

Proseminar zu Höhere Analysis für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2007/2008

CHRISTOPH ABLEITINGER
PETER RAITH

- 1) Bezeichnet man die zum Zeitpunkt t vorhandene Stoffmenge eines radioaktiven Stoffes mit $x(t)$, so lautet das *radioaktive Zerfallsgesetz* $\dot{x} = -kx$, wobei k eine vom Stoff abhängige Konstante ist (siehe Vorlesung). Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei x_0 . Als Halbwertszeit T des Stoffes wird jene Zeit bezeichnet, zu der nur mehr die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist, also $x(T) = \frac{x_0}{2}$ gilt.
 - a) Wie sieht die Lösung der obigen Differenzialgleichung aus (siehe Vorlesung)?
 - b) Zeige, dass $x(t + T) = \frac{x(t)}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wie kann man dieses Ergebnis interpretieren?
 - c) Finde eine Formel für die Halbwertszeit T , falls man k als bekannt voraussetzt.
 - d) Wenn die Halbwertszeit T bekannt ist, wie kann man k berechnen?
 - e) Wird man praktisch (also durch Messungen) eher k oder T feststellen können?
- 2) Ein (zu) einfaches Modell zum *Populationswachstum*: Mit $x(t)$ werde die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t bezeichnet. Man nimmt an, dass die Bevölkerungszunahme proportional zur vorhandenen Bevölkerung ist, also dass $\dot{x} = ax$ gilt. Berechne die Funktion $x(t)$. Was ergibt $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?
- 3) Löse die Differenzialgleichung: $\dot{x} = -6x + 15y$, $\dot{y} = 15x + 10y$, $x(0) = 19$ und $y(0) = 9$.
- 4) Bestimme alle Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ für die $\dot{x} = 17x - 4y$, $\dot{y} = 40x - 9y$, $x(0) = 0$ und $y(0) = 9$ gilt.
- 5) Löse die Differenzialgleichung: $\dot{x} = -x - 3y$, $\dot{y} = -12x + 4y$, $x(0) = 8$ und $y(0) = 2$.

- 6) Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definiere
- $$d_2(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$
- $$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \text{ und}$$
- $$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$
- Skizziere $B(0, 1)$ für jede dieser Metriken.
- 7) Betrachte $C([0, 1], \mathbb{R})$ mit der Metrik $d(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Berechne $d(x, x^2)$.
- 8) Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Metrik (also $d(x, y) := |x - y|$) offen, bzw. abgeschlossen sind (Beweise!).
- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| a) $[3, 7]$. | b) $[-1, 3)$. | c) $\mathbb{R}$. |
| d) $(-2, 5)$. | e) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$. | f) $[-4, 2] \cup (6, 8)$. |
| g) $(-\infty, 5) \cup (7, 8)$. | h) $[-\pi, \sqrt{2}]$. | i) $[1, 5] \cap \mathbb{Q}$. |
- 9) In diesem Beispiel sei der Grundraum $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik. Untersuche, ob folgende Mengen offen, bzw. abgeschlossen sind (Begründungen!).
- | | | |
|---|--|---------------------------------------|
| a) $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. | b) $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$. | c) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. |
| d) $(\pi, \infty) \cap \mathbb{Q}$. | e) $(-\infty, \sqrt{7}) \cap \mathbb{Q}$. | f) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. |
| g) $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ und } x^2 < 2\}$. | h) $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 < 5\}$. | |
- 10) Die Menge $\mathbb{R}$ sei mit der üblichen Metrik versehen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge U_n offen ist. Weiters bestimme $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, und untersuche ob diese Menge offen oder abgeschlossen ist (Beweise!).
- 11) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Bewerte die folgenden Aussagen mit „richtig“ oder „falsch“, und begründe diese Bewertungen.
- | |
|---|
| a) Wenn $U_1, U_2, \dots, U_n$ offen sind, dann ist auch $\bigcap_{j=1}^n U_j$ offen (endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen). |
| b) Falls $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener Mengen ist, dann ist auch $\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ offen (abzählbare Durchschnitte offener Mengen sind offen). |
| c) Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie (beliebig vieler) offener Mengen, so ist auch $\bigcap_{j \in J} U_j$ offen (beliebige Durchschnitte offener Mengen sind offen). |
- 12) Betrachte einen metrischen Raum (M, d) . Bewerte die folgenden Aussagen mit „richtig“ oder „falsch“, und begründe diese Bewertungen.
- | |
|--|
| a) Wenn $U_1, U_2, \dots, U_n$ offen sind, dann ist auch $\bigcup_{j=1}^n U_j$ offen (endliche Vereinigungen offener Mengen sind offen). |
|--|

