Proseminar zu
Stochastik für
Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Sommersemester 2013

Stefan Götz
Peter Raith

1) Wie groß ist beim Roulette die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal hintereinander die Kugel auf „rot“ fällt?

2) In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, auf denen jeweils ein Buchstabe steht. Aneinandergereiht ergeben sie „ANANAS“. Es werden nacheinander 4 Kugeln zufällig gezogen und (entsprechend der Reihenfolge der Ziehung) hintereinander aufgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich dabei „ANNA“ ergibt?

3) Beim österreichischen Lotto werden 6 Zahlen aus den Zahlen 1–45 gezogen. Auf einem Tippschein werden 6 Zahlen getippt.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen „Fünfer“ getippt zu haben, das heißt genau 5 der getippten Zahlen stimmen mit den tatsächlich gezogenen Zahlen überein?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen „Dreier“ getippt zu haben, das heißt genau drei der getippten Zahlen stimmen mit den tatsächlich gezogenen Zahlen überein?

4) Eine Familie besteht aus den beiden Elternteilen A und B, sowie einem Sohn oder einer Tochter C. Sie entschließt sich ein Tennismatch „Jugend“ gegen „Eltern“ zu spielen. Dabei spielt C zuerst einen Satz gegen den einen Elternteil, anschließend einen Satz gegen den zweiten Elternteil, und schließlich wieder einen Satz gegen den ersten Elternteil, wobei C auswählt wer zuerst gegen ihn/sie antreten muss. Es wird ausgemacht, dass C als Sieger gilt, wenn er/sie zwei Sätze hintereinander gewinnt, ansonsten gelten die Eltern als Sieger. Die Wahrscheinlichkeit, dass C einen Satz gegen A gewinnt beträgt $\frac{1}{3}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass C einen Satz gegen B gewinnt beträgt $\frac{2}{3}$. Wen sollte C als erstEn GegnerIn auswählen, wenn er/sie die größtmögliche Gewinnchance haben will? Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass C gewinnt?

5) Löse das folgende Problem des Chevalier de Méré: Auf wie viele Arten kann man beim Werfen von drei Würfeln die Augensumme 9, bzw. die Augensumme 10 erreichen (und auf welche Arten)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 9, bzw. die Augensumme 10 zu erhalten?

6) Wie kann man intuitiv begründen, dass bei Beispiel 5) die Augensumme 10 wahrscheinlicher als Augensumme 9 ist, beim Werfen von zwei Würfeln (siehe Vorlesung) jedoch die Augensumme 9 wahrscheinlicher als Augensumme 10 ist?

7) Ein Juweliergeschäft ist durch zwei Alarmanlagen gesichert. Die erste dieser Alarmanlagen löst im Falle eines Einbruchs mit 98% einen Alarm aus, die zweite mit 95%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Einbruch mindestens eine dieser Alarmanlagen einen Alarm auslöst?

8) Löse folgende Aufgaben für das Roulette.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 6 mal hintereinander die Kugel auf „23“ fällt?
   b) An einem Roulettetisch wurde beobachtet, dass 5 mal hintereinander die Kugel auf „23“ gefallen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beim nächsten Mal wieder auf „23“ fällt?
   c) An einem Roulettetisch wurde beobachtet, dass 5 mal hintereinander die Kugel auf „23“ gefallen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beim nächsten Mal auf „16“ fällt?

9) In einem Restaurant eines Konferenzortes ist bekannt, dass sich 70% der ItalienerInnen, 10% der Deutschen, 20% der ÖsterreicherInnen, 30% der SchweizerInnen, 10% der EngländerInnen, 20% der Franzosen/Französinnen, 10% der SpanierInnen, 10% der HolländerInnen, 10% der RussInnen und 30% der SlowenInnen Spaghetti bestellen. An der gerade stattfindenden Konferenz stammen 18% der TeilnehmererInnen aus Italien, 22% aus Deutschland, 6% aus Österreich, 8% aus der Schweiz, 15% aus England, 14% aus Frankreich, 6% aus Spanien, 3% aus Holland, 4% aus Russland und 4% aus Slowenien. EinE TeilnehmerIn dieser Konferenz hat sich soeben Spaghetti bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er/sie aus Italien stammt?

