)\,x_1 + 4\,x_2 + (5+2i)\,x_3 + (-3+10i)\,x_4 &= 5+4i\,, \\ (1+2i)\,x_1 + (-1+10i)\,x_2 + (7+7i)\,x_3 + (-16+4i)\,x_4 &= -15+8i\,, \\ (3-2i)\,x_1 + (-3-2i)\,x_2 + 43i\,x_3 + (-36+4i)\,x_4 &= 41+23i\,. \end{aligned}$$

29) Betrachte den Körper $\mathbb{Z}_{17}$ der Restklassen modulo 17. In dieser Menge löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 14\,, \\ 2x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 2\,, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 11\,, \\ 7x_1 + 12x_2 + 16x_3 + 13x_4 &= 15\,. \end{aligned}$$

30) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ sei durch vorgegebene reelle Werte x_0 und x_1, sowie durch $x_n := 6x_{n-1} - 5x_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gegeben.

a) Setze für $n \in \mathbb{N}_0$ den Vektor $X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. Finde eine Matrix A, sodass $X_n = AX_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Es seien jetzt $x_0 := 3$ und $x_1 := 7$. Zeige durch vollständige Induktion, dass $x_n = 2+5^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

31) Ähnlich wie in Beispiel 30) bestimme eine „Matrixdarstellung der Rekursionsformel" für die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$, die durch vorgegebene reelle Werte x_0 und x_1, sowie durch folgende Rekursionsformeln für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gegeben sind.

a) $x_n := \frac{3}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-2}$.

b) $x_n := \frac{8}{7}x_{n-1} - \frac{1}{7}x_{n-2}$.

32) Betrachte die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$, die durch vorgegebene Werte $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \in \mathbb{R}$, sowie durch folgende Rekursionsformeln für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gegeben sind. Gib eine zu Beispiel 30) analoge „Matrixdarstellung der Rekursionsformel" dieser Folgen an.

a) $x_n := 8x_{n-1} - 15x_{n-2}$.

b) $x_n := \frac{5}{3}x_{n-1} - \frac{2}{3}x_{n-2}$.

33) Zeige, dass die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.

34) Untersuche, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Teilräume sind, und begründe jeweils die entsprechende Behauptung. Dabei schreiben wir $x = \binom{x_1}{x_2}$.

a) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$.
b) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 5\}$.
c) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 8x_2 = 7\}$.
d) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 0\}$.
e) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \geq 0\}$.
f) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : 5x_1 - 2x_2 = 0\}$.
g) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : 3{x_1}^2 + 8{x_2}^2 < -1\}$.
h) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 - x_2 \geq -2\}$.
i) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$.
j) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : 15x_1 + 8x_2 = 0\}$.
k) $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0\}$.

35) Für die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ stelle fest, ob sie Teilräume sind (Begründungen geben). Hier ist stets $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 \geq 7\}$.
b) $A := \left\{\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$.
c) $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \text{ und } 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geq -4\}$.
d) $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0\}$.
e) $A := \left\{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$.
f) $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 \leq 8\}$.
g) $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 2\}$.

36) Mit $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (kurz mit C^1 bezeichnet) wird der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Begründungen geben)?

a) $A := \{f \in C^1 : f(0) = 0\}$.
b) $A := \{f \in C^1 : f(0) = 1\}$.
c) $A := \{f \in C^1 : f(1) = 0\}$.
d) $A := \{f \in C^1 : f(7) \geq 5\}$.
e) $A := \{f \in C^1 : f'(-4) = 0\}$.
f) $A := \{f \in C^1 : f'(6) \leq 8\}$.
g) $A := \{f \in C^1 : f(3) + f'(3) = 0\}$.
h) $A := \{f \in C^1 : f(3)f'(7) = 0\}$.
i) $A := \{f \in C^1 : f(-6) + f'(2) > 6\}$.
j) $A := \{f \in C^1 : 4f(2) - 3f'(-5) = 3\}$.
k) $A := \{f \in C^1 : f(8) + f'(8) \leq 0\}$.
l) $A := \{f \in C^1 : f' = f\}$.
m) $A := \{f \in C^1 : 8f(-4) + 17f'(9) = 0\}$.