- b) Falls $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener Mengen ist, dann ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ offen (abzählbare Vereinigungen offener Mengen sind offen).
- c) Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie (beliebig vieler) offener Mengen, so ist auch $\bigcup_{j \in J} U_j$ offen (beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen).
- 13) Zeige mit Hilfe der Definition der Abgeschlossenheit mittels konvergenter Folgen, dass folgende Eigenschaften in einem metrischen Raum (M, d) gelten.
- a) Sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $\bigcap_{j \in J} A_j$ abgeschlossen (beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).
- b) Falls $A_1, A_2, \dots, A_n$ abgeschlossene Mengen sind, dann ist auch die Menge $\bigcup_{j=1}^n A_j$ abgeschlossen (endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).
- 14) Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume, sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine Funktion, und sei $x_0 \in M_1$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- (1) Die Funktion f ist stetig in x_0 .
 - (2) Zu jeder offenen Menge $U \subseteq M_2$, für die die Eigenschaft $f(x_0) \in U$ gilt, gibt es eine offene Menge $V \subseteq M_1$ mit $x_0 \in V$ und $V \subseteq f^{-1}(U)$.
 - (3) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.
- Anleitung:* Zeige $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$. Führe den Beweis für $(3) \implies (1)$ indirekt.
- 15) Zeige, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- 16) Beweise, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
- 17) Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume, sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine stetige Funktion, und sei $B \subseteq M_1$ zusammenhängend. Zeige, dass $f(B)$ zusammenhängend ist.
- 18) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nach oben halbstetig* in $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Falls f in jedem $x \in M$ nach oben halbstetig ist, dann heißt f nach oben halbstetig (auf M).
- Betrachte $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik. Zeige, dass die Funktion
- $$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
- nach oben halbstetig ist. Ist f auch stetig? Untersuche, ob die Funktion
- $$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
- nach oben halbstetig ist.

- 19) Es sei (C, d) ein kompakter metrischer Raum, und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine nach oben halbstetige Funktion. Beweise dass f ein Maximum besitzt, also dass es ein $m \in C$ gibt, das $f(m) = \max\{f(x) : x \in C\}$ erfüllt.
- 20) Gib ein Beispiel eines kompakten metrischen Raumes (C, d) und einer nach oben halbstetigen Funktion $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, die kein Minimum besitzt.
- 21) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und der Punkt $x_0 \in (a, b)$ erfülle $|f'(x_0)| < 1$. Zeige, dass es ein $q < 1$ und ein offenes Intervall U mit $x_0 \in U$ und $\overline{U} \subseteq (a, b)$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in \overline{U}$ gilt.
Anleitung: Verwende die Stetigkeit von f' und den Mittelwertsatz.
- 22) Beweise den folgenden *Satz*:
 Sei $T : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und $x_0 \in (a, b)$ erfülle $Tx_0 = x_0$ und $|T'x_0| < 1$. Dann gibt es ein offenes Intervall $U \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in U$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$ für alle $x \in U$ gilt.
Anleitung: Verwende Beispiel 21) und den Banach'schen Fixpunktsatz.
- 23) Zeige den folgenden *Satz*, der besagt, dass das Newtonverfahren gegen die Nullstelle konvergiert, wenn man genügend nahe dieser Nullstelle startet:
 Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, und $x_0 \in (a, b)$ erfülle $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein offenes Intervall $U \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in U$, sodass für alle $x \in U$ die durch $x_1 := x$ und $x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ für $n > 1$ definierte Folge $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ erfüllt.
Anleitung: Wende Beispiel 22) auf die Funktion $Tx := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ an.
- 24) Betrachte die Differenzialgleichung $x\dot{x} = 6xt^3 + 3xt^2$. Zeige, dass die durch $x(t) = 7t^3$ definierte Funktion eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.
- 25) Beweise, dass die Funktion $x(t) = e^{2t} \sin t - 2e^{3t} + (t+2)e^{5t}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $x^{(3)} = 9\ddot{x} - 25\dot{x} + 25x + 8e^{3t} + 10e^{5t}$ ist.
- 26) Die Funktion $x : (-\infty, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $x(t) := \frac{1}{t-5}$ definiert. Zeige, dass x eine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = -x^2$ ist.
- 27) Betrachte die *Wellengleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Zeige, dass die durch $u(x, t) = x^2 + c^2 t^2$ definierte Funktion eine Lösung der Wellengleichung ist.
- 28) Die Funktion u sei durch $u(x, t) = \sin x \cos(ct)$ definiert. Beweise, dass u eine Lösung der *Wellengleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ist.