10) In einem Auto ist eine akustische Alarmanlage eingebaut. Diese löst im Falle eines Einbruchs mit 97% einen Alarm aus. Sie löst aber auch mit 4% einen Alarm aus, falls kein Einbruch erfolgt. Ein Einbruch in das Auto erfolgt mit Wahrscheinlichkeit 0.01. Man hört, dass diese Alarmanlage einen Alarm ausgelöst hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in das Auto eingebrochen wurde?

11) Bei einer Prüfung werden 5 Fragen gestellt, zu denen jeweils drei Antworten vorgegeben sind, von denen jeweils genau eine richtig ist. Jedes Beispiel zählt einen Punkt, für das Bestehen der Prüfung sind die Hälfte der möglichen Punkte (also mindestens 3 Punkte) erforderlich. EinE PrüfungskandidatIn weiß zu keiner Frage die richtige Antwort und kreuzelt bei jeder Frage eine Antwort zufällig an.
   a) Falsche Antworten werden mit 0 Punkten gewertet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unserE PrüfungskandidatIn die Prüfung besteht?

b) Man darf insgesamt drei Mal zu dieser Prüfung antreten. Falls wie in Beispiel a) gewertet wird, und unserE KandidatIn stets die oben beschriebene Strategie verfolgt, wie groß ist dann die Chance die Prüfung zu bestehen (das bedeutet mindestens eine von drei derartigen Prüfungen zu bestehen)?

c) Falsche Antworten werden negativ (also mit -1 Punkten) gewertet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unserE PrüfungskandidatIn die Prüfung besteht?

d) Man darf insgesamt drei Mal zu dieser Prüfung antreten. Falls wie in Beispiel c) gewertet wird, und unserE KandidatIn stets die oben beschriebene Strategie verfolgt, wie groß ist dann die Chance die Prüfung zu bestehen?

12) Zwei SpielerInnen, A und B, spielen folgendes Spiel. Sie würfeln abwechselnd mit einem Würfel so lange bis einEr von ihnen gewonnen hat, wobei A mit dem Würfeln beginnt. SpielerIn A gewinnt, falls er/sie bei seinem/ihrem Wurf einen Fünfer oder Sechser würfelt. Hingegen gewinnt SpielerIn B, falls er/sie bei seinem/ihrem Wurf eine ungerade Augenzahl würfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt?

13) Beschreibe die Ereignismenge Ω für die folgenden Zufallsexperimente.

a) Das Werfen von zwei Münzen.

b) Das Werfen von zwei Würfeln.

c) Das Werfen von drei Münzen.

d) Das Drehen des Glücksrad.

e) Das Ergebnis eines Fußballspiels. (Es gibt zwei Möglichkeiten! Versuche beide zu finden!)

f) Das Ziehen einer Karte aus 20 Karten (jeweils die Werte Bub, Dame, König, Zehner und Ass in den Farben Herz, Karo, Pik und Treff).

g) Das Ziehen einer Karte aus 52 Karten (jeweils die Werte 2–10, Bub, Dame, König und Ass in den Farben Herz, Karo, Pik und Treff).

h) Das Testergebnis bei einem BSE-Test.

14) Aus dem in Beispiel 13) f) beschriebenen Kartenspiel werden 5 Karten gezogen. Gib jeweils diejenige Teilmenge A von Ω an, die die folgenden Ereignisse beschreibt, bzw. beschreibe die Ereignisse, die durch folgende Mengen A beschrieben werden.

a) Alle Karten sind von derselben Farbe.

b) Es wurden vier Asse gezogen.

c) Es wurden drei Asse gezogen und zwei weitere Karten haben denselben Wert.

d) Alle Karten haben verschiedene Werte, aber nicht alle Karten haben dieselbe Farbe.

