Proseminar zu
Lineare Algebra und Geometrie für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2012/2013

Karl Auinger
Armin Rainer
Peter Raith

1) Es sei $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

a) Zeige, dass durch $\|x\|_\infty := \max\Big\{|x_j| : j \in \{1, 2, \dots, n\}\Big\}$ eine Norm definiert ist.

b) Beweise, dass durch $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ eine Norm gegeben ist.

2) Für die folgenden Vektoren x berechne $\|x\|_1$, $\|x\|_2 = |x|$ und $\|x\|_\infty$.

a) $x := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$.   b) $x := \begin{pmatrix} 24 + 7i \\ 5 - 12i \\ -3 + 4i \\ 40 + 9i \end{pmatrix}$.   c) $x := \begin{pmatrix} 3 \\ 29 \\ 1 \\ -3 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3) Auf $C\big([0, 5], \mathbb{R}\big)$ definiere die Normen $\|f\|_1 := \int_0^5 |f(x)|\, dx$, $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^5 |f(x)|^2\, dx}$ und $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,5]} |f(x)|$. Berechne $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ und $\|f\|_\infty$ für $f(x) := 15x^2$.

4) Berechne auf $C\big([0, 6], \mathbb{R}\big)$ mit $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,6]} |f(x)|$ für die folgenden Funktionen f ihre Norm $\|f\|_\infty$.

a) $f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.   b) $f(x) := x^3 - 9x^2 + 15x + 29$.

c) $f(x) := 24x + 3x^2 - x^3$.   d) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 60x - 35$.

5) Von den Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 3+5i \\ -4-7i \\ 2+3i \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2+i \\ 5-2i \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$ berechne das innere Produkt $\langle v_1, v_2 \rangle$.

6) Zeige, dass durch $\langle f, g \rangle := \int_0^9 f(x)g(x)\,dx$ für $f, g \in C\big([0,9], \mathbb{R}\big)$ ein inneres Produkt auf $C\big([0,9], \mathbb{R}\big)$ gegeben ist.

7) Betrachte $C\big([0,9], \mathbb{R}\big)$ mit dem in Beispiel 6) definierten inneren Produkt. Für $f(x) := 2x$ und $g(x) := x^4$ bestimme $\langle f, g \rangle$, $\|f\|_2$, $\|g\|_2$, sowie den Winkel zwischen f und g.

8) In $\mathbb{R}^3$ gib die Orthogonalräume $M^\perp$ der folgenden Teilräume M an.

a) $M := \left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

b) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \right\}$.

9) Sei V ein (beliebig dimensionaler) Vektorraum mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$. Beweise die folgenden Aussagen.

a) Falls M ein Teilraum von V ist, dann gilt $M \subseteq \left(M^\perp\right)^\perp$.

b) Für alle Teilräume M_1 und M_2 von V gilt $(M_1 + M_2)^\perp = {M_1}^\perp \cap {M_2}^\perp$.

c) Es gilt ${M_1}^\perp + {M_2}^\perp \subseteq (M_1 \cap M_2)^\perp$ für alle Teilräume M_1 und M_2 von V.

10) Zeige, dass auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V mit innerem Produkt über $\mathbb{R}$ die Eigenschaft $(M_1 \cap M_2)^\perp = {M_1}^\perp + {M_2}^\perp$ für alle Teilräume M_1 und M_2 von V gilt.

11) Der Raum $V := \{a_1 \cos x + a_2 \sin x : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ werde als Teilraum von $C\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ mit dem inneren Produkt $\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ betrachtet. Zeige, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \right\}$$

eine Orthonormalbasis von V ist.

12) Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachte den Raum

$$V_n := \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(2\pi j x) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(2\pi j x) : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

als Teilraum von $C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ mit dem inneren Produkt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Beweise, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{B} := \Big\{ 1, \sqrt{2}\cos(2\pi x), \sqrt{2}\cos(4\pi x), \ldots, \sqrt{2}\cos(2\pi n x), \\ \sqrt{2}\sin(2\pi x), \sqrt{2}\sin(4\pi x), \ldots, \sqrt{2}\sin(2\pi n x) \Big\} \end{aligned}$$

eine Orthonormalbasis von V_n bildet.

13) Auf $\mathbb{R}^3$ betrachte die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$.

a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist.

b) Stelle $v := \left(\begin{smallmatrix}4\\-7\\8\end{smallmatrix}\right)$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

14) In $\mathbb{R}^4$ betrachte die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix}3\\0\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-8\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-5\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$. Gib diejenige Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ an, die man durch Anwendung des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens auf $\mathcal{B}$ erhält.

15) Man betrachte das innere Produkt $\langle f, g\rangle := \int_1^5 f(x)g(x)\,dx$ auf $C\big([1,5],\mathbb{R}\big)$. Wende das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf $\{1, x, x^2\}$ an.

16) Es sei V_n der in Beispiel 12) definierte Teilraum von $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit dem dort definierten innerem Produkt auf $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Unter Verwendung der in Beispiel 12) angegebenen Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ bestimme die Orthogonalprojektion von $f(x) := x - x^2$ auf V_n.

17) Zeige, dass es zu jeder reellen $n \times n$-Matrix A eine eindeutig bestimmte symmetrische Matrix B und eine eindeutig bestimmte schiefsymmetrische Matrix C gibt, sodass die Eigenschaft $A = B + C$ gilt.
Bemerkung: Analog gibt es zu jeder komplexen $n \times n$-Matrix A eine eindeutig bestimmte Hermite'sche Matrix B und eine eindeutig bestimmte schief-Hermite'sche Matrix C mit $A = B + C$.

18) Sei $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$). Definiere $A := (a_{j,k})_{j,k=1}^n$ durch $a_{j,k} := \langle e_k, e_j\rangle$, wobei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) ist.

a) Beweise, dass $\langle x, y\rangle = y^t A x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\langle x, y\rangle = y^* A x$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$) gilt.

b) Weiters zeige, dass A symmetrisch (bzw. Hermite'sch) ist.

c) Schließlich zeige, dass A positiv definit ist.

19) Betrachte eine reelle symmetrische (bzw. komplexe Hermite'sche) $n \times n$-Matrix A. Man beweise, dass durch $\langle x, y\rangle := y^t A x$ (bzw. $\langle x, y\rangle := y^* A x$) genau dann ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) definiert wird, wenn A positiv definit ist.

20) a) Zeige, dass $A := \begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 11\end{pmatrix}$ positiv definit ist.

b) Für $A := \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -11\end{pmatrix}$ zeige, dass A negativ definit ist.

