Proseminar zu Reelle Analysis in mehreren Variablen und Komplexe Analysis in einer Variablen für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Sommersemester 2015

Diego Grandi
Calin Iulian Martin
Peter Raith

1) Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit $d_1\Big(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\Big) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Zeige, dass d_1 eine Metrik ist.

2) Auf $\mathbb{R}^n$ definiere für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$d_\infty(x, y) := \max\Big\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\Big\}.$$

Beweise, dass d_∞ eine Metrik ist.

3) In $\mathbb{R}^2$ skizziere $B(0, 1)$ für die Metrik d_1 aus Beispiel 1), die in Beispiel 2) definierte Metrik d_∞ und die übliche Metrik (das heißt die Metrik $d_2(x, y) := |x - y|$).

4) Betrachte $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ mit der Metrik $d(f, g) := \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big|$. Berechne $d(x, x^2)$ und $d(x^2, x^3)$.

5) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $n \in \mathbb{N}$. Auf der Menge $C(X, \mathbb{R}^n)$ definiere $d(f, g) := \sup_{x\in X} \big|f(x) - g(x)\big|$. Zeige, dass d eine Metrik ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \big|f(x)\big|$ eine Norm auf $C(X, \mathbb{R}^n)$ ist.

6) Definiere auf $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ eine „Metrik“ d durch $d(f, g) := \int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|\, dx$. Zeige, dass d wirklich eine Metrik ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\|f\|_1 := \int_0^1 \big|f(x)\big|\, dx$ eine Norm ist. Dabei kann man statt $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ auch $C\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ verwenden, soferne die Integralgrenzen entsprechend geändert werden.

7) Betrachte den Raum $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit der in Beispiel 6) definierten Metrik d. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sei durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 5-15nx\,, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{3n}\right], \\ 4nx-3n+1\,, & \text{falls } x \in \left[\frac{3}{4}-\frac{1}{4n}, \frac{3}{4}\right], \\ 3n+1-4nx\,, & \text{falls } x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right], \\ 0\,, & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert.

a) Skizziere f_n.

b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ gilt (bezüglich der in Beispiel 6) definierten Metrik d).

c) Bestimme den punktweisen Grenzwert der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Grenzwert aus Beispiel b).

d) Gib ein Beispiel einer Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, die $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ in unserer Metrik d erfüllt, aber bei der $\lim\limits_{n\to\infty} g_n\big(\frac{1}{3}\big) = +\infty$ gilt.

8) Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$) offen, bzw. abgeschlossen sind (Begründungen geben).

a) $[3,7]$. b) $[-1,3)$. c) $(-6,2)\cup(11,14)$.

d) $\mathbb{R}$. e) $(-2,5)\cap\mathbb{Q}$. f) $(-\infty,4)\cup(8,17]$.

g) $[4,+\infty)$. h) $\mathbb{Q}$. i) $(5,12]\setminus\mathbb{Q}$.

9) Als Grundraum betrachte $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$). Welche der folgenden Teilmengen sind offen, bzw. abgeschlossen (Begründungen geben).

a) $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. b) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$. c) $\big(0,\sqrt{2}\big]\cap\mathbb{Q}$.

d) $\big(\sqrt{5},\pi\big)\cap\mathbb{Q}$. e) $\big(-\sqrt{11},+\infty\big)\cap\mathbb{Q}$. f) $\big[\sqrt{7},3\big]\cap\mathbb{Q}$.

10) In $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Metrik untersuche (Begründungen geben), welche der folgenden Teilmengen offen, bzw. abgeschlossen sind (dabei ist stets $x = \binom{x_1}{x_2}$).

a) $\left\{x\in\mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-8}{3}\right)^2 < 1\right\}$.

b) $\left\{x\in\mathbb{R}^2 : |x| \le 3\right\} \cup \left\{x\in\mathbb{R}^2 : (x_1+18)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 < 1\right\}$.

c) $\left\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ und } x_1x_2 = 1\right\}$. d) $\left\{x\in\mathbb{R}^2 : 3x_1+5x_2 \ge 15\right\}$.

e) $\left\{x\in\mathbb{R}^2 : 5x_1+8x_2 > 40\right\} \cup \left\{x\in\mathbb{R}^2 : |x| \le 2\right\}$.

11) Für die Mengen aus Beispiel 8), Beispiel 9) und Beispiel 10) bestimme den Abschluss, das Innere und den Rand.

12) Die Menge $\mathbb{R}$ sei mit der üblichen Metrik versehen. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $U_n := \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$. Zeige, dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Menge U_n offen ist. Weiters bestimme $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, und untersuche ob diese Menge offen oder abgeschlossen ist (Beweise!).

13) Zeige mit Hilfe der Definition der Abgeschlossenheit mittels konvergenter Folgen, dass folgende Eigenschaften in einem metrischen Raum (M,d) gelten.
   a) Sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $\bigcap_{j\in J} A_j$ abgeschlossen (beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).
   b) Falls $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen sind, dann ist auch die Menge $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ abgeschlossen (endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

14) Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung (im Sinne der linearen Algebra). Zeige, dass φ stetig ist.