e)
$$\begin{aligned} A = \Big\{ & \{\text{Herz König, Karo König, Pik König, Herz Dame, Karo Dame}\}, \\ & \{\text{Herz König, Karo König, Treff König, Herz Dame, Karo Dame}\}, \\ & \{\text{Herz König, Pik König, Treff König, Herz Dame, Karo Dame}\}, \\ & \{\text{Karo König, Pik König, Treff König, Herz Dame, Karo Dame}\} \Big\}. \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} A = \Big\{ & \{\text{Pik Ass, Herz Zehner, Pik König, Pik Dame, Pik Bub}\}, \\ & \{\text{Pik Ass, Karo Zehner, Pik König, Pik Dame, Pik Bub}\}, \\ & \{\text{Pik Ass, Treff Zehner, Pik König, Pik Dame, Pik Bub}\} \Big\}. \end{aligned}$$

15) Seien $A, B \subseteq \Omega$ (nicht notwendigerweise disjunkt). Mit Hilfe der naiven „Definition“ der Wahrscheinlichkeit „beweise“, dass $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ gilt.

16) Beweise die Formel aus Beispiel 15) aus den Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

17) Betrachte das „Immer wieder“ (unendlich oft) Werfen einer Münze.
 a) Beschreibe die Ereignismenge Ω.
 b) Gib diejenige Teilmenge A von Ω an, die das Ereignis „Zahl erscheint nie in zwei aufeinanderfolgenden Würfen bei beiden Würfen“ beschreibt.
 c) Welches Ereignis wird durch

$$\begin{aligned} A = \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) : \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ gilt } (\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}) \in \\ \{(\text{Edelweiß,Edelweiß,Edelweiß}), (\text{Edelweiß,Edelweiß,Zahl}), \\ (\text{Edelweiß,Zahl,Edelweiß}), (\text{Edelweiß,Zahl,Zahl}), \\ (\text{Zahl,Edelweiß,Edelweiß}), (\text{Zahl,Zahl,Edelweiß})\}\Big\} \end{aligned}$$

 beschrieben?
 d) Welches Ereignis wird durch

$$\begin{aligned} A = \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) : \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ gilt } (\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}) \in \\ \{(\text{Edelweiß,Edelweiß,Edelweiß}), (\text{Edelweiß,Edelweiß,Zahl}), \\ (\text{Edelweiß,Zahl,Edelweiß}), (\text{Edelweiß,Zahl,Zahl}), \\ (\text{Zahl,Edelweiß,Edelweiß}), (\text{Zahl,Edelweiß,Zahl}), \\ (\text{Zahl,Zahl,Edelweiß})\}\Big\} \end{aligned}$$

 beschrieben?
 e) Wieviele Elemente besitzt die Menge A aus Beispiel b), bzw. c), bzw. d) (kein exakter Beweis notwendig!)?
 f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des in Beispiel b), bzw. c), bzw. d) beschriebenen Ereignisses (kein exakter Beweis notwendig!)?

18) Ein technisches Gerät hat drei elektronische Bauteile. Der erste dieser Bauteile fällt mit Wahrscheinlichkeit 0.02 aus, der zweite mit Wahrscheinlichkeit 0.01, und der dritte mit Wahrscheinlichkeit 0.08.
 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert dieses Gerät, falls diese drei Bauteile in Serie geschalten sind (das bedeutet, dass das Gerät genau dann funktioniert, wenn keiner dieser Bauteile ausfällt)?
 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert dieses Gerät, falls diese drei Bauteile parallel geschalten sind (das bedeutet, dass das Gerät genau dann funktioniert, wenn mindestens einer dieser Bauteile nicht ausfällt)?

19) Eine Firma produziert in 4 verschiedenen Produktionsstätten, A, B, C und D, Videokameras. Aus A stammt die Hälfte der Produktion, aus B und C jeweils ein Fünftel, und aus D 10%. Von den Geräten aus A sind 1% fehlerhaft, von jenen aus B sind 5% fehlerhaft, von jenen aus C sind 2% fehlerhaft, und von jenen aus D sind 1% fehlerhaft.
 a) Bestimme den Gesamtanteil der fehlerhaften Videokameras dieser Firma.
 b) Es wurde eine fehlerhafte Videokamera in der Gesamtproduktion gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese aus der Produktionsstätte B?