- 29) Zeige, dass die Funktion $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}$ eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung* $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ist.
- 30) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = t^7 \sin t^4$, $x(0) = 0$.
- 31) Mit Hilfe der „Variation der Konstanten“ bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 3x + 8e^{7t}$.
- 32) Bestimme die Lösung der folgenden Differenzialgleichungen mit Hilfe der „Variation der Konstanten“.
- a) $\dot{x} = -5x + 8e^{-3t}$, $x(0) = 7$. b) $\dot{x} + 6x = 4e^{-6t}$, $x(0) = 5$.
- 33) Verwende die Methode der „Variation der Konstanten“ um die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 4x + 10e^{5t} \cos 3t$ zu bestimmen.
- 34) Die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen ist mit Hilfe der „Variation der Konstanten“ zu bestimmen.
- a) $\dot{x} = 5x + 6e^{7t}$. b) $\dot{x} = 5x - 8e^{-3t}$.
- c) $\dot{x} = 5x + 6e^{7t} - 8e^{-3t}$.
- d) Besteht ein Zusammenhang der Lösungen von Beispiel a), b) und c)?
- 35) Bestimme die allgemeine Lösung von $\dot{x} = -3x + 4te^{-2t} \sin t$ mit Hilfe eines passenden Ansatzes.
- 36) Mit Hilfe eines passenden Ansatzes bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 6x + 8t^3 e^{4t}$.
- 37) Verwende einen passenden Ansatz um die allgemeine Lösung von $\dot{x} = 4x + (2t + 5)e^{4t}$ zu bestimmen.
- 38) Sei $a \in \mathbb{R}$, und $f_1, f_2, \dots, f_n$ seien Funktionen. Für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sei x_j eine Lösung von $\dot{x} = ax + f_j$. Beweise, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Funktion $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ eine Lösung von $\dot{x} = ax + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ ist.
- 39) Unter Verwendung eines passenden Ansatzes bestimme die allgemeinen Lösungen der Differenzialgleichungen in Beispiel 34).
Anleitung: Um c) zu lösen ziehe die Lösungen von a) und b) heran und verwende Beispiel 38).

- 40) Betrachte die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$.
- Zeige, dass die Funktion $x(t) = t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.
 - Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
 - Finde alle Lösungen dieser Differenzialgleichung, die $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ erfüllen.
- 41) Berechne die allgemeine Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} -6 & 28 & 8 \\ -4 & 11 & -1 \\ 4 & -14 & -2 \end{pmatrix} x$.
- 42) Löse das Differenzialgleichungssystem $\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = 5x_2 + x_3$, $\dot{x}_3 = 5x_3 + x_4$, $\dot{x}_4 = 5x_4$, $x_1(0) = c_1$, $x_2(0) = c_2$, $x_3(0) = c_3$, $x_4(0) = c_4$. Wie sieht diese Differenzialgleichung in Vektorform aus?
Anleitung: Löse zuerst die letzte Gleichung, verwende diese Lösung um die vorletzte Gleichung zu lösen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis alle Gleichungen gelöst sind.
- 43) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung
- $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 13 & -11 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & -6 \\ -16 & 0 & 0 & 18 & -10 \\ -28 & 0 & 0 & 20 & -10 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
- 44) Berechne die Lösung von $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 52 \\ -132 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.
- 45) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} x + t^2 e^{5t} \begin{pmatrix} 356 \\ -495 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- 46) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung
- $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + t e^{3t} \begin{pmatrix} -38 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$
- 47) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung
- $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & -52 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 4 & -72 & 15 \end{pmatrix} x + t e^{3t} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$
- 48) Berechne die Lösung der Differenzialgleichung
- $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 48 & 21 & -39 \\ 18 & 5 & -13 \end{pmatrix} x + e^{3t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
- 49) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x + e^{6t} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}$.
- 50) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -42 & 14 \end{pmatrix} x + e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$.