37) Stelle fest ob die folgenden Mengen Teilräume von $\mathcal{P}_8$ (die Menge der Polynome vom Grad ≤ 8) sind, und begründe jeweils die Behauptungen.

a) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p(3) = 6\}$.
b) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p'(5) = 0\}$.
c) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p' = 5p\}$.
d) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p''(-5) > 3\}$.
e) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : 3p(0) + 4p'(-2) \leq 6\}$.
f) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : 7p(5) - 2p'(-3) = 0\}$.
g) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : 4p(6) + 7p'(5) - 2p''(4) \geq 0\}$.
h) $A := \mathcal{P}_3$ (Polynome vom Grad ≤ 3).
i) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p'' - 6p' + 8p = x^2 + 3x + 8\}$.
j) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p'' - p' - 6p = 0\}$.
k) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p''(4) + 8p(2) < 6\}$.

38) Auf $\mathbb{R}^4$ betrachte die Teilmengen

$$A_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad A_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beantworte die folgenden Fragen durch direktes Nachrechnen mit Hilfe der entsprechenden Definitionen.

a) Ist A_1 linear unabhängig?
b) Bildet A_1 ein Erzeugendensystem?
c) Ist A_2 linear unabhängig?
d) Bildet A_2 ein Erzeugendensystem?

39) Durch direktes Nachrechnen mit Hilfe der entsprechenden Definitionen untersuche, ob die folgenden Teilmengen von $\mathcal{P}_2$ linear unabhängig sind, und ob sie ein Erzeugendensystem bilden.

a) $A := \{x^2 + x + 3, 3x^2 + 2x + 4\}$.
b) $A := \{x^2 - 5, 2x^2 - 3x - 4, x - 2, 2x^2 + 5x + 1\}$.
c) $A := \{2x^2 + 5x + 1, 3x^2 + x - 2, 5x^2 - 7x - 8\}$.
d) $A := \{2x^2 + 2x + 3, 3x^2 + 2x + 2, 5x^2 + 3x + 4\}$.

40) a) Sei V ein Vektorraum über K und sei $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Weiters sei $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Beweise, dass es passende $j_{k+1}, j_{k+2}, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, sodass $\{w_1, w_2, \dots, w_k, v_{j_{k+1}}, v_{j_{k+2}}, \dots, v_{j_n}\}$ eine Basis von V bildet.

b) Zeige, dass jede linear unabhängige Teilmenge eines endlichdimensionalen Vektorraumes V über K zu einer Basis von V ergänzt werden kann.
Genauer formuliert lautet das zu beweisende Resultat: Ist $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines endlichdimensionalen Vektorraumes V über K, dann gibt es $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n \in V$ (es wäre auch erlaubt, dass $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\} = \emptyset$ ist), sodass $\{w_1, w_2, \dots, w_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.
Hinweis: Verwende Beispiel a).

41) Betrachte $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
b) Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

42) Es sei $V := \left\{ a_1 e^{-3x} \cos(8x) + a_2 e^{-3x} \sin(8x) + a_3 x + a_4 : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$ (diese Menge ist ein Teilraum des Vektorraumes aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) und sei

$$\mathcal{B} := \Big\{ e^{-3x} \sin(8x) + 1, 2e^{-3x} \cos(8x) + x + 3, \\ 5e^{-3x} \cos(8x) + 2x + 3, x + 5 - 3e^{-3x} \sin(8x) \Big\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.
b) Stelle $f(x) := 4e^{-3x} \cos(8x) + 3e^{-3x} \sin(8x) - 2x - 25$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

43) Untersuche, ob $A := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^4$ ist. Falls A linear unabhängig ist, dann ergänze A zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

44) Bestimme die Dimension der folgenden Vektorräume über den angegebenen Körpern.

a)	$\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.	b)	$\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{Q}$.	c)	$\mathbb{R}^6$ über $\mathbb{R}$.
d)	$\mathbb{R}^{43}$ über $\mathbb{R}$.	e)	$\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{R}$.	f)	$\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$.
g)	$\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{Q}$.	h)	$\mathbb{C}^5$ über $\mathbb{C}$.	i)	$\mathbb{C}^{34}$ über $\mathbb{R}$.
j)	$\mathbb{R}^{18}$ über $\mathbb{Q}$.	k)	$\mathbb{C}^{31}$ über $\mathbb{Q}$.	l)	$\mathbb{C}^{31}$ über $\mathbb{C}$.