21) Untersuche ob die folgenden Matrizen symmetrisch, bzw. orthogonal, bzw. normal sind.

a) $A := \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$ b) $A := \begin{pmatrix} 13 & -2 & 29 \\ -2 & 3 & 16 \\ 29 & 16 & -39 \end{pmatrix}.$

c) $A := \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 18 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -18 \\ -18 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 18 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$ d) $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 5 \\ -5 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 7 & -6 \\ 6 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

e) $A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$ f) $A := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$

22) Welche der folgenden Matrizen sind Hermite'sch, bzw. unitär, bzw. normal?

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 4-6i & 7+9i \\ 4+6i & -1 & -2-i \\ 7-9i & -2+i & 5 \end{pmatrix}.$ b) $A := \begin{pmatrix} 9+2i & -1+5i & -4+4i \\ -7+i & -1+5i & 1+7i \\ 2+2i & -5-7i & 5+5i \end{pmatrix}.$

c) $A := \begin{pmatrix} 21 & 42 & 28 & 49 \\ -56 & 41 & -42 & 28 \\ 7 & -28 & 257 & -174 \\ 42 & 56 & -169 & -37 \end{pmatrix}.$ d) $A := \begin{pmatrix} 2+i & 4i & 3-2i \\ 3+2i & 6+2i & 1-2i \\ -4i & 1+2i & 4 \end{pmatrix}.$

e) $A := \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3+i & 7 & -4+3i & 6+i \\ 7 & 3+i & 6+i & -4+3i \\ 6-i & -4-3i & -7 & -3+i \\ 4+3i & -6+i & 3-i & 7 \end{pmatrix}.$

f) $A := \begin{pmatrix} -2+2i & -3-3i & 4-6i \\ -5+3i & -2+2i & -6i \\ 6i & -4+6i & -5+2i \end{pmatrix}.$

23) Berechne die folgenden Determinanten.

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 6 & 7 \\ 4 & 25 & 9 & 36 & 49 \\ 8 & 125 & -27 & 216 & 343 \\ 16 & 625 & 81 & 1296 & 2401 \end{pmatrix}.$ b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & -27 & 125 \end{pmatrix}.$

c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1+i & 3 & 2-3i \\ 4 & 2i & 9 & -5-12i \\ 8 & -2+2i & 27 & -46-9i \end{pmatrix}.$ d) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 16 & 4 \\ 27 & -8 & 64 & 8 \end{pmatrix}.$

24) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weiters seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ mit $x_j \neq x_k$ für $j \neq k$, und es seien $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$. Bei der *Lagrange-Interpolation* sucht man ein Polynom $p(x)$ (über K) vom Grad $\leq (n-1)$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Indem man das Polynom allgemein anschreibt und ein entsprechendes Gleichungssystem aufstellt, beweise man, dass es ein eindeutig bestimmtes Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq (n-1)$ gibt, das die Bedingung $p(x_j) = y_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ erfüllt.

25) Gib einen anderen Beweis für das Resultat aus Beispiel 24), indem man

$$p(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

definiert (exakt argumentieren!).

26) Finde jeweils Polynome $p(x)$ vom Grad ≤ 2, die folgende Bedingungen erfüllen. Weiters gib den Grad von p an.

a) $p(0) = 3$, $p(-1) = 10$, $p(2) = 1$.

b) $p(0) = -5$, $p(1) = -2$, $p(4) = 7$.

27) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und sei A eine komplexe $k \times n$-Matrix.

a) Beweise, dass A^*A und AA^* Hermite'sch und positiv semidefinit sind.
Bemerkung: Für reelle Matrizen sind also A^tA und AA^t symmetrisch und positiv semidefinit.

b) Falls $k = n$ gilt und A invertierbar ist, zeige, dass dann A^*A und AA^* positiv definit sind.
Bemerkung: Ähnlich kann man zeigen, dass für $k \leq n$ und $\operatorname{rg} A = k$ die Matrix AA^* positiv definit ist, und für $n \leq k$ und $\operatorname{rg} A = n$ die Matrix A^*A positiv definit ist. Dazu verwendet man, dass $\operatorname{rg}(A^*A) = \operatorname{rg}(AA^*) = \operatorname{rg} A$ gilt.

28) Welche der folgenden Mengen M sind affine Teilräume des angegebenen affinen Raumes? Gib auch die Dimension von M an. Dabei ist stets $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ für das passende n.

a) $M := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $M := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 2x_4 = 2 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

c) $M := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 - 6x_1 - 16x_2 + 48 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

d) $M := \left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

e) $M := \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ 5x_1 - 15x_2 - 2x_3 - 12x_4 + 19x_5 = 6 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

f) $M := \{x \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + 16{x_2}^2 + 9{x_3}^2 + 8x_1x_2 - 6x_1x_3 - 24x_2x_3 - 14x_1 + {} - 56x_2 + 42x_3 + 49 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

g) $M := \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 29x_4 + 25x_5 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - 14x_3 - 7x_4 + 8x_5 = 7 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

29) Untersuche, welche Möglichkeiten es für die Lage zweier Geraden in der Ebene gibt.

30) Im dreidimensionalen Raum untersuche die Möglichkeiten, wie eine Gerade und eine Ebene liegen können.

31) Bei den folgenden Abbildungen $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untersuche, ob sie affine Abbildungen sind.
a) $T(x) := 5x - 3$. b) $T(x) := x^2$. c) $T(x) := e^{3x}$.
d) $T(x) := 3x$. e) $T(x) := 8$. f) $T(x) := \sin x$.

32) Für die folgenden Punkte berechne die Teilverhältnisse.

a) $\mathrm{DR}\left(\begin{pmatrix}9\\-37\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-21\\8\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-13\\-4\end{pmatrix}\right)$.
b) $\mathrm{DR}\left(\begin{pmatrix}3\\-16\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}11\\5\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-10\\7\end{pmatrix}\right)$.

c) $\mathrm{DR}\left(\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-18\\-7\end{pmatrix}\right)$.
d) $\mathrm{DR}\left(\begin{pmatrix}-5\\9\\-13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}9\\-19\\22\end{pmatrix}\right)$.

e) $\mathrm{DR}\left(\begin{pmatrix}-19\\1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\8\\-13\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-3\\6\\-7\end{pmatrix}\right)$.
f) $\mathrm{DR}\left(\begin{pmatrix}-7\\5\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-5\\7\\7\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}5\\-3\\6\\5\end{pmatrix}\right)$.