15) Betrachte den Raum $M_n(\mathbb{R})$ aller reeller $n \times n$-Matrizen. Als Menge können wir $M_n(\mathbb{R})$ als $\mathbb{R}^{n^2}$ auffassen, und wir versehen $M_n(\mathbb{R})$ mit der üblichen Metrik auf $\mathbb{R}^{n^2}$. Beweise, dass die Abbildung $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ihre Determinante $\det A$ zuordnet, stetig ist.
Hinweis: Verwende die aus der linearen Algebra bekannte Formel
$$\det A = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\,,$$
wobei die Summe über alle Permutationen σ (bijektive Funktionen einer Menge auf sich selbst) auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ genommen wird.

16) Zeige, dass im Raum $M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller invertierbaren Matrizen offen ist.
Anleitung: Verwende Beispiel 15) und den Satz aus der linearen Algebra, der besagt, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\det A \neq 0$ gilt.

17) Welche der Mengen aus den Beispielen 8) und 10) sind zusammenhängend (Begründungen geben)?

18) Untersuche, welche der Mengen in Beispiel 9) zusammenhängend sind (Begründungen geben)?

19) Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, $f : M_1 \to M_2$ eine stetige Funktion, und $A \subseteq M_1$ bogenweise zusammenhängend. Zeige, dass $f(A)$ bogenweise zusammenhängend ist.

20) Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume, sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion, und sei $x_0 \in M_1$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (1) Die Funktion f ist stetig in x_0.
   (2) Zu jeder offenen Menge $U \subseteq M_2$, für die die Eigenschaft $f(x_0) \in U$ gilt, gibt es eine offene Menge $V \subseteq M_1$ mit $x_0 \in V$ und $V \subseteq f^{-1}(U)$.
   (3) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Anleitung: Zeige (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1). Führe den Beweis für (3) $\Longrightarrow$ (1) indirekt.

21) Welche der Mengen in den Beispielen 8) und 10) sind kompakt (Begründungen geben)?

22) Für welche der Mengen in Beispiel 9) liegt Kompaktheit vor (Begründungen geben)? Weiters gib mindestens eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ an, die weder in Beispiel 9) noch in Beispiel 23) vorkommt.

23) Gib ein Beispiel einer unendlichen, kompakten Teilmenge von $\mathbb{Q}$ an.

24) a) Gib ein Beispiel eines vollständigen metrischen Raumes (X, d), für den der *Satz vom Minimum und Maximum* nicht gilt (Beweis!).
b) Finde eine beschränkte Teilmenge X von $\mathbb{R}$, für die der *Satz vom Minimum und Maximum* nicht gilt (Beweis!).

25) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben halbstetig* in $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Falls f in jedem $x \in M$ nach oben halbstetig ist, dann heißt f nach oben halbstetig (auf M).
Betrachte $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik. Zeige, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{für } x \in \mathbb{Z}, \\ 0\,, & \text{sonst}, \end{cases}$$
nach oben halbstetig ist. Ist f auch stetig? Untersuche, ob die Funktion
$$g(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \text{sonst}, \end{cases}$$
nach oben halbstetig ist.

26) Es sei (C, d) ein kompakter metrischer Raum, und $f : C \to \mathbb{R}$ sei eine nach oben halbstetige Funktion. Beweise dass f ein Maximum besitzt, also dass es ein $m \in C$ gibt, das $f(m) = \max\{f(x) : x \in C\}$ erfüllt.

27) Gib ein Beispiel eines kompakten metrischen Raumes (C, d) und einer nach oben halbstetigen Funktion $f : C \to \mathbb{R}$, die kein Minimum besitzt.

28) Auf $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ definiere die Metrik d wie in Beispiel 6). Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$, die durch
$$f_n(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right], \\ nx + \frac{1-n}{2}\,, & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right], \\ 1\,, & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right], \end{cases}$$
definiert ist.
a) Skizziere f_n.
b) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (bezüglich unserer Metrik d) ist.
c) Beweise, dass es kein $f \in C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ gibt, sodass $f_n \to f$ (bezüglich unserer Metrik d) gilt.
d) Ist $\Big(C\big([0, 1], \mathbb{R}\big), d\Big)$ vollständig?

29) Gib alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome an.
a) $z^3 - 1\,.$ b) $z^6 - 1\,.$ c) $z^7 - 1\,.$

30) Von den folgenden Polynomen gib alle komplexen Nullstellen an.

a) $z^4 - 1$. b) $z^5 - 32$. c) $z^{19} - 1$.
d) $z^6 + 1$. e) $z^9 + 1$. f) $z^5 - i$.

31) Bestimme alle komplexen Nullstellen des Polynoms

$$z^{22} + z^{21} + z^{20} + z^{19} + z^{18} + z^{17} + z^{16} + z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + \\ + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\,.$$

Anleitung: Wende zunächst die Formel für die endliche geometrische Reihe an.

32) Betrachte eine stetig differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Es sei $x_0 \in (a,b)$ so, dass $\left|f'(x_0)\right| < 1$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq (a,b)$ und $\sup\limits_{x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} \left|f'(x)\right| < 1$.

33) Sei $T : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in (a,b)$. Es gelten $Tx_0 = x_0$ und $\left|T'x_0\right| < 1$. Beweise, dass es eine Umgebung U von x_0 gibt, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$ für alle $x \in U$ gilt.
Anleitung: Verwende Beispiel 32) und den Banach'schen Fixpunktsatz.