45) Von den folgenden Vektorräumen V gib die Dimension über $\mathbb{R}$ an.

a) $V := M_{4,7}(\mathbb{R})$.
b) $V := \mathcal{F}$ sei der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
c) V sei der Vektorraum aller reellen Folgen.
d) $V := C^1$.
e) $V := \mathcal{P}_5$ (reelle Polynome vom Grad ≤ 5).
f) V sei der Vektorraum aller konvergenten reellen Folgen.
g) $V := M_6(\mathbb{R})$.
h) $V := \Big\{a_1 e^{6x}\cos(4x) + a_2 e^{6x}\sin(4x) + a_3 e^{-5x} + a_4 x + a_5 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}\Big\}$.
i) $V := \mathcal{P}$ (alle reellen Polynome).
j) $V := C\big([2,7), \mathbb{R}\big)$ (alle stetigen Funktionen $f : [2,7) \to \mathbb{R}$).
k) $V := M_{5,3}(\mathbb{C})$.
l) $V := \Big\{a_1 x e^{3x} + a_2 e^{3x} + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}\Big\}$.
m) $V := \mathcal{P}_{71}$.
n) $V := \Big\{a_1 x^3 e^{17x} + a_2 x^2 e^{17x} + a_3 x e^{17x} + a_4 e^{17x} : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\Big\}$.

46) Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (jeweils als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachtet) linear sind (Begründungen geben).

a)	$\varphi(x) := x$.	b)	$\varphi(x) := 3x + 1$.	c)	$\varphi(x) := 5x$.
d)	$\varphi(x) := 0$.	e)	$\varphi(x) := 1$.	f)	$\varphi(x) := x^2$.
g)	$\varphi(x) := e^x$.	h)	$\varphi(x) := -2x$.	i)	$\varphi(x) := \sin x$.
j)	$\varphi(x) := 5x - 3$.	k)	$\varphi(x) := 8$.	l)	$\varphi(x) := 4x + 9$.

47) Gib an, welche der folgenden Abbildungen φ (die Vektorräume werden jeweils als Vektorräume über $\mathbb{R}$ betrachtet) linear sind (Begründungen geben).

a) $\varphi : C^1 \to \mathcal{F}$, $\varphi(f) := f'$.
b) $\varphi : C^\infty \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := f''(5)$, wobei C^∞ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.
c) $\varphi : C^1 \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := 2$.
d) $\varphi : C^\infty \to \mathcal{F}$, $\varphi(f) := f'' - 2f' - 15f$.
e) $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi\big((a_n)\big) := \lim_{n\to\infty} a_n$, wobei V die Menge aller konvergenten reellen Folgen (a_n) ist.
f) $\varphi : C^1 \to \mathcal{F}$, $\varphi(f) := f^2$.
g) $\varphi : C^0 \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := \int_3^7 f(x)\,dx$, wobei C^0 der Raum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.

48) Welche der folgenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ (jeweils als Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachtet) sind linear (Begründungen geben, es ist $v := \begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ x_2+iy_2 \\ x_3+iy_3 \end{pmatrix}$).

a) $\varphi(v) := \begin{pmatrix} 7(x_1+iy_1) \\ i(x_1+iy_1)+3(x_2+iy_2)+(3-2i)(x_3+iy_3) \end{pmatrix}$.

b) $\varphi(v) := \begin{pmatrix} 2+i \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) $\varphi(v) := 0$.

d) $\varphi(v) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+iy_1 \end{pmatrix}$.

e) $\varphi(v) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+y_1 \end{pmatrix}$.

49) Seien V und W Vektorräume über K, und sei $\varphi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Weiters sei $M \subseteq V$ linear unabhängig. Beweise, dass $\varphi(M)$ eine linear unabhängige Teilmenge von W ist.
Anleitung: Man muss nur beweisen, dass für linear unabhängige $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in V auch $\{\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)\}$ linear unabhängig in W ist.

50) Es seien V und W Vektorräume über K, und es sei $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Außerdem sei M ein Erzeugendensystem von V. Zeige, dass $\varphi(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

51) Von den folgenden linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ finde die Matrix.

a) Es sei φ die Spiegelung an der x_1-Achse.

b) Die Abbildung φ sei die Drehung um $\frac{\pi}{3}$ (also um 60°).

c) Jetzt sei φ die Spiegelung am Nullpunkt.

d) Schließlich sei φ die Spiegelung an der ersten Mediane.