- 51) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} x + t^2 e^{6t} \sin(2t) \begin{pmatrix} -125 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

- 52) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + t e^{2t} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 53) Finde alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + t e^{2t} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- 54) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 52 \\ -2 & 17 \end{pmatrix} x + e^{7t} \sin(2t) \begin{pmatrix} 44 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 55) Berechne die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6e^{5t} \\ e^t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- 56) Löse die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -6 \\ 29 & -11 & 2 \\ -9 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + e^{-6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 57) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -24 & 1 \end{pmatrix} x = 0.$$

- 58) Finde die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $x^{(3)} + 8\ddot{x} + \dot{x} - 42x = 0$.

- 59) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 23\ddot{x} - 62\dot{x} + 34x = 0.$$

- 60) Betrachte die Differenzialgleichung $\ddot{x} + x = 0$.

- Finde die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
- Löse diese Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
- Welche Lösung dieser Differenzialgleichung erfüllt $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$?

- 61) Für die Differenzialgleichung $\ddot{x} - x = 0$ löse folgende Aufgaben.

- Bestimme die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
- Löse diese Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
- Finde diejenige Lösung dieser Differenzialgleichung, für die $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt sind.

- 62) Berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen.

- $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 1258 e^{3t} \sin(2t).$
- $x^{(3)} - \ddot{x} - 44\dot{x} + 84x = 60e^{3t}.$
- $\ddot{x} - 3\dot{x} - 10x = 14e^{5t} - 10e^{3t}.$
- $x^{(3)} - 19\ddot{x} + 135\dot{x} - 325x = 40e^{5t}.$
- $x^{(4)} - x^{(3)} - 18\ddot{x} + 52\dot{x} - 40x = 20580 t^2 e^{2t}.$

- 63) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.
- $\ddot{x} - 11\dot{x} + 28x = 578te^{3t}\sin t$, $x(0) = 4$, $\dot{x}(0) = 3$.
 - $x^{(3)} - 17\ddot{x} + 116\dot{x} - 222x = 0$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 13$, $\ddot{x}(0) = -7$.
 - $x^{(3)} - \ddot{x} - 40\dot{x} + 112x = 726te^{4t}$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = -9$, $\ddot{x}(0) = 11$.
 - $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 7e^{2t}$, $x(0) = 7$, $\dot{x}(0) = 2$.
- 64) In gewissen physikalischen Systemen (Feder; Saite, die zum Schwingen gebracht werden soll; Brücke; ...) wirkt auf einen Massenpunkt, der aus der Ruhelage ausgelenkt wird, eine Kraft, die proportional zur Auslenkung ist und versucht ihn wieder in die Ruhelage zu bringen. Dadurch erfährt dieser Punkt eine Beschleunigung in Richtung der Ruhelage, die proportional zur Auslenkung ist (und umgekehrt proportional zur Masse). Ein eindimensionales Modell für den obigen Vorgang kann man folgendermaßen erhalten. Die Ruhelage sei in 0, die Position unseres Punktes zur Zeit t sei $x(t)$. Dann erhalten wir $\ddot{x}(t) = -ax(t)$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Finde eine Formel für $x(t)$.
- 65) Nehmen wir an auf das System aus Beispiel 64) wirkt eine äußere Schwingung ein. Um möglichst einfach zu bleiben sagen wir, es sei $b > 0$ und unsere Differenzialgleichung lautet jetzt $\ddot{x}(t) = -ax(t) + \sin(bt)$. Löse diese Differenzialgleichung. Gibt es gewisse Werte von b , bei denen sich die Lösung „dramatisch“ von den Lösungen für andere b unterscheidet? Was bedeutet das in der Praxis? Ändert sich prinzipiell etwas an der Lösung, wenn man die Störfunktion $\sin(bt)$ durch $\alpha_1 \cos(bt) + \alpha_2 \sin(bt)$ ersetzt?
- 66) Bei dem System in Beispiel 64) haben wir die Reibung nicht berücksichtigt. Diese Kraft wirkt proportional zur Geschwindigkeit und in die entgegengesetzte Richtung. Man erhält die Differenzialgleichung $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t)$, wobei auch $r \geq 0$ eine Konstante ist. Löse diese Differenzialgleichung.
- 67) Ähnlich wie in Beispiel 65) untersuchen wir jetzt das System aus Beispiel 66) unter einer äußeren Schwingung, also $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + \sin(bt)$. Was lässt sich über die Lösung sagen? Schließlich untersuche den Fall, dass es sich bei dem äußeren Einfluss um eine „gedämpfte Schwingung“ handelt, das heißt $\ddot{x}(t) = -ax(t) - r\dot{x}(t) + e^{-dt}\sin(bt)$ für ein $d \geq 0$.
- 68) Zwei Armeen kämpfen miteinander. Die Anzahl der KämpferInnen der ersten Armee zum Zeitpunkt t sei $x_1(t)$, jene der KämpferInnen der zweiten Armee zum Zeitpunkt t sei $x_2(t)$. Zum Zeitpunkt 0 habe die erste Armee ξ_1 KämpferInnen und die zweite Armee ξ_2 KämpferInnen, wobei $\xi_1 > 0$ und $\xi_2 > 0$ seien. Weiters seien $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$, und es gelten $\dot{x}_1(t) = -\alpha_2 x_2(t)$ und $\dot{x}_2(t) = -\alpha_1 x_1(t)$, sofern $x_1(t) > 0$ und $x_2(t) > 0$. Löse diese Differenzialgleichung. Interpretiere das Ergebnis.
- 69) Finde die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 28x^2 \cos(4t)$, $x(0) = \frac{1}{9}$.