34) Für die Funktion $f(x) := x^3 - 3x$ löse die folgenden Aufgaben.

a) Bestimme die Nullstellen von f.
b) Führe das Newtonverfahren für f mit dem Startwert $\sqrt{\frac{3}{5}}$ durch.

35) Wende das Newtonverfahren auf die Funktion $f(x) := 13x^4 - 113x^2 + 100$ an, wobei als Startwert 2 gewählt wird.

36) Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erfüllt. Angenommen für ein $x \in (a,b)$ erfüllt die durch $x_1 := x$ und

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{für } n > 1$$

definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $x_n \in (a,b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gebe ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Beweise, dass $f(x_0) = 0$ gilt.

37) Finde eine Nullstelle von $f(x) := 17x - 1800000000 + 3e^{7x}$. Gib den Wert der Nullstelle auf 20 Stellen nach dem Komma (also mit einem Fehler von höchstens 5×10^{-21}) an.
Hinweis: Verwende einen Computer. Wie kann man sich sicher sein, dass man den Wert auf 20 Stellen genau hat?

38) Berechne die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2 + \sin x_2 \\ x_1 e^{3x_2} - 4 \end{pmatrix}$.

b) $f(x) := \begin{pmatrix} \arctan x \\ 3^x \\ 4x^2 + 11 \end{pmatrix}$.

c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 {x_5}^7 - e^{x_3} \\ {x_1}^3 e^{x_5} + \log(1 + {x_2}^2) \\ 5x_1x_3x_4 + {x_2}^{x_5} \end{pmatrix}$.

d) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(x_1x_3) \\ \sqrt[5]{{x_1}^6 x_3 + \arcsin x_2} \\ x_1 e^{{x_3}^2} + 4x_3 \\ x_1 {x_2}^4 x_3 \end{pmatrix}$.

e) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := {x_3}^2 \arctan(x_1x_4) + \sqrt{3 + {x_2}^4 + {x_4}^2} - \cos x_5$.

39) Verwende die Definition der Richtungsableitung, um für die folgenden Funktionen f die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v (jeweils in der normierten und der nicht normierten Version) zu bestimmen.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1+5x_2 \\ {x_1}^2 \\ 2x_1-3x_2+8 \\ x_1x_2-3 \end{pmatrix}, \; x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + 3x_1x_2 - 2x_2 + 6\,, \; x_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1-2x_3 \\ x_1x_2+5 \\ 4x_3 \end{pmatrix}, \; x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

40) Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2x_2x_3-3 \\ 17x_1-{x_2}^3x_3 \end{pmatrix}$ definiert ist.

41) a) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \sin x_1 + {x_2}^2x_3$. Berechne $\operatorname{grad} f$.

b) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2+\tan(x_2x_5)+3x_4e^{x_3} \\ 2x_1x_2+2{x_3}^5+7^{x_2}-x_4 \\ \arctan x_3-x_4{x_5}^2+8 \\ \cosh x_1+x_4x_5-\log(1+{x_5}^4) \\ 3x_3-7x_5 \end{pmatrix}$. Berechne $\operatorname{div} f$.

c) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := x_3 \sin x_1 + e^{x_1x_4-3x_2}$. Berechne $\operatorname{grad} f$.

d) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1+{x_2}^2-e^{x_2x_3} \\ \cos x_1+8x_2+3x_1e^{x_1x_3} \\ x_1+5x_2-x_3 \end{pmatrix}$. Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

e) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin x_1+\sin x_2 \\ x_1e^{x_2}-x_1{x_3}^2 \\ 3x_3+x_1\cos x_3 \end{pmatrix}$. Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

42) Sind lineare Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (aus der linearen Algebra weiß man, dass $\varphi(x) = Ax$ für eine reelle $m\times n$-Matrix A) differenzierbar? Was ist ihre Ableitung? Wie ist die Situation bei affinen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (das heißt $\varphi(x) = Ax + b$ für eine reelle $m \times n$-Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^m$).

43) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, die durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2\cos x_3+5 \\ {x_1}^2+x_2\sin x_3 \\ x_1+{x_3}^3 \\ {x_1}^2+x_2x_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist.

a) Berechne die Ableitung von f.

b) Bestimme die Ableitung von f in $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Verwende Beispiel b) um die Richtungsableitung von f im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (in der normierten und der nicht normierten Version) zu berechnen.

44) Für die folgenden Funktionen f berechne die Ableitung von f (dort, wo diese Funktion vernünftig definiert und differenzierbar ist), die Ableitung von f an der Stelle x_0, und die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v.

a) $f\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_2}^2+{x_5}^{x_3}\\ x_4+x_3\log x_2\\ 2x_5+\arcsin x_1+3{x_4}^5 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 3\\ -1\\ 2 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} -4\\ -2\\ 0\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $f\begin{pmatrix} x_1\\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_1}^3x_2-4x_1+3x_2\\ 4{x_1}^2+{x_2}^6-9x_1\\ 5\arctan x_1+4x_2\\ 2{x_1}^3-x_1x_2 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 2\\ -1 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 8\\ 15 \end{pmatrix}$.

c) $f\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_2}^2+2x_1x_3\\ {x_1}^2x_2x_3\\ {x_1}^2-3x_2x_3 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 3\\ -2\\ 5 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -6 \end{pmatrix}$.

d) $f\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2{x_1}^2x_3+5x_2\cos x_4-x_1+2x_3\\ {x_1}^{\sin x_4}+x_2+3{x_3}^2 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 1\\ -5\\ 2\\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 5\\ 4\\ 6\\ -2 \end{pmatrix}$.