52) Betrachte zwei endlichdimensionale Vektorräume V und W über K. Man zeige die folgenden Aussagen.

a) Falls es eine injektive lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt, dann ist $\dim_K V \leq \dim_K W$.

b) Wenn es eine surjektive lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt, dann ist $\dim_K V \geq \dim_K W$.

c) Gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$, so ist $\dim_K V = \dim_K W$.

53) Gib Beispiele oder begründe, dass es solche Beispiele nicht geben kann, für:

a) eine injektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

b) eine surjektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

c) eine injektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

d) eine surjektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

e) eine injektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$,

f) eine surjektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$,

g) eine injektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$,

h) eine surjektive lineare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$,

i) einen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{P}_5 \to \mathbb{R}^6$.

54) Definiere die lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ durch $\varphi(p) := p'' + p' - 2p$. Finde die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, x^2, x^3\}$.

55) Auf $\mathcal{P}_3$ betrachte die Basis $\mathcal{B}_1 := \{x^3+1, x^2+x+2, 2x^3+x+4, x^3+2x^2+4x+6\}$, und auf $\mathcal{P}_2$ die Basis $\mathcal{B}_2 := \{x^2+x, 2x^2+5x+1, 3x^2+8x+2\}$. Stelle die durch $\varphi(p) := p'$ definierte lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ bezüglich $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ dar.

56) Die lineare Abbildung φ auf $V := \{a_1e^{7x} + a_2x + a_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ sei durch $f \mapsto f' - 3f$ definiert. Gib die Darstellung von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, e^{7x} + 3x + 4\}$ an.

57) Stelle die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -6 & 10 & -7 \\ -17 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dar.

58) Betrachte die Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$ auf $\mathbb{R}^3$ und die Basis

$$\mathcal{B}_2 := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

auf $\mathbb{R}^5$. Man stelle die Matrix $\begin{pmatrix} -4 & -11 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 7 & -9 & -3 \\ 5 & 8 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ dar.

59) Auf $V := \{a_1e^{3x}\cos(2x) + a_2e^{3x}\sin(2x) + a_3x + a_4 : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ stelle $f \mapsto f' + 2f$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, e^{3x}\cos(2x) + 2x, e^{3x}\sin(2x) + 5\}$ dar.

60) Stelle $f \mapsto f' + 2f$ auf

$$V := \{a_1 + a_2e^{5x} + a_3xe^{5x} + a_4x^2e^{5x} + a_5x^3e^{5x} : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}\}$$

bezüglich $\mathcal{B} := \{1, 6e^{5x}, 6xe^{5x}, 3x^2e^{5x}, x^3e^{5x}\}$ dar.

61) Für die Abbildung $f \mapsto f' - 3f$ auf

$$V := \{a_1e^{7x}\cos(3x) + a_2e^{7x}\sin(3x) + a_3xe^{7x}\cos(3x) + a_4xe^{7x}\sin(3x) + \\ + a_5x^2e^{7x}\cos(3x) + a_6x^2e^{7x}\sin(3x) : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}\}$$

finde die Darstellung bezüglich

$$\mathcal{B} := \{2e^{7x}\cos(3x), 2e^{7x}\sin(3x), 2xe^{7x}\cos(3x), 2xe^{7x}\sin(3x), x^2e^{7x}\cos(3x), x^2e^{7x}\sin(3x)\}\,.$$

62) a) Gib die Darstellung von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ an.

b) Finde die Darstellung von $v := \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

c) Verwende die Beispiele a) und b) um eine Formel für $A^n v$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ anzugeben.

63) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei durch $x_0 := 11$, $x_1 := 5$ und $x_n := \frac{8}{7}x_{n-1} - \frac{1}{7}x_{n-2}$ für $n \geq 2$ gegeben (siehe auch Beispiel 31) b)).

a) Gib eine Formel für x_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ an.
Anleitung: Verwende Beispiel 31) b) und Beispiel 62).

b) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

64) Definiere die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_0 := 9$, $x_1 := 3$, $x_2 := 15$ und

$$x_n := 10x_{n-1} - 27x_{n-2} + 18x_{n-3}$$

für $n \geq 3$. Indem man wie in Beispiel 30) eine „Matrixdarstellung" für diese Differenzengleichung angibt, diese Matrix bezüglich der Basis $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\3\\9\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\6\\36\end{smallmatrix}\right)\right\}$ darstellt und ähnlich wie in Beispiel 62) vorgeht, finde man eine Formel für x_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

65) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K, und seien W_1 und W_2 Teilräume von V. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent zueinander sind.
(1) Es ist $V = W_1 \oplus W_2$.
(2) Die Eigenschaften $V = W_1 + W_2$ und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$ sind erfüllt.
(3) Es gelten $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.
Anleitung: Zeige (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1).

66) Betrachte einen Vektorraum V über K und einen Teilraum W von V. Definiere eine Relation „$\equiv$" auf V durch $v_1 \equiv v_2$, falls $v_1 - v_2 \in W$.
a) Zeige, dass „$\equiv$" eine Äquivalenzrelation auf V ist.
b) Für $v_1, v_2 \in V$ zeige, dass $v_1 \equiv v_2$ genau dann gilt, wenn es ein $w \in W$ gibt, sodass $v_2 = v_1 + w$ gilt.
c) Falls $v \in V$ gegeben ist, zeige, dass die Äquivalenzklasse von v gleich der Menge $v + W := \{v + w : w \in W\}$ ist.

67) Man definiere $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch $\varphi\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix}x_3\\x_1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Bestimme $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$.

68) Auf $V := \{a_2x^2e^{-3x} + a_1xe^{-3x} + a_0e^{-3x} : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ betrachte die durch $f \mapsto f' - 5f$ definierte Abbildung φ.
a) Gib $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ an.
b) Ist φ bijektiv (Begründen!)?
c) Finde ein $f \in V$ mit $f' - 5f = 256x^2e^{-3x}$.
Bemerkung: Damit wurde eine Lösung der Differenzialgleichung $f' - 5f = 256x^2e^{-3x}$ gefunden.

69) Wieder sei $V := \{a_2x^2e^{-3x} + a_1xe^{-3x} + a_0e^{-3x} : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$. Diesmal sei $\varphi : V \to V$ durch $\varphi(f) := f' + 3f$ definiert. Die Antworten zu den folgenden Fragen sind stets zu begründen, und es ist eine konkrete Funktion anzugeben, wenn es eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften gibt.
a) Bestimme $\ker\varphi$.
b) Ist φ bijektiv?
c) Kann man ein $f \in V$ mit $f' + 3f = 219x^2e^{-3x}$ finden?
d) Gibt es ein $f \in \{a_3x^3e^{-3x} + a_2x^2e^{-3x} + a_1xe^{-3x} + a_0e^{-3x} : a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, für das die Eigenschaft $f' + 3f = 219x^2e^{-3x}$ erfüllt ist?

70) Es sei

$$V := \{a_1xe^{5x}\cos(2x) + a_2xe^{5x}\sin(2x) + a_3e^{5x}\cos(2x) + a_4e^{5x}\sin(2x) : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$$

und definiere $\varphi : V \to V$ durch $\varphi(f) := f' - 3f$.
a) Bestimme $\ker\varphi$ und untersuche, ob φ bijektiv ist.
b) Finde ein $f \in V$ mit $f' - 3f = 32xe^{5x}\sin(2x)$.

71) Auf dem Vektorraum
$V := \{a_1 x e^{5x}\cos(2x) + a_2 x e^{5x}\sin(2x) + a_3 e^{5x}\cos(2x) + a_4 e^{5x}\sin(2x) : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$
betrachte die durch $f \mapsto f'' - 10f' + 29f$ definierte Abbildung $\varphi : V \to V$.
a) Gib $\ker\varphi$ an und untersuche, ob φ bijektiv ist.
b) Suche ein $f \in V$ mit $f'' - 10f' + 29f = 32xe^{5x}\sin(2x)$ oder zeige, dass es so eine Funktion nicht geben kann.
c) Finde eine Funktion
$$f \in \{b_1 x^2 e^{5x}\cos(2x) + b_2 x^2 e^{5x}\sin(2x) + b_3 x e^{5x}\cos(2x) + b_4 x e^{5x}\sin(2x) + \\ + b_5 e^{5x}\cos(2x) + b_6 e^{5x}\sin(2x) : b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{R}\},$$
die $f'' - 10f' + 29f = 32xe^{5x}\sin(2x)$ erfüllt.

72) Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bestimme $\ker A$ und $\operatorname{im} A$.

73) Gibt es lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$ für passende Vektorräume, die $\ker\varphi = \operatorname{im}\varphi$ erfüllen? Falls es solche Abbildungen gibt, gib ein Beispiel dafür, und wenn es solche Abbildungen nicht gibt, beweise, dass es solche Abbildungen nicht geben kann.

74) Sei V ein Vektorraum über K und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die $\varphi^2 = \varphi$ erfüllt, wobei $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi$. Beweise, dass dann $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$ gilt.
Bemerkung: Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ nennt man eine Projektion.

75) Wieviele lineare Abbildungen gibt es von ${\mathbb{Z}_{23}}^7$ nach ${\mathbb{Z}_{23}}^4$, wobei $\mathbb{Z}_{23}$ der Körper der Restklassen modulo 23 ist?

76) In $\mathbb{C}^4$ betrachte die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-3i \\ 3-i \\ 4-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-5i \\ 6-2i \\ 3-4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-3i \\ 3+4i \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ -2-2i \\ 5-2i \\ -1+2i \end{pmatrix} \right\}$.
a) Finde die Darstellung von $v := \begin{pmatrix} -3+i \\ 9+4i \\ 19-i \\ 14+12i \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$.
b) Stelle $A := \begin{pmatrix} -122-14i & -42+25i & 17-16i & 2+19i \\ -16+389i & 110+109i & -47-38i & 48-4i \\ -603+83i & -124+186i & 54-76i & 12+78i \\ -14-234i & -103-14i & 13+2i & -10-13i \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

77) Betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 60 & -17 & -25 \\ 53 & -10 & -25 \\ 90 & -25 & -37 \end{pmatrix}$.
a) Gib die Darstellung von A bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ an.
b) Fasse jetzt die Matrix A als eine komplexe Matrix auf, und betrachte auf $\mathbb{C}^3$ die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-i \\ 2-i \\ 3-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \\ 3+2i \end{pmatrix} \right\}$. Stelle A bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

78) Auf dem Vektorraum $\mathcal{P}$ aller reellen Polynome (als Vektorraum über $\mathbb{R}$) betrachte die durch $\varphi(p) := p'$ definierte lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ und die durch $\psi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) := a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ definierte Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.
a) Untersuche, ob φ injektiv, bzw. surjektiv ist.
b) Zeige, dass ψ linear ist. Was ist ψ?
c) Ist ψ injektiv oder surjektiv?
d) Bestimme $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$.

79) Berechne die folgenden Determinanten.

a) $\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. b) $\det\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. c) $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 5 & -8 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. e) $\det\begin{pmatrix} 3+5i & 8+7i \\ 2+i & 5+2i \end{pmatrix}$.

80) Von den folgenden Matrizen berechne die Determinanten.

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -8 & 7 & -9 \\ -2 & -5 & 7 & -2 \\ 2 & 8 & -6 & -9 \end{pmatrix}$. b) $\det\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & -3 \\ -5 & 7 & -3 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 5 & 11 \\ 8 & 3 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 6 & -7 & 3 \\ -2 & -8 & 5 & -1 \\ 1 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. d) $\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 8 \\ 5 & -7 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \\ 8 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

81) Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\det\begin{pmatrix} 0 & 13 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 15 & 9 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 19 & 0 & -5 \\ -5 & -9 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 5 & -6 & -8 \\ 3 & 4 & -7 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & -7 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $\det\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & -7 & 5 & 9 \\ -6 & 4 & -3 & 7 & -3 & -8 \\ -5 & 8 & 6 & 15 & 6 & 2 \\ 8 & -7 & 8 & 9 & 8 & -12 \\ 4 & 6 & -4 & 5 & -4 & 13 \\ -9 & 4 & 8 & -17 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. d) $\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 7 & -4 & -5 & -9 \\ -2 & 6 & 1 & 1 & -8 \\ 3 & -9 & -4 & 8 & 5 \\ 2 & -7 & -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

e) $\det\begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 & -4 & 29 \\ 7 & 12 & -5 & 7 & 2 \\ 8 & 5 & 9 & 8 & -6 \\ -6 & 9 & -15 & -6 & 8 \\ 5 & -7 & 3 & 5 & 18 \end{pmatrix}$. f) $\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -11 & 9 \\ 2 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

82) Es sollen die Determinanten der folgenden Matrizen bestimmt werden.