- 70) Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{36e^{2t}}{6x^2 + 1}$, $x(0) = 2$.
- Bestimme die Lösung dieser Differentialgleichung.
 - Zeige, dass $\left| \frac{36e^{2t}}{6x^2 + 1} \right| \leq 36e^{10} \leq 795\,000$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
 - Verwende die Menge $\overline{B}(2, 100\,000\,000) \times [-5, 5]$ um zu beweisen, dass diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung auf $[-5, 5]$ besitzt.
 - Zeige, dass die Lösung $|x(5)| \leq 4\,000\,000$ erfüllt. Ist es möglich diese Abschätzung zu beweisen ohne die Lösung dieser Differentialgleichung zu kennen?
- 71) Für die Differentialgleichung $\dot{x} = -\frac{3t \sin t^2}{x}$, $x(0) = 2$ löse die folgenden Aufgaben.
- Zeige, dass $\left| -\frac{3t \sin t^2}{x} \right| \leq \frac{9}{5}$ für alle $(x, t) \in \overline{B}(2, 1) \times \left[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right]$ gilt.
 - Finde ein Intervall I , sodass die Differentialgleichung auf I eine eindeutige Lösung hat (exakte Begründungen!).
- 72) Finde eine Lösung der Differentialgleichung aus Beispiel 71).
- 73) Berechne die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = 6x^5 t^2 e^{t^3}$.
- 74) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{x}{1 + t^2}$.
- 75) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{7t \sin t}{x^3}$, $x(0) = 3$.
- 76) Finde die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{7x}{t^2 + 3t - 10}$, $x(1) = 3$.
- 77) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{4e^{-5x}}{t^2 - 6t + 13}$.
- 78) Berechne die Lösungen der Differentialgleichung $(15x^2 \sin t - e^{3t})\dot{x} = 3xe^{3t} - 5x^3 \cos t$.
- 79) Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{12e^{-4t} - 2te^x}{t^2 e^x}$.
- 80) Finde die orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar $y = cx$ (Geradenschar durch 0, die Gleichung kann man als $\frac{y}{x} = c$ schreiben).
- 81) Löse die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{7t^5 e^{t^7} - 6 \sin x}{3t \cos x}$.
Anleitung: Suche einen von x unabhängigen integrierenden Faktor.