45) Definiere die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (dabei ist $x=\binom{x_1}{x_2}$) durch

$$f(x) := \begin{cases} x_1x_2\,\frac{2{x_1}^2+5{x_2}^2}{{x_1}^2+{x_2}^2}\,, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0\,, & \text{falls } x=0. \end{cases}$$

Berechne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0)$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0)$.

46) Definiere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ($x=\binom{x_1}{x_2}$) durch

$$f(x) := \begin{cases} \left({x_1}^2+{x_2}^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}\,, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0\,, & \text{falls } x=0. \end{cases}$$

Beweise, dass f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ ist, und dass f in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

47) Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei durch

$$f\binom{x_1}{x_2} := \begin{cases} \frac{{x_1}^2x_2}{{x_1}^4+{x_2}^2}\,, & \text{falls } \binom{x_1}{x_2}\neq\binom{0}{0},\\ 0\,, & \text{falls } \binom{x_1}{x_2}=\binom{0}{0}, \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass im Punkt $\binom{0}{0}$ alle Richtungsableitungen von f existieren (Berechne sie!). Ist f stetig, bzw. differenzierbar in $\binom{0}{0}$ (Begründungen)?

48) Für die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ($x=\binom{x_1}{x_2}$) berechne für alle $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ die Richtungsableitung von f im Punkt 0 in Richtung v. Weiters untersuche, ob f stetig, bzw. differenzierbar in 0 ist.

a) $f(x) := \begin{cases} \frac{x_1{x_2}^3}{{x_1}^2+{x_2}^6}\,, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0\,, & \text{falls } x=0. \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} \frac{{x_1}^5{x_2}^5}{({x_1}^{10}+{x_2}^2)^3}\,, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0\,, & \text{falls } x=0. \end{cases}$

49) a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Eigenschaft $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

b) Gib ein Beispiel einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, für die $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(0) \neq 0$ ist.

50) Definiere $f : \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 3,\ -1 \leq x_2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f\binom{x_1}{x_2} := 5 + 9x_1 - 3{x_1}^2 - {x_1}^3 + \frac{1}{{x_2}^2 + 1}.$$

Berechne das Maximum von f.

51) Finde die kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 - {x_2}^2$. Weiters untersuche das Verhalten von f in der Nähe der kritischen Punkte.

52) Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne die kritischen Punkte. Weiters bestimme für jeden kritischen Punkt x die zweite Ableitung $d^2 f_{(x)}$, stelle fest, ob $d^2 f_{(x)}$ positiv (oder negativ) definit ist, und untersuche das Verhalten von f in der Nähe von x.

a) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 + {x_2}^3$.

b) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 + {x_2}^4$.

c) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 - {x_2}^4$.

d) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2$.

53) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f\binom{x_1}{x_2} := \left(2{x_1}^6 - 15{x_1}^4 + 24{x_1}^2 - 11\right)e^{x_2} + e^{-16{x_2}^2}$$

definiert. Bestimme alle kritischen Punkte und lokalen Extrema von f, und untersuche, ob es sich um lokale Minima oder Maxima handelt.

54) Betrachte die Funktion $f : \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x_1 \leq 3,\ -1 \leq x_2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f\binom{x_1}{x_2} := \left(2{x_1}^6 - 15{x_1}^4 + 24{x_1}^2 - 11\right)e^{x_2} + e^{-16{x_2}^2}$$

definiert ist. Bestimme das Maximum (bzw. die Maxima) von f.

55) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 5 \\ 7 - 3x_2 \\ 8{x_1}^2 e^{x_2+4} + 5x_3 \end{pmatrix}$ definiert. Gibt es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, sodass f auf U invertierbar ist? Was weiß man dann über f^{-1}?

56) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f\binom{x_1}{x_2} := \binom{e^{x_1}\cos x_2}{e^{x_1}\sin x_2}$.

a) Zeige, dass f nicht bijektiv ist.

b) Beweise, dass es für alle $x \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von $f(x)$ gibt, sodass $f : U \to V$ bijektiv ist.

57) Betrachte die Gleichung $\sin y - e^{-x^2} + 1 = 0$.

a) Gibt es eine Umgebung von 0 und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, sodass man $y = f(x)$ schreiben kann?

b) Berechne die Funktion f aus Beispiel a). Finde ein maximales Intervall I, auf dem man f als Lösung der Gleichung definieren kann.

c) Zeige, dass es eine von f verschiedene Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ gibt (wobei f und I wie in Beispiel b) sind), die $\sin g(x) - e^{-x^2} + 1 = 0$ erfüllt.

d) Finde unendlich viele verschiedene Funktionen, die wie in Beispiel c) sind.