33) Man bestimme das Doppelverhältnis $\mathrm{CR}(a, b; x, y)$ für die folgenden Punkte a, b, x und y.

a) $a := \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix}11\\-13\end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix}-7\\14\end{pmatrix}$.

b) $a := \begin{pmatrix}-16\\7\\-23\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}5\\-14\\19\end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix}2\\-11\\13\end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix}-2\\-7\\5\end{pmatrix}$.

c) $a := \begin{pmatrix}-25\\-7\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix}55\\33\end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix}-13\\-1\end{pmatrix}$.

d) $a := \begin{pmatrix}-37\\-13\\25\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}5\\8\\-17\end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix}33\\22\\-45\end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix}-7\\2\\-5\end{pmatrix}$.

e) $a := \begin{pmatrix}-7\\-4\\1\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}9\\8\\-7\end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix}-31\\-22\\13\end{pmatrix}$.

34) a) Finde eine Parameterdarstellung des durch $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \qquad\;\; - 2x_4 &= 5, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 + 6x_4 &= 7, \end{aligned}$ gegebenen affinen Teilraums M von $\mathbb{R}^4$ und gib $\dim M$ an.

b) Bestimme eine „Normalvektorform" (also eine Gleichung) des affinen Teilraums M von $\mathbb{R}^4$, der durch $M := \left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\3\\5\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}3\\-6\\7\\8\end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ gegebenen ist, und gib dessen Dimension an.

35) Berechne den Abstand von $\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$ von der durch $14x_1 - 3x_2 + 18x_3 + 433 = 0$ gegebenen Ebene.

36) Es seien $a = \left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass $\langle a \times b, a\rangle = 0$ und $\langle a \times b, b\rangle = 0$ gelten.

b) Weiters zeige, dass $|a \times b|$ die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.
Anleitung: Verwende die in der Vorlesung hergeleitete Formel $A = \sqrt{|a|^2|b|^2 - \langle a, b\rangle^2}$ für die Fläche A des von a und b aufgespannten Parallelogramms. Berechne daraus A^2 und zeige, dass dieser Wert gleich $|a \times b|^2$ ist.

37) Man berechne den Abstand der Geraden $\begin{pmatrix}-3\\-7\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\-3\\-6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-4\\6\\-7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

38) Bestimme den Abstand der Geraden $\begin{pmatrix}-9\\2\\-5\\-19\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\4\\9\\-2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}19\\8\\7\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\6\end{pmatrix}$.

39) Berechne den Abstand der Geraden $\begin{pmatrix}4\\9\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix}$ von der Ebene, die durch die Gleichung $13x_1 + 18x_2 - 6x_3 + 285 = 0$ bestimmt ist.

40) Für die folgenden Punkte p und die Hyperebenen M berechne den Abstand von p zu M.

a) $p := \begin{pmatrix}7\\5\\-9\\9\end{pmatrix}$, $M := \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 52 = 0\right\}$.

b) $p := \begin{pmatrix}5\\6\\3\\-4\end{pmatrix}$, $M := \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 11x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 - 682 = 0\right\}$.

c) $p := \begin{pmatrix}8\\-4\\9\\8\\2\\5\end{pmatrix}$, $M := \left\{x \in \mathbb{R}^6 : 5x_1 - 6x_2 + 17x_3 + 2x_4 - 11x_5 + 3x_6 + 258 = 0\right\}$.

41) Um welche Bewegungen handelt es sich in den folgenden Fällen? Dabei soll auch etwa der Mittelpunkt einer Drehung, die Spiegelungsachse und/oder der Verschiebungsvektor parallel zur Spiegelungsachse angegeben werden.

a) $T(x) := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. b) $T(x) := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

42) In $\mathbb{R}^4$ bestimme den Abstand der durch $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegebenen Geraden von der Ebene, die durch $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

43) a) Gib die der $7x_1 - 4x_2 = 41$ entsprechende projektive Gerade an. Was ist der Fernpunkt dieser Geraden?
b) Finde die affine Gerade, die der Geraden $14x_0 + 5x_1 + 8x_2 = 0$ entspricht.

44) a) Welche affine Ebene entspricht der Ebene $10x_0 - 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0$?
b) Man gebe die der Ebene $5x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 15 = 0$ entsprechende projektive Ebene an.

45) Für die folgenden Punkte a, b, x und y im entsprechenden projektiven Raum berechne das Doppelverhältnis $\mathrm{CR}(a,b;x,y)$.

a) $a := \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \ b := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ x := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \ y := \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}$.

b) $a := \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \ b := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \ x := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ y := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) $a := \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \ b := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \ x := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ y := \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

46) Nachdem man (zumindest einfache) affine und projektive Geometrie über beliebigen Körpern betrachten kann, ist auch die affine und projektive Geometrie über $\mathbb{Q}$ möglich. Kann man auch euklidische Geometrie über $\mathbb{Q}$ betrachten (inneres Produkt, Betrag)? Wo könnte es Probleme geben? Wenn es Probleme gibt, lassen sich diese nur durch Einführung der reellen Zahlen lösen oder gibt es auch andere Möglichkeiten?
Bemerkung: Von den Überlegungen zu diesem Beispiel soll der Zahlenwert eines Winkels explizit ausgenommen sein! Um diesen zu definieren sind Überlegungen zur Fläche und Bogenlänge von Kreisen oder passenden Teilen von Kreisen notwendig, die in die Analysis gehören.

47) Wieviele Polynome mit rationalen Koeffizienten gibt es?
Hinweis: Die Antwort „unendlich viele" ist zu ungenau, und wird deshalb nicht als richtige Antwort gewertet.

48) Eine $k \times k$-Matrix A über K besitze den Eigenwert $\lambda \in K$. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Matrix A^n den Eigenwert λ^n besitzt.

49) Betrachte eine $n \times n$-Matrix A über einen Körper K und sei $\lambda \in K$. Beweise, dass λ genau dann ein Eigenwert von A^t ist, wenn λ ein Eigenwert von A ist.

50) Für eine $n \times n$-Matrix A über K nennt man einen Zeilenvektor $v \in K^n$ (in diesem Beispiel ist mit K^n die Menge der Zeilenvektoren mit n Eintragungen von Elementen aus K gemeint) *linker Eigenvektor* von A zum linken Eigenwert $\lambda \in K$, falls $v \neq 0$ und $vA = \lambda v$ gilt (für dieses Beispiele werden die üblichen Eigenwerte und Eigenvektoren rechter Eigenwert und rechter Eigenvektor genannt, weiters lassen wir hier 0 nicht als Eigenvektor zu). Zeige, dass ein $\lambda \in K$ genau dann ein linker Eigenwert von A ist, wenn λ ein rechter Eigenwert von A ist. Wie kann man linke Eigenvektoren von A berechnen?
Hinweis: Verwende Beispiel 49).