- 82) Bestimme die Lösungen der Differenzialgleichung $(3 - 7xt^3)\dot{x} = 3x^2t^2$.
Anleitung: Suche einen von t unabhängigen integrierenden Faktor.
- 83) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 3xt^2 - 18t^2 \sin t^3$.
- 84) Finde die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = -\frac{3x}{t} + \sin t$.
- 85) Bestimme die Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = 14x \cos(2t) + 25t^4 e^{7 \sin(2t)}$, $x(0) = 3$.
- 86) Löse die Differenzialgleichung $\dot{x} + t^2 x = 7t^5 x^4$, $x(0) = \frac{1}{2}$.
Hinweis: Bernoullische Differenzialgleichung.
- 87) Finde die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = 12x + 9e^{2t} \sqrt[3]{x}$.
Hinweis: Bernoullische Differenzialgleichung.
- 88) Berechne die Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} - 5x = 2250t^2 x^7$, $x(0) = 1$.
Hinweis: Bernoullische Differenzialgleichung.
- 89) Bestimme die Fixpunkte der Differenzialgleichung
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 e^{x_1 - 7} - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 17x_2 + 155. \end{aligned}$$
 Weiters untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.
- 90) Von der Differenzialgleichung
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1^2 - x_2^2 - 99x_1 + 706, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - 19, \end{aligned}$$
 berechne die Fixpunkte und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.
- 91) Betrachte die Differenzialgleichung
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 27x_1 + 97e^{4x_2 - 12} - 20x_3 + 97, \\ \dot{x}_2 &= 6 - 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 48x_1 + 31x_2^2 - 35x_3 + 62. \end{aligned}$$
 Berechne die Fixpunkte dieser Differenzialgleichung und untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.
- 92) Finde die Fixpunkte der Differenzialgleichung
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10x_2^2 - 2x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 16x_2 + 7. \end{aligned}$$
 Außerdem untersuche das Verhalten der Lösungen dieser Differenzialgleichung in der Nähe der Fixpunkte.

- 93) Betrachte die Funktion $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $Tz := z^2$.
- Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n z = 0$ für alle z mit $|z| < 1$ gilt.
 - Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n z = \infty$ für alle z mit $|z| > 1$ gilt.
 - Bestimme alle Fixpunkte von T . Welche davon sind stabil, welche nicht stabil?
 - Bestimme die Menge aller Punkte, deren ω -Limes kein stabiler Fixpunkt ist.
- 94) Wie in Beispiel 93) sei $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch $Tz := z^2$ definiert. Wie groß ist die topologische Entropie von T .
- 95) Definiere die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$Tx := \begin{cases} 1 - 2x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 2x - \frac{1}{3}, & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{17}{9} - \frac{4}{3}x, & \text{für } x \in [\frac{2}{3}, \frac{11}{12}], \\ \frac{4}{3}x - \frac{5}{9}, & \text{für } x \in [\frac{11}{12}, 1]. \end{cases}$$

Diese Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt.

- Bestimme die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T)$.
- Gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?
- Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

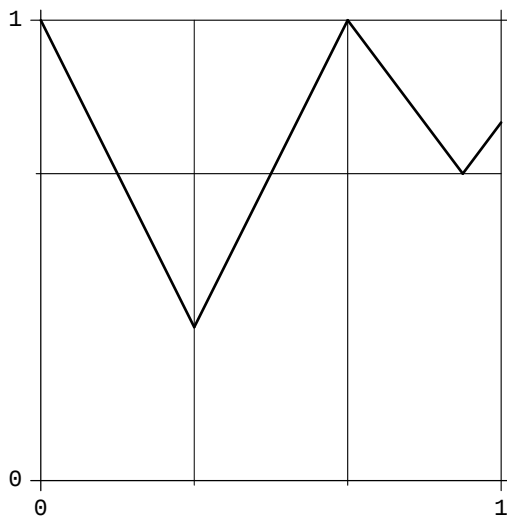


Abbildung 1. Die Abbildung T aus Beispiel 95).

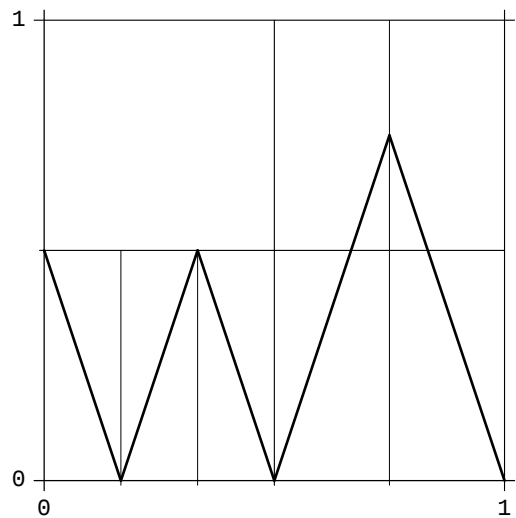


Abbildung 2. Die Abbildung T aus Beispiel 96).