58) Für die folgenden Gleichungen untersuche, ob es eine Umgebung U von 0 und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ gibt, sodass man $y = f(x)$ schreiben kann. Weiters untersuche, ob f auf U differenzierbar ist, und gib $f'(x)$ (implizit), sowie $f'(0)$ (als Zahlenwert) an.
a) $xy + (\cos x)e^y - e^x = 0\,.$ b) $xy + (\cos x)(\sin y) + x^2 e^y = 0\,.$
c) $y^2 - x = 0\,.$ d) $y^3 - x^2 = 0\,.$ e) $e^y + x^2 = 0\,.$
f) $x^2 + e^x \tan y = 0\,.$ g) $y^2 - x^2 = 0\,.$ h) $y^3 - x^4 = 0\,.$

59) Man betrachte die Gleichungen
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 - 6x_3 + y_1 - 3y_2 + 2y_4 + x_1x_2 + x_1{y_2}^2 + y_3y_4 + 45 &= 0\ , \\ 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 - y_3 + y_4 + 2x_1x_3 + x_3e^{y_2-1} - 49 &= 0\ , \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 14y_1 + 3y_2 - 5y_3 + y_4 - 2{y_4}^3 + x_2{y_1}^2 + 3{x_3}^2{y_3}^3 + 9y_1y_4 - 21 &= 0\ , \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 2y_1 + 10y_2 - 4y_3 - 13y_4 - {x_1}^2x_3 + 2x_1{y_4}^2 + 3{y_2}^2y_3 - 55 &= 0\ . \end{aligned}$$
Beweise, dass es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^4$ mit $f\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichungen als $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ schreiben kann. Kann U so gewählt werden, dass f stetig differenzierbar ist? Weiters berechne $df_{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

60) Betrachte die Gleichungen
$$\begin{aligned} y_1y_2 + {y_1}^2x_2e^{x_1-3} + 7x_3e^{y_2-1} + x_1{x_3}^2 - x_1 &= 0\ , \\ {y_1}^2 - 9e^{y_1-5} + 5x_3y_2 - x_1y_2 - x_1e^{x_2} &= 0\ . \end{aligned}$$
Beweise, dass es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichungen als $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ schreiben kann. Weiters berechne $df_{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

61) Zeige, dass es für die Gleichung
$$2y^5 + 3x^2 + 4x - 2x^3e^{y-3} + 25 = 0$$
eine Umgebung U von 7 und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(7) = 3$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichung als $y = f(x)$ schreiben kann. Kann man U so wählen, dass f stetig differenzierbar ist? Bestimme $f'(7)$.

62) Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x^tAx + a^tx + a_0$, wobei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix ist, $a \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ zeige, dass $dg_{(x)} = 2\Big(x^tA + \dfrac{1}{2}a^t\Big)$ gilt.

63) Seien A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, $a \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$. Weiters sei $p \in \mathbb{R}^n$ so, dass $p^tAp + a^tp + a_0 = 0$ und $Ap + \dfrac{1}{2}a \neq 0$ erfüllt sind. Beweise, dass
$$\mathcal{T} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0 = 0\right\}$$

die Tangentialebene an die Hyperfläche 2. Ordnung $M := \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^t A x + a^t x + a_0 = 0\right\}$ im Punkt p ist.

64) Berechne das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{{x_1}^2}{25} + \dfrac{{x_2}^2}{9} + \dfrac{{x_3}^2}{4} = 1\right\}$.

65) Bestimme das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := {x_1}^2 x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 9\right\}$.

66) Der Menge $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^6 + {x_2}^6 + {x_3}^6 \leq 192\right\}$ soll der volumsgrößte Quader eingeschrieben werden. Bestimme die Abmessungen und das Volumen dieses Quaders.

67) Finde jenen Punkt auf der dreidimensionalen Ebene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad\;\; + \;\; x_4 + x_5 &= \;\; 2\,, \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 - 2x_4 \quad\quad &= 18\,, \end{aligned}$$

der vom Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den kleinstmöglichen Abstand hat, und berechne diesen Abstand.

68) Finde das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^5 + 16{x_2}^5 + {x_3}^5$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 30,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\right\}$.

69) Beweise, dass für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$ das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel ist, das heißt, dass

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}} \leq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$$

gilt.

70) Finde das Minimum und das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^7 + {x_2}^7 + {x_3}^7$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 9,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\right\}$.

71) Es sei $f : \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1,\ x_1 + x_4 = 1\right\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := x_1 x_4 - x_2 x_3$$

definiert. Bestimme das Maximum von f.

72) Man soll der Menge $\left\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^6 + {x_2}^6 \le 2\right\}$ ein Rechteck eingeschrieben werden, und zwar so, dass die Fläche möglichst groß wird. Bestimme die Abmessungen und die Fläche dieses Rechtecks.

73) Berechne das Maximum von
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := {x_1}^2 {x_2}^7 x_3 {x_4}^6$$
auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \frac{{x_1}^2}{288} + \frac{{x_2}^2}{112} + \frac{{x_3}^2}{64} + \frac{{x_4}^2}{24} = 1\right\}$.

74) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{xt^2}}{t}\, dt$. b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$. c) $\displaystyle\int_{x^2}^{x^5} \frac{e^t - 1}{t}\, dt$.

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{xt^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)}{t}\, dt$. e) $\displaystyle\int_{x^2}^{e^x} \frac{6e^{x^2t^4}}{t}\, dt$.