51) Von den folgenden Matrizen A bestimme das charakteristische Polynom $p(x)$. Weiters berechne $p(A)$.

a) $A := \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$

b) $A := \begin{pmatrix} -18 & -57 & 51 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -16 & 9 \end{pmatrix}.$

c) $A := \begin{pmatrix} 5 & -9 & -10 \\ 37 & -45 & -46 \\ -29 & 33 & 33 \end{pmatrix}.$

52) Finde die Nullstellen der folgenden Polynome.
a) $p(x) := x^4 - x^3 - 43x^2 + 85x - 42\,.$
b) $p(x) := x^5 - 17x^4 + 68x^3 + 308x^2 - 2253x + 3285\,.$
c) $p(x) := x^4 - 18x^3 + 88x^2 - 512\,.$
d) $p(x) := x^4 - 24x^3 - 1550x^2 + 16800x - 42875\,.$

53) Für die folgenden Polynome berechne die Nullstellen.
a) $p(x) := x^4 - 6x^3 + 454x - 1281\,.$
b) $p(x) := x^4 + 6x^3 - 376x^2 - 3654x - 7497\,.$
c) $p(x) := x^6 - 53x^4 - 16x^3 - 897x^2 - 9216x - 16443\,.$

54) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen. Weiters untersuche welche dieser Matrizen diagonalisierbar sind.

a) $A := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}.$

b) $A := \begin{pmatrix} -27 & 8 & 74 \\ -99 & 37 & 229 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$

55) Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar? Gib ihre Eigenwerte und Eigenvektoren an.

a) $A := \begin{pmatrix} 82 & 60 & -30 \\ 60 & 26 & -30 \\ -30 & -30 & 9 \end{pmatrix}.$ b) $A := \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

56) Von den folgenden Matrizen bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

a) $A := \begin{pmatrix} 18 & -12 & -12 \\ 16 & -10 & -12 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$ b) $A := \begin{pmatrix} 17 & -12 & -9 \\ 14 & -9 & -9 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$

57) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen. Außerdem untersuche, ob sie diagonalisierbar sind.

a) $A := \begin{pmatrix} 27 & -30 \\ 16 & -17 \end{pmatrix}.$ b) $A := \begin{pmatrix} 48 & 12 & -140 \\ -85 & -23 & 270 \\ 5 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$

58) Für die folgenden Differenzengleichungen finde die entsprechende Matrix A der „Matrixdarstellung der Differenzengleichung“. Anschließend bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, und nütze die Ergebnisse um die Differenzengleichung zu lösen.

a) $x_n := 7x_{n-1} - 12x_{n-2}\,,\ x_0 := 1$ und $x_1 := 8\,.$

b) $x_n := \frac{7}{5}x_{n-1} - \frac{2}{5}x_{n-2}\,,\ x_0 := 12$ und $x_1 := 9\,.$ Berechne auch $\lim_{n\to\infty} x_n\,.$

c) $x_n := 11x_{n-1} - 31x_{n-2} + 21x_{n-3}\,,\ x_0 := 5\,,\ x_1 := 9$ und $x_2 := 69\,.$

59) Gib bei den folgenden Differenzengleichungen die entsprechende Matrix A der „Matrixdarstellung der Differenzengleichung“ an, und berechne deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Weiters finde die Lösungen dieser Differenzengleichungen.

a) $x_n := \frac{11}{5}x_{n-1} - \frac{38}{25}x_{n-2} + \frac{8}{25}x_{n-3}\,,\ x_0 := 13\,,\ x_1 := 9$ und $x_2 := 7\,.$ Berechne auch $\lim_{n\to\infty} x_n\,.$

b) $x_n := 16x_{n-1} - 75x_{n-2} + 108x_{n-3}\,,\ x_0 := 2\,,\ x_1 := 6$ und $x_2 := 48\,.$

60) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

a) $A := \begin{pmatrix} 8 & -5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$ b) $A := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -3 & 0 \\ -4 & 24 & -24 & 5 \end{pmatrix}.$

c) $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -15 & 8 & 0 & 0 \\ -30 & 18 & 6 & 5 & 0 \\ 6 & -14 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$ d) $A := \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -8 & 6 & -30 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$

61) Falls K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_n(K)$ sind, dann nennt man A *ähnlich* zu B, falls es eine invertierbare Matrix $S \in M_n(K)$ gibt, sodass $B = S^{-1}AS$.
   a) Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $M_n(K)$ definiert wird.
   b) Welche Matrizen sind ähnlich zu einer Diagonalmatrix?
   c) Finde alle Matrizen, die ähnlich zur Einheitsmatrix sind.

62) Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Weiters seien $A, B \in M_n(K)$ und $S \in M_n(K)$ sei eine invertierbare Matrix, sodass $B = S^{-1}AS$ gilt. Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Eigenschaft $B^n = S^{-1}A^nS$ gilt.

63) Setze $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Zeige, dass $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und dass $A_2 = S^{-1}A_1S$ gilt (also die Matrizen A_1 und A_2 sind ähnlich).
   b) Berechne die Eigenwerte von A_1B und A_2B.
   c) Sind A_1B und A_2B ähnlich?

64) Soferne A_2 ähnlich zu A_1 und B_2 ähnlich zu B_1 sind, ist dann auch A_2B_2 ähnlich zu A_1B_1? Begründe die Antwort.

65) Von der Matrix $A := \begin{pmatrix} 3-4i & -8+6i \\ -2-i & 3+6i \end{pmatrix}$ bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren. Weiters untersuche, ob A diagonalisierbar ist.

66) Betrachte den Körper $\mathbb{Z}_{17}$ der Restklassen modulo 17. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A := \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 1 & 13 & 12 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Ist A diagonalisierbar?
Hinweise: Auch für Polynome in $\mathbb{Z}_{17}$ kann man das Horner-Schema verwenden. Man probiert am besten der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots, 15, 16$. Beachte, dass man hier nicht verwenden kann, dass die Nullstelle ein Teiler des konstanten Glieds ist (alle Elemente außer 0 teilen das konstante Glied)! Es ist eher günstig hier auch beim quadratischen Polynom mit dem Horner-Schema weiterzurechnen (in $\mathbb{Z}_{17}$ kann man zwar auch die Lösungsformel für die quadratische Gleichung verwenden, aber man muss die dabei auftretende Wurzel in $\mathbb{Z}_{17}$ lösen).

67) Für $A := \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 & 7 \\ -17 & 38 & 27 & -62 \\ -13 & 37 & 21 & -61 \\ -12 & 32 & 21 & -54 \end{pmatrix}$ berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren. Stelle fest, ob A diagonalisierbar ist.

68) Es sei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix. Beweise, dass A genau dann eine Orthogonalprojektion ist, wenn alle Eigenwerte von A in $\{0, 1\}$ liegen (also A nur 0 und 1 als Eigenwerte hat).

69) Zeige, dass die folgenden Matrizen positiv definit sind.