- 96) Die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sei durch

$$Tx := \begin{cases} \frac{1}{2} - 3x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{6}], \\ 3x - \frac{1}{2}, & \text{für } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}], \\ \frac{3}{2} - 3x, & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ 3x - \frac{3}{2}, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 3 - 3x, & \text{für } x \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

definiert (siehe Abbildung 2).

a) Bestimme die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T)$.

b) Gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?

c) Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

97) Betrachte die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, die durch

$$Tx := \begin{cases} 1 - 3x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{7}{4}x - \frac{7}{12}, & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{9}], \\ \frac{7}{2} - \frac{7}{2}x, & \text{für } x \in [\frac{7}{9}, 1], \end{cases}$$

definiert ist (siehe Abbildung 3). Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

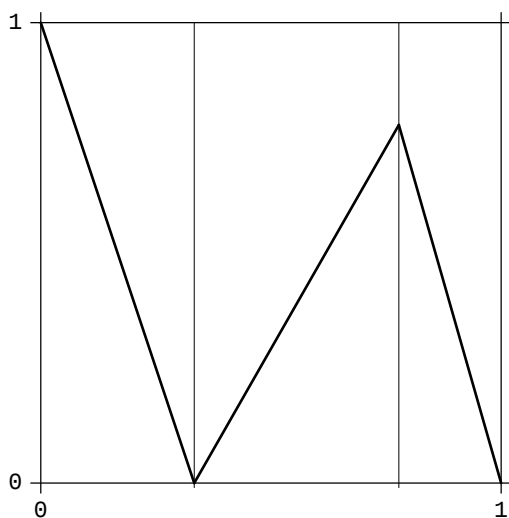


Abbildung 3. Die Abbildung T aus Beispiel 97).

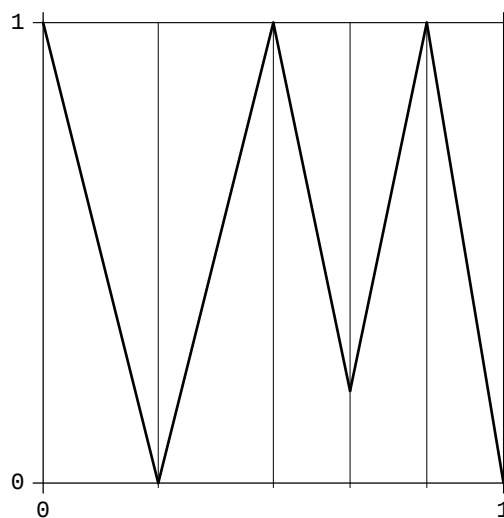


Abbildung 4. Die Abbildung T aus Beispiel 98).

98) Definiere die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch (siehe Abbildung 4)

$$Tx := \begin{cases} 1 - 4x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 4x - 1, & \text{für } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \frac{17}{5} - \frac{24}{5}x, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \\ \frac{24}{5}x - 3, & \text{für } x \in [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}], \\ 6 - 6x, & \text{für } x \in [\frac{5}{6}, 1]. \end{cases}$$

a) Gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$?

b) Gilt $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \leq p(T, f)$ für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

99) Berechne.

- a) $(1 + 5i)(3 - 4i)$. b) $\frac{39 + 4i}{7 - 2i}$. c) $\sqrt{5 + 12i}$.
 d) $e^{2\pi i}$. e) $2e^{\frac{\pi i}{4}}$. f) $\frac{39 + 2i}{5 - 6i}$.
 g) Die Lösung von $(2 + 5i)z^2 - (42 + 18i)z + (80 + 55i) = 0$.
 h) Die Lösung von $z^4 = 16i$.
Hinweis: Rechne in Polarkoordinaten.

100) Bei den folgenden Funktionen gib maximale Teilmengen von $\mathbb{C}$ an, auf denen sie (komplex) differenzierbar sind. Was ist ihre Ableitung?

- a) $f(z) := e^z$. b) $f(z) := \frac{1}{z}$.
 c) $f(z) := \frac{1}{(z - (5 - 2i))^8}$. d) $f(z) := z^2 e^{(1+3i)z} \cos(2iz^3 - 6)$.
 e) $f(z) := z^2 \sin \frac{1}{z}$. f) $f(z) := \frac{z}{z^2 - 1}$.

101) Zeige, dass die Funktion $f(z) := |z|$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ nicht (komplex) differenzierbar ist.
Anleitung: Verwende die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen.

102) Berechne das Kurvenintegral von z^2 entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 5 um $3 + 2i$ mittels direkter Rechnung.

103) Mittels direkter Rechnung berechne das Kurvenintegral der folgenden Funktionen entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 2 um 0.