75) Falls $n \in \mathbb{N}$, definiere $a_n := \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

a) Für $n \in \mathbb{Z}$ berechne $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx$.

b) Verwende Beispiel a) um zu zeigen, dass $\dfrac{2}{(n+1)\pi} \le |a_n| \le \dfrac{2}{n\pi}$ gilt.

c) Beweise, dass $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

d) Zeige, dass $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

76) Unter Verwendung von Beispiel 75) beweise, dass das Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ konvergiert, aber $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergiert.

77) Welchen Wert ergibt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$?

78) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $b > 0$. Berechne $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^b - x^a}{\log x}$ und $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x^b - x^a}{\log x}$. Leite daraus ab, dass $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\, dx$ existiert.

79) Bestimme $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 - x}{\log x}\, dx$. (Dieses Integral existiert nach Beispiel 78)).

Anleitung: Für $y > 0$ definiere $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^y - x}{\log x}\, dx$. Bestimme zuerst $F'(y)$, und berechne daraus $F(3)$.

80) Berechne $\iint\limits_A (3x_1 + 2{x_2}^2)$ für $A := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \right\}$ auf zwei Arten.

81) Für $A := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0,\ x_1 - x_2 \geq 0,\ 3x_1 + 4x_2 \leq 21 \right\}$ bestimme $\iint\limits_A 2{x_1}^6 x_2$.

82) Schreibe die folgenden Integrale als iterierte Integrale, bei denen zuerst nach x und dann nach y integriert wird. Weiters skizziere den Bereich A, über den das Doppelintegral durch die entsprechenden Integrale berechnet wird.

a) $\displaystyle\int_0^5 \left(\int_0^x f\binom{x}{y}\, dy \right) dx$.

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{x^3}^8 f\binom{x}{y}\, dy \right) dx$.

c) $\iint\limits_A f\binom{x}{y}$, wobei $A := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4 \right\}$ ist.

83) Finde die Werte der folgenden Integrale.

a) $\iiint\limits_A {x_1}^2 x_3$, wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \right\}$$

ist.

b) $\iiint\limits_A (x_1 x_2 + 2x_3)$, wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ 6x_1 + 15x_2 + 10x_3 \leq 60 \right\}$$

ist.

84) Sei $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4761\, {x_1}^2 + 324\, {x_2}^2 + 2116\, {x_3}^2 \leq 171396 \right\}$.

a) Bestimme $\iiint\limits_A 1$.

b) Berechne $\iiint\limits_A ({x_1}^2 + {x_2}^2)$.

85) Durch Berechnung des dreidimensionalen Integrals $\iiint\limits_A 1$ finde eine Formel für das Volumen des Kegels $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq h,\ {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq \left(\frac{h - x_3}{h} r \right)^2 \right\}$, wobei $r > 0$ und $h > 0$.

86) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Definiere $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_1 \leq b,\ {x_2}^2 + {x_3}^2 \leq f(x_1)^2 \right\}$ (A ist der Körper, der entsteht, wenn der Graph von f um die x-Achse gedreht wird). Indem man $\iiint\limits_A 1$ berechnet, leite eine (bereits bekannte) Formel für das Volumen von A her.

87) Für $r > 0$ berechne das Volumen der 7-dimensionalen Kugel

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 + {x_7}^2 \leq r^2 \right\}.$$

88) Bestimme $\int\limits_A 1$, wobei

$$A := \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8 : 144{x_1}^2 + 400{x_2}^2 + 225{x_3}^2 + 400{x_4}^2 + \right.$$

$$\left. + 3600{x_5}^2 + 900{x_6}^2 + 400{x_7}^2 + 3600{x_8}^2 \leq 3600 \right\}$$

ist.

89) Für die Menge $A := \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 144{x_1}^2 + 441{x_2}^2 + 784{x_3}^2 + 1764{x_4}^2 \leq 7056 \right\}$ berechne das Integral $\iiiint\limits_A ({x_1}^2 + {x_3}^2)$.

90) Bestimme die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\int_c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3+1 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$, wobei c das Geradenstück von $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist.

b) $\int_c \begin{pmatrix} {x_2}^2x_3+5 \\ x_1+2x_3 \\ x_1{x_3}^3+8 \end{pmatrix}$, wobei $c(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 2+t^2 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 3$ ist.

c) $\int_c \begin{pmatrix} x_1-x_2-2 \\ x_1x_2+7 \end{pmatrix}$, wobei c der einmal in positiver Richtung durchlaufene Kreis um $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 3 ist.

91) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_2}^2 \\ 4{x_1}^2 \end{pmatrix}$. Skizziere die folgenden Kurven c und berechne die entsprechenden Kurvenintegrale $\int_c f$.

a) $c(t) := \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$. b) $c(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

92) Es sei f wie in Beispiel 91). Kann man eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\left(dF_{(x)}\right)^t = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ finden? Wenn man so ein F finden kann, gib so ein F an, und wenn man so ein F nicht finden kann, begründe warum es so ein F nicht gibt.

93) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2} \\ \frac{x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2} \end{pmatrix}$. Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\left(dF_{(x)}\right)^t = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? Bestimme F, soferne es so ein F gibt.