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 10 & 3 & -8 \\ 2 & 3 & 14 & -7 \\ -3 & -8 & -7 & 17 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 35 & -5 & 3 \\ 2 & -6 & -5 & 11 & -3 \\ -1 & 3 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

70) In einer Urne befinden sich 8 gelbe, 3 blaue und 2 rote Kugeln. Die SpielerInnen A und B spielen das folgende Spiel. In jeder Runde zieht der/die SiegerIn der vorigen Runde eine Kugel aus der Urne und legt sie wieder zurück. Falls A am Zug ist, so gewinnt er/sie, wenn er/sie eine gelbe Kugel zieht, ansonst gewinnt B. Ist dagegen B am Zug, so gewinnt er/sie, soferne er/sie eine blaue Kugel zieht, ansonst gewinnt A. Vor der ersten Runde wird ausgelost, wer in der ersten Runde zieht, wobei A mit Wahrscheinlichkeit p diese Auslosung gewinnt.

a) Bestimme die Matrix $P := \begin{pmatrix} p_{A,A} & p_{A,B} \\ p_{B,A} & p_{B,B} \end{pmatrix}$, wobei $p_{J,K}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass K gewinnt, wenn J zieht.

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $p(n) := \begin{pmatrix} p_{n,A} & p_{n,B} \end{pmatrix}$ der Zeilenvektor, der beschreibt mit welcher Wahrscheinlichkeit die SpielerInnen den $(n+1)$-ten Zug haben, also $p_{n,J}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass J den $(n+1)$-ten Zug hat. Überlege, dass $p(n) = p(n-1)P$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weiters gib $p(0)$ an.

c) Zeige, dass $p(n) = p(0)P^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

71) Betrachte das in Beispiel 70) beschriebene Spiel. Ebenso seien die Matrix P und die Zeilenvektoren $p(n)$ wie in Beispiel 70).

a) Bestimme die linken Eigenwerte und linken Eigenvektoren von P.

b) Stelle $p(0)$ bezüglich der linken Eigenvektoren von P dar. Leite daraus dann eine Formel für $p(n)$ her.

c) Berechne $\lim_{n\to\infty} p(n)$.

d) Was bedeutet das Ergebnis von Beispiel c)? Versuche vernünftige Interpretationen zu finden.

72) Es sei A eine reelle 3×3-Matrix. Zeige, dass A einen reellen Eigenwert besitzt.

73) Von den folgenden Matrizen berechne die Jordan'sche Normalform. Gib zu jedem Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

a) $A := \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -15 & 12 & -20 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 40 & 7 & -5 \\ -29 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

74) Man gebe die Jordan'sche Normalform der Matrix $A := \begin{pmatrix} 15 & 7 & -11 & -16 \\ 14 & 10 & -12 & -18 \\ 13 & 7 & -9 & -16 \\ 7 & 4 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ an. Außerdem soll für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit angegeben werden.

75) Finde die möglichen Jordan'schen Normalformen für Matrizen mit den folgenden Eigenschaften.
  a) Eine 3×3-Matrix, die 6 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2 hat.
  b) Eine 5×5-Matrix, die 8 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2 und -3 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1 hat.
  c) Eine 4×4-Matrix, die 7 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2 hat.

76) Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix $A := \begin{pmatrix} 10 & 6 & -17 \\ 2 & 5 & -5 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$. Weiters finde eine Basis bezüglich der diese Matrix diese Jordan'sche Normalform hat. Für jeden Eigenwert gib die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

77) Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 44 & 31 & -65 & -21 & 15 \\ -23 & -13 & 36 & 77 & 20 \\ 15 & 12 & -21 & 35 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 18 \end{pmatrix}$ bestimme die Jordan'sche Normalform und gib für jeden Eigenwert dessen algebraische und geometrische Vielfachheit an.

78) Gib die möglichen Jordan'schen Normalformen für Matrizen mit den folgenden Eigenschaften an.
  a) Eine 5×5-Matrix, die 3 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4 und 8 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 hat.
  b) Eine 6×6-Matrix, die 5 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3, 12 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 und -8 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 hat.
  c) Eine 8×8-Matrix, die $7+2i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4, $-3+8i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und $6-3i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 hat.

79) Welche Jordan'sche Normalformen sind für Matrizen mit den folgenden Eigenschaften möglich?
  a) Eine 5×5-Matrix, die 2 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 3 und -9 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 hat.
  b) Eine 7×7-Matrix, die $3+5i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 5 und $8-3i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 hat.
  c) Eine 8×8-Matrix, die 5 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 6 und geometrischer Vielfachheit 2 und $4-7i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 hat.

80) Von $A := \begin{pmatrix} -25 & 3 & 75 \\ -3 & 10 & 0 \\ -9 & 2 & 26 \end{pmatrix}$ finde die komplexe und die reelle Jordan'sche Normalform.

81) Für reelle Matrizen mit den folgenden Eigenschaften finde die möglichen komplexen und reellen Jordan'schen Normalformen.

a) Eine 5×5-Matrix, die $3i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und -8 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 hat.

b) Eine 8×8-Matrix, die $7 + 3i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4 hat.

82) Es sollen die möglichen komplexen und reellen Jordan'schen Normalformen für reelle Matrizen mit den folgenden Eigenschaften angegeben werden.

a) Eine 7×7-Matrix, die $4 - 9i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und 5 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 hat.

b) Eine 8×8-Matrix, die $5 + 7i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2 und $-6+2i$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 hat.

83) Betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 53 & -62 & 4 \\ 18 & -15 & -4 \\ -58 & 88 & -23 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die komplexe Jordan'sche Normalform von A. Weiters gebe man eine Basis an bezüglich der diese Matrix diese Jordan'sche Normalform hat. Außerdem bestimme für jeden Eigenwert dessen algebraische und geometrische Vielfachheit.

b) Gib die reelle Jordan'sche Normalform von A an. Weiters finde eine Basis bezüglich der diese Matrix diese Jordan'sche Normalform hat.

84) Berechne die komplexen und die reellen Jordan'schen Normalformen der folgenden Matrizen.

a) $A := \begin{pmatrix} 32 & -114 & 58 \\ -8 & 21 & -6 \\ -33 & 103 & -43 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} -37 & 0 & 26 \\ 24 & -1 & -14 \\ -73 & 1 & 50 \end{pmatrix}$.