- a) $f(z) := z^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
 b) $f(z) := \frac{1}{z}$.
 c) $f(z) := \frac{1}{z^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

104) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Weiters gib alle $z \in \mathbb{C}$ an, für die diese Potenzreihe konvergiert.

105) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Bestimme ihren Konvergenzradius und gib alle $z \in \mathbb{C}$ an, für die diese Potenzreihe konvergiert. Mit welcher Funktion stimmt diese Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzgebietes überein?

106) Berechne die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktionen, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

- a) $f(z) := e^{z-8}$ um 3. b) $f(z) := \frac{1}{z-7}$ um 4.
 c) $f(z) := \sin z$ um $\frac{\pi}{2}$. d) $f(z) := e^{z-i}$ um $5 + 2i$.

107) Berechne.

- | | | |
|----------------------|--------------------------|------------------|
| a) $\log(-2)$. | b) i^{2i} . | c) 2^i . |
| d) $(1+i)^{(1+i)}$. | e) $\log(1+i\sqrt{3})$. | f) $(e^\pi)^i$. |

108) Löse die folgenden Aufgaben für die Funktion $f(z) := \frac{5}{z-4}$.

- Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 7, bei der 0 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
- Gib die Laurentreihenentwicklung von f um 7 an, bei der 5 im Konvergenzgebiet liegt, und bestimme das entsprechende Konvergenzgebiet.

109) Für die Funktion $f(z) := \frac{3}{z-2+5i}$ löse folgende Aufgaben.

- Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um $4+2i$, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
- Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um $4+2i$, bei der $10i$ im Konvergenzgebiet liegt, und gib den entsprechenden Konvergenzbereich an.

110) Die Funktion f sei durch $f(z) := \frac{1}{z-1}$ definiert.

- Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 0, bei der $\frac{1}{2}$ im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
- Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 0, bei der 2 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
- Die Funktion f hat in 0 offensichtlich keine Singularität, trotzdem gilt für die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in Beispiel b), dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$. Wieso ist das möglich?

111) Betrachte die Funktion $f(z) := \frac{5z^2 - 37z + 129}{z^3 - 16z^2 + 77z - 98}$.

- Berechne die Partialbruchzerlegung von f .
- Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 7, bei der 0 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
- Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 7, bei der 5 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
- Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 7?
- Bestimme $\lim_{z \rightarrow 7} f(z)$.

112) Es sei die Funktion f durch $f(z) := \frac{7z - 155}{z^2 - 82z - 255}$ definiert.

- Bestimme alle isolierten Singularitäten von f . Sei z_0 diejenige isolierte Singularität von f deren Betrag minimal ist.
- Gib die Laurentreihenentwicklung von f um z_0 an, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und bestimme den entsprechenden Konvergenzbereich.
- Finde die Laurentreihenentwicklung von f um z_0 , bei der 100 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

- d) Welche Art von Singularität von f liegt im Punkt z_0 vor?
- e) Berechne $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
- 113) Löse folgende Aufgaben für die Funktion $f(z) := \frac{2z^2 + 19z - 1407}{z^3 - 29z^2 + 119z + 1445}$.
- Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 17, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
 - Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 17, bei der 50 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
 - Welche Art von Singularität besitzt die Funktion f im Punkt 17?
 - Welchen Wert ergibt $\lim_{z \rightarrow 17} f(z)$?
- 114) Definiere die Funktion f durch $f(z) := \frac{e^z - 1}{z}$.
- Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
 - Welche Art von Singularität besitzt f im Punkt 0?
 - Berechne $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.
- 115) Die Funktion f sei durch $f(z) := z^2 \sin \frac{1}{z}$ definiert.
- Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
 - Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?
 - Bestimme $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.
- 116) Betrachte die Funktion f , die durch $f(z) := e^{-\frac{1}{z^2}}$ definiert ist.
- Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
 - Welche Art von Singularität besitzt f im Punkt 0?
 - Berechne $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.
- 117) Es sei die Funktion f durch $f(z) := \frac{2z - 6 - 24i}{z^2 + 2z - 15}$ definiert. Berechne das Kurvenintegral von f entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 4 um den Mittelpunkt $2 + 3i$.
- 118) Für die Funktion f , die durch $f(z) := \frac{2z - 5}{z^2 - 11z + 28}$ definiert ist, berechne das Kurvenintegral von f entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 3 um $5 + i$.
- 119) Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$.
- 120) Welchen Wert ergibt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2}{x^6 + 1} dx$?