94) Für die Funktion f aus Beispiel 93) berechne das Kurvenintegral $\int_c f$ für die folgenden Kurven c.

a) c ist der einmal in positiver Richtung durchlaufene Kreis um $\binom{3}{-2}$ mit Radius 6.

b) $c(t) := \binom{3-2\cos t}{4\sin t}$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Skizziere diese Kurve).

c) c ist das einmal in positiver Richtung durchlaufene Dreieck mit den Eckpunkten $\binom{7}{-1}$, $\binom{-5}{3}$ und $\binom{-2}{-4}$.

Hinweis: Verwende Beispiel 93).

95) Die *Astroide* erhält man, wenn man einen Kreis mit Radius $\frac{a}{4}$ auf der Innenseite eines Kreises mit Radius a abrollen lässt. Man kann sie (und das kann für dieses Beispiel verwendet werden) durch die Parameterdarstellung $c(t) := \binom{a\cos^3 t}{a\sin^3 t}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ beschreiben. Berechne die Bogenlänge der Astroide. Weiters bestimme das Kurvenintegral $\displaystyle\int_c \binom{0}{x_1}$.

96) Was bedeutet das in Beispiel 95) berechnete Kurvenintegral?
Hinweis: Wende den Satz von Greene an.

97) Es sei c die einmal in positiver Richtung durchlaufene Ellipse

$$\left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1 - 3}{7}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 4}{3}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Berechne $\displaystyle\int_c \binom{{x_1}^2+2x_2-3}{3x_1+x_2+7}$.

98) Betrachte die Halbkugeloberfläche

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 36,\ x_3 \geq 0 \right\}.$$

Berechne die Oberfläche von A, sowie das Oberflächenintegral $\displaystyle\iint_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

99) Bestimme die Oberfläche des einschaligen Hyperboloids

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 - 1 = 0,\ -1 \leq x_3 \leq 1 \right\}.$$

100) Es sei $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \leq 9,\ x_3 \geq 0 \right\}$, und ∂A sei die Oberfläche von A. Bestimme $\displaystyle\iint_{\partial A} \begin{pmatrix} 7x_1-x_2+3x_2x_3+5 \\ {x_1}^2-5x_2-2x_3-4 \\ 8x_1+x_3+3{x_2}^2-2 \end{pmatrix}$.

101) Für $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4{x_1}^2 + 9{x_2}^2 + 36{x_3}^2 \leq 36 \right\}$ berechne

$$\iint_{\partial A} \begin{pmatrix} 2x_1-x_1{x_2}^2+x_2{x_3}^4 \\ 3{x_1}^2x_2+x_1{x_3}^2+{x_2}^3 \\ 5{x_1}^2{x_2}^2+4{x_3}^2-2x_3 \end{pmatrix},$$

wobei ∂A die Oberfläche von A ist.

102) Bestimme $\displaystyle\iint\limits_{\partial A} \begin{pmatrix} 5x_1-x_2{}^2x_3+x_3{}^6-6x_2+2 \\ x_1{}^3x_3{}^2+8x_1x_3{}^5+5x_1+2x_2 \\ 3x_1{}^2x_2+5x_2e^{x_1}+2x_1-3x_3-6 \end{pmatrix}$, wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 36{x_1}^2 + 100{x_2}^2 + 225{x_3}^2 \leq 900,\ x_2 \geq 0 \right\}$$

und ∂A die Oberfläche von A ist.

103) Betrachte die Halbkugeloberfläche A aus Beispiel 98), ihren Rand ∂A, und die Funktion $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+2 \\ x_2 \\ x_3+5 \end{pmatrix}$. Berechne $\displaystyle\int\limits_{\partial A} f$.

104) Definiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 7x_1+10x_3 \\ 15x_3{}^2-7x_2 \\ 2x_1+4 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass $f = \operatorname{rot} g$ für $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5x_3{}^3 \\ x_1{}^2+4x_1-5x_3{}^2 \\ 7x_1x_2 \end{pmatrix}$ gilt.

b) Bestimme $\displaystyle\iint\limits_{A} f$, wobei A die Halbkugeloberfläche aus Beispiel 98) ist.

105) Es sei die Oberfläche $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 9{x_1}^2 + 16{x_2}^2 + 64{x_3}^2 = 576,\ x_1 \geq 0 \right\}$, und ∂A sei der Rand von A. Berechne $\displaystyle\int\limits_{\partial A} \begin{pmatrix} 3x_1{}^5+7\sin x_1+2 \\ 12x_2{}^2-8x_2-5 \\ 2e^{x_3{}^2}-6x_3{}^2+3x_3 \end{pmatrix}$.

106) Berechne.

a) $(1+5i)(3-4i)$.
b) $\dfrac{39+4i}{7-2i}$.
c) $\sqrt{5+12i}$.
d) $e^{2\pi i}$.
e) $2e^{\frac{\pi i}{4}}$.
f) $\dfrac{39+2i}{5-6i}$.
g) Die Lösung von $(2+5i)z^2 - (42+18i)z + (80+55i) = 0$.
h) Die Lösung von $z^4 = 16i$.
Hinweis: Rechne in Polarkoordinaten.