85) Schreibe die folgenden Hyperflächen 2. Ordnung in Matrixform (also finde eine symmetrische Matrix A, einen Vektor a und eine Zahl a_0, sodass man die Gleichung der Hyperfläche 2. Ordnung als $x^tAx + a^tx + a_0 = 0$ schreiben kann).

a) $$5{x_1}^2 + 47{x_2}^2 + 23{x_3}^2 + 285{x_4}^2 - 30x_1x_2 + 20x_1x_3 + 70x_1x_4 - 64x_2x_3 + \\ - 222x_2x_4 + 144x_3x_4 + 30x_1 - 110x_2 + 92x_3 + 246x_4 + 65 = 0\,.$$

b) $$2{x_1}^2 + 21{x_2}^2 + 57{x_3}^2 + 7{x_4}^2 + 12x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_1x_4 + 66x_2x_3 + \\ - 30x_2x_4 - 58x_3x_4 + 28x_1 + 60x_2 + 20x_3 - 96x_4 - 60 = 0\,.$$

c) $2{x_1}^2 + 15{x_2}^2 + 30{x_3}^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 20x_2x_3 - 52x_1 - 286x_2 - 312x_3 + 1521 = 0\,.$

86) In $\mathbb{R}^4$ betrachte die durch $x^t \begin{pmatrix} 87 & -35 & -55 & -5 \\ -35 & 143 & 3 & -71 \\ -55 & 3 & 151 & 37 \\ -5 & -71 & 37 & 63 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -8 \\ -440 \\ -248 \\ 120 \end{pmatrix}^t x + 480 = 0$ gegebene Hyperfläche 2. Ordnung.

a) Finde den Mittelpunkt dieser Hyperfläche 2. Ordnung.

b) Berechne die Polare zu $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

87) Es sei M die Hyperfläche 2. Ordnung aus Beispiel 86) und sei $p := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass p auf M liegt (also, dass $p \in M$ gilt).
b) Gib die Tangentialhyperebene an M im Punkt p an.

Soferne es möglich ist ohne Hauptachsentransformation bei der affinen Klassifikation von Kurven und Flächen 2. Ordnung die Kurve oder Fläche genau zu beschreiben, so soll das bei der Frage nach Art der Kurve oder Fläche auch getan werden. Erkennt man etwa, dass es sich um zwei schneidende Geraden handelt, so sollen die Gleichungen dieser beiden Geraden bestimmt werden, tritt zum Beispiel eine Gerade auf, so ist die Gleichung dieser Geraden anzugeben.

88) Welche Art von Kurve 2. Ordnung wird durch folgende Gleichungen beschrieben?
a) $25{x_1}^2 + 36{x_2}^2 + 60x_1x_2 + 160x_1 + 192x_2 + 256 = 0$.
b) $57{x_1}^2 + 112{x_2}^2 + 48x_1x_2 + 150x_1 - 752x_2 - 4079 = 0$.
c) $x_1x_2 - x_1 - 1 = 0$.
d) $21{x_1}^2 - 15{x_2}^2 + 26x_1x_2 - 466x_1 - 58x_2 + 2009 = 0$.

89) Um welche Art von Kurve 2. Ordnung handelt es sich bei den folgenden Gleichungen?
a) $50{x_1}^2 + 17{x_2}^2 + 6x_1x_2 + 346x_1 - 282x_2 + 1961 = 0$.
b) $13{x_1}^2 + 28{x_2}^2 + 112x_1x_2 - 578x_1 - 784x_2 + 241 = 0$.
c) $16{x_1}^2 + 49{x_2}^2 - 56x_1x_2 - 192x_1 + 336x_2 - 324 = 0$.
d) $4{x_1}^2 + 65{x_2}^2 - 32x_1x_2 + 216x_1 - 876x_2 + 2971 = 0$.

90) Finde die Gleichungen der Tangenten an die Kurve 2. Ordnung aus Beispiel 89) b), die durch $p := \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ gehen, und gib die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve an.

Bei der Frage nach den Brennpunkten einer Kurve 2. Ordnung ist im Fall einer Parabel gemeint, dass der Brennpunkt und die Gleichung der Leitlinie bestimmt wird. Selbstverständlich sind die Brennpunkte (oder Brennpunkt und Leitlinie) der ursprünglichen Kurve gemeint, nicht die der Kurve in 1. Hauptlage. Neben der 1. Hauptlage sind auch stets die „Kenngrößen“ (also a und b im Fall von Ellipsen oder Hyperbeln) anzugeben.

91) Betrachte die durch $48{x_1}^2 + 105{x_2}^2 + 176x_1x_2 - 144x_1 + 74x_2 + 2305 = 0$ gegebene Kurve 2. Ordnung.
a) Finde die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Außerdem bestimme die Brennpunkte dieser Kurve.
b) Gib eine Bewegung an, die diese Kurve in 1. Hauptlage abbildet.
c) Berechne die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung, die durch den Punkt $\begin{pmatrix} -17 \\ 3 \end{pmatrix}$ gehen, und gib die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve an.

92) Für die durch die Gleichung $95{x_1}^2 + 119{x_2}^2 - 70x_1x_2 - 660x_1 + 1092x_2 - 7236 = 0$ gegebene Kurve 2. Ordnung löse die folgenden Aufgaben.
   a) Berechne die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters finde die Brennpunkte dieser Kurve.
   b) Gib die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung an, die durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ gehen, und finde die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve.

93) Sei durch $288{x_1}^2 + 145{x_2}^2 - 24x_1x_2 - 4152x_1 + 1618x_2 - 23039 = 0$ eine Kurve 2. Ordnung gegeben.
   a) Bestimme die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters gib die Brennpunkte dieser Kurve an.
   b) Man gebe eine Bewegung an, durch die diese Kurve in 1. Hauptlage abgebildet wird.
   c) Finde die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung, die durch $\begin{pmatrix} 24 \\ -5 \end{pmatrix}$ gehen. Außerdem sollen die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve bestimmt werden.

94) Löse folgende Aufgaben für die durch $48{x_1}^2 - 17{x_2}^2 + 72x_1x_2 - 720x_1 - 12x_2 + 3228 = 0$ gegebene Kurve 2. Ordnung.
   a) Es soll die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung gefunden werden. Außerdem sollen die Brennpunkte dieser Kurve bestimmt werden.
   b) Gib die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung an, die durch $\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$ gehen, und berechne die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve.

95) Durch $64{x_1}^2 + 225{x_2}^2 + 240x_1x_2 - 19052x_1 + 6038x_2 + 34569 = 0$ sei eine Kurve 2. Ordnung gegeben.
   a) Finde die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters gib die Brennpunkte dieser Kurve an.
   b) Man finde eine Bewegung, die diese Kurve in 1. Hauptlage abbildet.
   c) Bestimme die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung, die durch $\begin{pmatrix} 36 \\ 65 \end{pmatrix}$ gehen, und gib die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve an.