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 5 & -6 & 8 \\ -2 & -5 & 5 & -7 & 8 & -5 \\ 3 & 5 & -8 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & -9 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & 8 & -2 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$

b) $\det\begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 & -7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 3 & 0 & -24 \\ 13 & 16 & 8 & 19 & -12 & 14 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 28 & 6 & -14 \end{pmatrix}.$

c) $\det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

d) $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -8 & 7 & 5 & 9 \\ 6 & -9 & 7 & 2 & 8 & 4 \\ 15 & 4 & 5 & -6 & 10 & -3 \\ -7 & 5 & -8 & -4 & 19 & 6 \\ -5 & 7 & 4 & 12 & -8 & 8 \\ 6 & -9 & 7 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$

e) $\det\begin{pmatrix} 7 & -8 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 24 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & -13 & -9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

f) $\det\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$

83) Von den folgenden Matrizen berechne die Determinanten.

a) $\det\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -8 & 13 & 2 & 0 & -9 & 16 \\ 5 & 27 & -19 & 2 & 21 & 14 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -18 & 0 & 0 & 23 & -19 \end{pmatrix}.$

b) $\det\begin{pmatrix} 14 & 0 & 19 & 0 & 7 \\ -4 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & -8 & -21 & 17 \\ 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 18 & 3 & -13 \end{pmatrix}.$

c) $\det\begin{pmatrix} 4-3i & 3+i & -2+4i \\ -1+6i & 8+5i & 5-3i \\ 7+2i & 5-8i & -4-6i \end{pmatrix}.$

d) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & 7 & -6 & 15 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & -14 \\ -4 & -9 & 6 & -5 & 7 \\ 3 & 7 & -7 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$

e) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & 2 & 9 \\ 3 & -6 & 2 & 9 \\ -4 & 5 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$

f) $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$

84) Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & -6 & 5 & 6 \\ -3 & -8 & -3 & 5 & -9 & -2 \\ 4 & 9 & -1 & -4 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 3 & 9 \\ -4 & -7 & 5 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$

b) $\det\begin{pmatrix} 7 & -9 & 6 & -8 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 3 \\ 17 & 0 & 11 & 0 & 0 & -22 \\ -14 & 9 & 26 & 3 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 5 & -15 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$

c) $\det\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -7 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

85) Auf $\mathbb{Z}_{31}$, dem Körper der Restklassen modulo 31, betrachte die 5×5-Matrix A, die durch $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 15 & 14 & 19 & 29 \\ 5 & 12 & 17 & 8 & 1 \\ 6 & 22 & 22 & 1 & 17 \\ 8 & 30 & 10 & 30 & 26 \end{pmatrix}$ definiert ist. Berechne die Determinante $\det A$.

86) a) Gilt $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = (\det A) \cdot (\det D) - (\det B) \cdot (\det C)$, falls es sich bei A, B, C, D jeweils um $n \times n$-Matrizen handelt?

b) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 5 & -7 & -7 & 3 \\ -3 & 5 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ und $D := \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ bestimme $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det D$ und $(\det A) \cdot (\det D) - (\det B) \cdot (\det C)$.

87) Es sei $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

a) Zeige, dass durch $\|x\|_\infty := \max\big\{|x_j| : j \in \{1, 2, \dots, n\}\big\}$ eine Norm definiert ist.

b) Beweise, dass durch $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ eine Norm gegeben ist.

88) Für die folgenden Vektoren x berechne $\|x\|_1$, $\|x\|_2 = |x|$ und $\|x\|_\infty$.

a) $x := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$. b) $x := \begin{pmatrix} 24 + 7i \\ 5 - 12i \\ -3 + 4i \\ 40 + 9i \end{pmatrix}$. c) $x := \begin{pmatrix} 3 \\ 29 \\ 1 \\ -3 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}$.