107) Bei den folgenden Funktionen gib maximale Teilmengen von $\mathbb{C}$ an, auf denen sie (komplex) differenzierbar sind. Was ist ihre Ableitung?

a) $f(z) := e^z$.
b) $f(z) := \dfrac{1}{z}$.
c) $f(z) := \dfrac{1}{(z-(5-2i))^8}$.
d) $f(z) := z^2 e^{(1+3i)z} \cos(2iz^3 - 6)$.
e) $f(z) := z^2 \sin \dfrac{1}{z}$.
f) $f(z) := \dfrac{z}{z^2-1}$.

108) Zeige, dass die Funktion $f(z) := |z|$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ nicht (komplex) differenzierbar ist.
Anleitung: Verwende die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen.

109) Berechne das Kurvenintegral von z^2 entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 5 um $3+2i$ mittels direkter Rechnung.

110) Mittels direkter Rechnung berechne das Kurvenintegral der folgenden Funktionen entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 2 um 0.

a) $f(z) := z^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $f(z) := \dfrac{1}{z}$.

c) $f(z) := \dfrac{1}{z^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

111) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$. Weiters gib alle $z \in \mathbb{C}$ an, für die diese Potenzreihe konvergiert.

112) Betrachte die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Bestimme ihren Konvergenzradius und gib alle $z \in \mathbb{C}$ an, für die diese Potenzreihe konvergiert. Mit welcher Funktion stimmt diese Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzgebietes überein?

113) Berechne die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktionen, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

a) $f(z) := e^{z-8}$ um 3.

b) $f(z) := \dfrac{1}{z-7}$ um 4.

c) $f(z) := \sin z$ um $\frac{\pi}{2}$.

d) $f(z) := e^{z-i}$ um $5 + 2i$.

114) Löse die folgenden Aufgaben für die Funktion $f(z) := \dfrac{5}{z-4}$.

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 7, bei der 0 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Gib die Laurentreihenentwicklung von f um 7 an, bei der 5 im Konvergenzgebiet liegt, und bestimme das entsprechende Konvergenzgebiet.

115) Die Funktion f sei durch $f(z) := \dfrac{1}{z-1}$ definiert.

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 0, bei der $\frac{1}{2}$ im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 0, bei der 2 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

c) Die Funktion f hat in 0 offensichtlich keine Singularität, trotzdem gilt für die Laurentreihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in Beispiel b), dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$. Wieso ist das möglich?

116) Die Funktion f sei durch $f(z) := z^2 \sin \dfrac{1}{z}$ definiert.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Bestimme $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

117) Betrachte die Funktion $f(z) := \dfrac{5z^2 - 37z + 129}{z^3 - 16z^2 + 77z - 98}$.

a) Berechne die Partialbruchzerlegung von f.
b) Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 7, bei der 0 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
c) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 7, bei der 5 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
d) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 7?
e) Bestimme $\lim\limits_{z\to 7} f(z)$.

118) Berechne.

a) $\log(-2)$. b) i^{2i}. c) 2^i.
d) $(1+i)^{(1+i)}$. e) $\log\left(1+i\sqrt{3}\right)$. f) $(e^\pi)^i$.

119) Es sei die Funktion f durch $f(z) := \dfrac{7z - 155}{z^2 - 82z - 255}$ definiert.

a) Bestimme alle isolierten Singularitäten von f. Sei z_0 diejenige isolierte Singularität von f deren Betrag minimal ist.
b) Gib die Laurentreihenentwicklung von f um z_0 an, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und bestimme den entsprechenden Konvergenzbereich.
c) Finde die Laurentreihenentwicklung von f um z_0, bei der 100 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
d) Welche Art von Singularität von f liegt im Punkt z_0 vor?
e) Berechne $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

120) Löse folgende Aufgaben für die Funktion $f(z) := \dfrac{2z^2 + 19z - 1407}{z^3 - 29z^2 + 119z + 1445}$.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um 17, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
b) Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 17, bei der 50 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
c) Welche Art von Singularität besitzt die Funktion f im Punkt 17?
d) Welchen Wert ergibt $\lim\limits_{z\to 17} f(z)$?

121) Definiere die Funktion f durch $f(z) := \dfrac{e^z - 1}{z}$.

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
b) Welche Art von Singularität besitzt f im Punkt 0?
c) Berechne $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

122) Für die Funktion $f(z) := \dfrac{3}{z - 2 + 5i}$ löse folgende Aufgaben.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von f um $4 + 2i$, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um $4+2i$, bei der $10i$ im Konvergenzgebiet liegt, und gib den entsprechenden Konvergenzbereich an.

123) Betrachte die Funktion f, die durch $f(z) := e^{-\frac{1}{z^2}}$ definiert ist.

a) Finde die Laurentreihenentwicklung von f um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Welche Art von Singularität besitzt f im Punkt 0?

c) Berechne $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

124) Es sei die Funktion f durch $f(z) := \dfrac{2z-6-24i}{z^2+2z-15}$ definiert. Berechne das Kurvenintegral von f entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 4 um den Mittelpunkt $2+3i$.

125) Für die Funktion f, die durch $f(z) := \dfrac{2z-5}{z^2-11z+28}$ definiert ist, berechne das Kurvenintegral von f entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 3 um $5+i$.

126) Bestimme $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$.

127) Berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$.

128) Welchen Wert ergibt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2}{x^6+1}\,dx$?