96) Betrachte die durch $32{x_1}^2 + 65{x_2}^2 - 56x_1x_2 + 424x_1 - 614x_2 + 473 = 0$ gegebene Kurve 2. Ordnung.
   a) Bestimme die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters finde die Brennpunkte dieser Kurve.
   b) Gib die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung an, die durch $p := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ gehen, und bestimme die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve. Weiters berechne die Fläche des Dreiecks, das als Eckpunkte p, sowie die Berührungspunkte der obigen Tangenten mit der Kurve hat.

97) Für die durch $105{x_1}^2 - 192{x_2}^2 + 304x_1x_2 - 2714x_1 + 5136x_2 + 10945 = 0$ gegebene Kurve 2. Ordnung sollen folgende Aufgaben gelöst werden.
   a) Gib die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung an. Außerdem bestimme die Brennpunkte dieser Kurve.
   b) Finde eine Bewegung, die diese Kurve in 1. Hauptlage abbildet.
   c) Berechne die Gleichungen der Tangenten an diese Kurve 2. Ordnung, die durch den Punkt $\begin{pmatrix} -43 \\ -12 \end{pmatrix}$ gehen, und gib die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve an.

98) Die affine Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch $T(x) := \dfrac{1}{12\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -45 \\ 53 \end{pmatrix} \right)$ definiert.
   a) Berechne die Umkehrabbildung von T.
   b) Bestimme das Bild der Kurve 2. Ordnung aus Beispiel 96) unter T.
      Hinweis: Man erhält das Bild, falls man in $x^t A x + a^t x + a_0 = 0$ den Vektor x durch $T^{-1}(y)$ ersetzt.
   c) Finde die Brennpunkte des Bildes der Kurve aus Beispiel 96) unter T.
   d) Gib die Bilder der Brennpunkte der Kurve aus Beispiel 96) unter T an.
   e) Bildet ein affiner Isomorphismus (bijektive affine Abbildung) die Brennpunkte einer Ellipse auf die Brennpunkte des Bildes der Ellipse ab?

99) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung.
   a) Beweise, dass T die Brennpunkte einer Ellipse auf die Brennpunkte des Bildes der Ellipse abbildet.
   b) Zeige, dass T die Brennpunkte einer Hyperbel auf die Brennpunkte des Bildes der Hyperbel abbildet.

100) Um welche Art von Fläche 2. Ordnung handelt es sich bei den folgenden Gleichungen?
   a) $4{x_1}^2 + 25{x_2}^2 + 9{x_3}^2 + 20x_1x_2 + 12x_1x_3 + 30x_2x_3 - 40x_1 - 100x_2 - 60x_3 + 91 = 0\,.$
   b) $6{x_1}^2 + 49{x_2}^2 + 4{x_3}^2 + 36x_1x_2 + 24x_1x_3 + 52x_2x_3 + 48x_1 + 164x_2 + 136x_3 + 46 = 0\,.$
   c) $5{x_1}^2 + 7{x_2}^2 + 43{x_3}^2 + 10x_1x_2 - 30x_1x_3 - 26x_2x_3 - 60x_1 - 52x_2 + 148x_3 + 88 = 0\,.$
   d) $2{x_1}^2 + 7{x_2}^2 + 16{x_3}^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 18x_2x_3 + 20x_1 + 50x_2 - 58x_3 + 77 = 0\,.$

101) Gib an welche Art von Fläche 2. Ordnung durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird.
   a) $4{x_1}^2 + 17{x_2}^2 + 52{x_3}^2 + 16x_1x_2 - 24x_1x_3 - 40x_2x_3 - 24x_1 - 44x_2 + 80x_3 + 47 = 0\,.$
   b) $3{x_1}^2 + 48{x_2}^2 + 12{x_3}^2 + 24x_1x_2 - 12x_1x_3 - 48x_2x_3 + 24x_1 + 84x_2 - 52x_3 + 55 = 0\,.$
   c) $2{x_1}^2 + 5{x_2}^2 - 18{x_3}^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 + 24x_1 - 90x_2 + 170x_3 - 59 = 0\,.$
   d) $4{x_1}^2 + 16{x_2}^2 + 25{x_3}^2 - 16x_1x_2 + 20x_1x_3 - 40x_2x_3 - 32x_1 + 64x_2 - 80x_3 + 64 = 0\,.$
   e) $4{x_1}^2 + 7{x_2}^2 + 21{x_3}^2 - 8x_1x_2 - 12x_1x_3 + 24x_2x_3 + 84x_1 - 162x_2 - 282x_3 + 948 = 0\,.$

102) Betrachte die durch

$$712{x_1}^2 + 1476{x_2}^2 + 801{x_3}^2 + 888x_1x_2 - 492x_1x_3 + \\ - 396x_2x_3 - 5248x_1 - 696x_2 - 1140x_3 + 6856 = 0$$

gegebene Fläche 2. Ordnung. Führe eine Hauptachsentransformation durch.

103) Führe für die durch
$$404{x_1}^2 + 5164{x_2}^2 + 9{x_3}^2 - 2400x_1x_2 - 1320x_1x_3 + \\ + 3720x_2x_3 + 1056x_1 - 9736x_2 - 3462x_3 + 337 = 0$$
gegebene Fläche 2. Ordnung eine Hauptachsentransformation durch.

104) Welche Art von Fläche 2. Ordnung wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben?
a) $4{x_1}^2 + 39{x_2}^2 + 31{x_3}^2 + 24x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3 - 32x_1 - 90x_2 - 50x_3 + 91 = 0$.
b) $3{x_1}^2 + 10{x_2}^2 - 14{x_3}^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 24x_2x_3 + 42x_1 - 108x_2 - 28x_3 + 64 = 0$.
c) $4{x_1}^2 + 24{x_2}^2 + 6{x_3}^2 - 20x_1x_2 - 10x_1x_3 + 26x_2x_3 + 52x_1 - 124x_2 - 68x_3 + 160 = 0$.
d) $3{x_1}^2 + {x_2}^2 - 6{x_3}^2 - 6x_1x_2 + 12x_1x_3 - 24x_2x_3 + 36x_1 - 52x_2 + 18x_3 + 68 = 0$.
e) $2{x_1}^2 + 21{x_2}^2 + 11{x_3}^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 18x_2x_3 - 24x_1 + 96x_2 - 24x_3 + 96 = 0$.

105) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Hyperbel mit den Brennpunkten f_1 und f_2, und sei $p \in M$. Beweise, dass die Tangente an M im Punkt p gleich der durch p gehenden Winkelsymmetrale von $p - f_1$ und $p - f_2$ ist.
Hinweis: Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass M durch die Gleichung $\frac{1}{a^2}{x_1}^2 - \frac{1}{b^2}{x_2}^2 - 1 = 0$ gegeben ist.