89) Auf $C\big([0, 5], \mathbb{R}\big)$ definiere die Normen $\|f\|_1 := \int_0^5 |f(x)|\,dx$, $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^5 |f(x)|^2\,dx}$ und $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,5]} |f(x)|$. Berechne $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ und $\|f\|_\infty$ für $f(x) := 15x^2$.

90) Berechne auf $C\big([0, 6], \mathbb{R}\big)$ mit $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,6]} |f(x)|$ für die folgenden Funktionen f ihre Norm $\|f\|_\infty$.

a) $f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. b) $f(x) := x^3 - 9x^2 + 15x + 29$.
c) $f(x) := 24x + 3x^2 - x^3$. d) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 60x - 35$.

91) Von den Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 3+5i \\ -4-7i \\ 2+3i \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2+i \\ 5-2i \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$ berechne das innere Produkt $\langle v_1, v_2\rangle$.

92) Zeige, dass durch $\langle f,g\rangle := \int_0^9 f(x)g(x)\,dx$ für $f,g \in C\big([0,9],\mathbb{R}\big)$ ein inneres Produkt auf $C\big([0,9],\mathbb{R}\big)$ gegeben ist.

93) Betrachte $C\big([0,9],\mathbb{R}\big)$ mit dem in Beispiel 92) definierten inneren Produkt. Für $f(x) := 2x$ und $g(x) := x^4$ bestimme $\langle f,g\rangle$, $\|f\|_2$, $\|g\|_2$, sowie den Winkel zwischen f und g.

94) In $\mathbb{R}^3$ gib die Orthogonalräume $M^\perp$ der folgenden Teilräume M an.
a) $M := \left\{ t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$.
b) $M := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) : 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0\right\}$.

95) Sei V ein (beliebig dimensionaler) Vektorraum mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$. Beweise die folgenden Aussagen.
a) Falls M ein Teilraum von V ist, dann gilt $M \subseteq \left(M^\perp\right)^\perp$.
b) Für alle Teilräume M_1 und M_2 von V gilt $(M_1 + M_2)^\perp = {M_1}^\perp \cap {M_2}^\perp$.
c) Es gilt ${M_1}^\perp + {M_2}^\perp \subseteq (M_1 \cap M_2)^\perp$ für alle Teilräume M_1 und M_2 von V.

96) Zeige, dass auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$ die Eigenschaft $(M_1 \cap M_2)^\perp = {M_1}^\perp + {M_2}^\perp$ für alle Teilräume M_1 und M_2 von V gilt.

97) Der Raum $V := \{a_1 \cos x + a_2 \sin x : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ werde als Teilraum von $C\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$ mit dem inneren Produkt $\langle f,g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ betrachtet. Zeige, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x \right\}$$

eine Orthonormalbasis von V ist.

98) Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachte den Raum

$$V_n := \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(2\pi jx) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(2\pi jx) : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

als Teilraum von $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit dem inneren Produkt $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Beweise, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{B} := \Big\{1, &\sqrt{2}\cos(2\pi x), \sqrt{2}\cos(4\pi x), \ldots, \sqrt{2}\cos(2\pi nx),\\ &\sqrt{2}\sin(2\pi x), \sqrt{2}\sin(4\pi x), \ldots, \sqrt{2}\sin(2\pi nx)\Big\}\end{aligned}$$

eine Orthonormalbasis von V_n bildet.

99) Auf $\mathbb{R}^3$ betrachte die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$.

a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist.

b) Stelle $v := \left(\begin{smallmatrix}4\\-7\\8\end{smallmatrix}\right)$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

100) In $\mathbb{R}^4$ betrachte die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix}3\\0\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-8\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-5\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$. Gib diejenige Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ an, die man durch Anwendung des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens auf $\mathcal{B}$ erhält.

101) Man betrachte das innere Produkt $\langle f, g\rangle := \int_1^5 f(x)g(x)\,dx$ auf $C\big([1,5],\mathbb{R}\big)$. Wende das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf $\big\{1, x, x^2\big\}$ an.

102) Es sei V_n der in Beispiel 98) definierte Teilraum von $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit dem dort definierten innerem Produkt auf $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Unter Verwendung der in Beispiel 98) angegebenen Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ bestimme die Orthogonalprojektion von $f(x) := x - x^2$ auf V_n.