Falls A und B nichtleere Mengen sind, $A_0 \subseteq A$ nichtleer ist und $f : A_0 \to B$ eine Funktion ist, dann versteht man unter dem *Graphen von* f die Menge
$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} : a \in A_0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in A \times B : a \in A_0 \text{ und } b = f(a)\right\}.$$
Soferne $A_0 \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A_0 \to \mathbb{R}$ gelten, kann der Graph von f als eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden.

106) Für die folgenden Funktionen f gib an, welche Kurve der Graph von f ist.
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$.
b) $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{x}$.

In den folgenden Beispielen ist nur der affine und projektive Typ der Kurven und Flächen 2. Ordnung zu bestimmen. Es ist nicht notwendig sie genau (etwa die Geradengleichung im Fall einer Geraden) anzugeben.

107) Gib die den angegebenen affinen Kurven 2. Ordnung entsprechenden projektiven Kurven 2. Ordnung an. Weiters bestimme ihren affinen und projektiven Typ.
a) ${x_1}^2 - 8{x_2}^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 + 30x_2 - 27 = 0$.
b) $4{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 4x_1x_2 - 12x_1 + 10x_2 + 28 = 0$.
c) $24{x_1}^2 + 45{x_2}^2 + 20x_1x_2 - 244x_1 - 510x_2 + 661 = 0$.
d) ${x_1}^2 + 9{x_2}^2 - 6x_1x_2 + 8x_1 - 24x_2 + 19 = 0$.

108) Finde die den angegebenen projektiven Kurven 2. Ordnung entsprechenden affinen Kurven 2. Ordnung, und gib ihren affinen und projektiven Typ an.
a) ${x_1}^2 + 9{x_2}^2 + 8{x_0}^2 + 6x_1x_2 - 9x_1x_0 - 27x_2x_0 = 0$.
b) $25{x_1}^2 + 16{x_2}^2 + 857{x_0}^2 + 40x_1x_2 - 886x_1x_0 + 636x_2x_0 = 0$.
c) $9{x_0}^2 + 8x_1x_0 - 5x_2x_0 = 0$.
d) $13{x_1}^2 - 27{x_2}^2 - 1508{x_0}^2 + 42x_1x_2 + 116x_1x_0 - 300x_2x_0 = 0$.

109) Von den angegebenen affinen Flächen 2. Ordnung bestimme die entsprechenden projektiven Flächen 2. Ordnung. Dabei soll auch deren affiner und projektiver Typ bestimmt werden.

a) $x_1{}^2 + 16x_2{}^2 + 4x_3{}^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3 + 12x_1 - 48x_2 + 24x_3 + 36 = 0\,.$

b) $3x_1{}^2 + 16x_2{}^2 + 5x_3{}^2 + 12x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3 + 12x_1 - 8x_2 - 32x_3 + 34 = 0\,.$

c) $2x_1{}^2 + 23x_2{}^2 + 13x_3{}^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 14x_2x_3 - 16x_1 - 28x_2 - 44x_3 + 39 = 0\,.$

110) Für die angegebenen projektiven Flächen 2. Ordnung sollen die entsprechenden affinen Flächen 2. Ordnung bestimmt und ihr affiner und projektiver Typ angegeben werden.

a) $x_1{}^2 + 7x_2{}^2 + 17x_3{}^2 + 28x_0{}^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3 - 6x_1x_0 - 6x_2x_0 - 26x_3x_0 = 0\,.$

b) $$\begin{aligned} &4x_1{}^2 + 13x_2{}^2 - 11x_3{}^2 + 19x_0{}^2 - 16x_1x_2 + 16x_1x_3 - 14x_2x_3 + \\ &\qquad\qquad + 24x_1x_0 - 36x_2x_0 + 12x_3x_0 = 0\,. \end{aligned}$$

c) $2x_1{}^2 - 4x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 2x_0{}^2 + 7x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1x_0 - 7x_2x_0 - 5x_3x_0 = 0\,.$

111) In einer Fabrik werden die beiden Produkte A und B hergestellt. Diese müssen zunächst an zwei Maschinen bearbeitet werden und dann im Lager gelagert werden, von wo sie am Ende der Woche ausgeliefert werden. An der ersten Maschine beträgt die Bearbeitungszeit für ein Stück A 15 Minuten und für ein Stück B 37 Minuten. Diese Maschine kann in einer Woche insgesamt 2331 Minuten verwendet werden. Die Bearbeitungszeit für ein Stück A an der zweiten Maschine beträgt 20 Minuten, für ein Stück B 13 Minuten. Dabei kann diese Maschine in einer Woche insgesamt 1760 Minuten verwendet werden. Ein Stück A benötigt 14 m^2 Lagerplatz, ein Stück B 19 m^2, wobei insgesamt 1430 m^2 Lagerplatz zur Verfügung stehen. Der Reingewinn beim Verkauf von einem Stück A beträgt 62 € und beim Verkauf von einem Stück B 104 €. Wieviel Stück von A und B müssen in einer Woche erzeugt werden, wenn der Reingewinn maximal werden soll, und wie groß ist dieser Reingewinn? Verwende die graphische Methode, um diese Aufgabe zu lösen.

112) Es werden die drei Produkte A, B und C in einer Fabrik hergestellt. Zuerst werden diese in der Halle 1 bearbeitet, dann in die Halle 2 transportiert und dort weiterbearbeitet, von der Halle 2 werden die Produkte ausgeliefert. Für ein Stück A beträgt die in der Halle 1 notwendige Bearbeitungszeit 3 Minuten, für ein Stück B 8 Minuten und für ein Stück C 8 Minuten. An einem Tag stehen in der Halle 1 insgesamt höchstens 432 Minuten für die Bearbeitung zur Verfügung. Um ein Stück A von der Halle 1 in die Halle 2 zu transportieren, werden 15 m^2 Transportplatz benötigt, für ein Stück B 22 m^2 und für ein Stück C 34 m^2. Dabei können an einem Tag Produkte, die insgesamt höchstens einen Transportplatz von 1620 m^2 benötigen, von der Halle 1 in die Halle 2 transportiert werden. In der Halle 2 beträgt die notwendige Bearbeitungszeit für ein Stück A 3 Minuten, für ein Stück B 6 Minuten und für ein Stück C 10 Minuten. Insgesamt stehen an einem Tag in der Halle 2 höchstens 420 Minuten für die Bearbeitung zur Verfügung. Der durch den Verkauf von einem Stück A erzielte Gewinn beträgt 29 €, bei einem Stück B sind es 57 € und bei einem Stück C 73 €. Wieviel Stück der Produkte A, B und C müssen an einem Tag erzeugt werden, damit der Gewinn maximal wird, und wie groß ist dieser Gewinn? Um diese Aufgabe zu lösen, verwende die Simplexmethode.