20) Ein Flugzeug fliegt zwischen den Orten A und B. Wegen häufiger schlechter Wetterbedingungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in A starten kann 0.96, die Wahrscheinlichkeit, dass es in A starten und in B landen kann, beträgt 0.94. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Flugzeug in B landen kann, wenn es in A gestartet ist.

21) Unter 1 000 000 Münzen befindet sich eine, die auf beiden Seiten Edelweiß zeigt, alle übrigen sind normal. Eine dieser Münzen wird zufällig ausgewählt und 20 mal geworfen. Dabei erscheint 20 mal Edelweiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Münze normal ist?

22) Eine Fabrik erzeugt elektronische Bauteile für Computer. Man weiß, dass $\frac{1}{3}$ der Produktion Ausschuss ist. Durch ein Prüfverfahren soll getestet werden, ob die soeben erzeugten Bauteile defekt sind, und daher ausgeschieden werden müssen. Bei einem defekten Bauteil erkennt diesen das Prüfverfahren mit 99% als fehlerhaft. Ein fehlerfreier Bauteil wird mit Wahrscheinlichkeit 0.03 als fehlerhaft eingestuft. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein vom Prüfverfahren als fehlerhaft eingestufter Bauteil wirklich defekt ist.

23) Im Intervall $[0, 1]$ werden zufällig zwei Zahlen gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe höchstens $\frac{1}{2}$ ist.
Hinweis: Betrachte das Problem als zufällig einen Punkt im zweidimensionalen Einheitsquadrat zu wählen. In einer Skizze beschreibe geometrisch, wann die Summe der x-Koordinate und der y-Koordinate kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist.

24) Sei $t \in [0, 2]$. Im Intervall $[0, 1]$ werden zufällig zwei Zahlen gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe höchstens t ist.

25) In einem Gericht ist einE AngeklagtEr eines Mordes beschuldigt. Das einzige Indiz für seine/ihre Schuld sind die Lackspuren eines Autos. Der/die Sachverständige erklärt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto des/der Angeklagten die am Tatort gefundenen Lackspuren hinterlässt, 0.999 beträgt. Weiters erklärt er/sie, dass jedes beliebige andere Auto mit Wahrscheinlichkeit 0.005 die gefundenen Lackspuren hinterlassen würde. Im Gerichtsbezirk sind insgesamt 1 000 000 Autos zugelassen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der/die Angeklagte zu verurteilen?

26) Unter 500 Würfeln befinden sich
9 Würfel, die auf je zwei Seiten die Augenzahlen 1, 3 und 5 zeigen,
9 Würfel, die auf je zwei Seiten die Augenzahlen 2, 4 und 6 zeigen,
1 Würfel, der auf 5 Seiten die Augenzahl 5 und auf einer Seite die Augenzahl 6 zeigt,
alle übrigen Würfel sind normal. Einer dieser Würfel wird zufällig ausgewählt und 4 mal geworfen. Dabei erscheint 4 mal die Augenzahl 5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Würfel auf 5 Seiten die Augenzahl 5 zeigt?

27) Von drei Karten gleicher Größe ist eine auf beiden Seiten weiß, eine auf beiden Seiten rot, und die dritte auf einer Seite weiß und auf der zweiten Seite rot. Eine dieser Karten wird auf einen Tisch gelegt. Die sichtbare Seite ist rot. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die verdeckte Seite rot ist.

28) Bei einer Prüfung soll einE StudentIn bei einer der Prüfungsfragen die richtige Antwort aus drei vorgegebenen Antworten herausfinden, wobei genau eine dieser drei Antworten richtig ist. Er/Sie weiss die richtige Antwort nicht, schätzt aber, dass die erste Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{30}$ richtig ist, die zweite Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10}$ richtig ist, und die dritte Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ richtig ist. Daher versucht er/sie den/die mit der Aufsicht betrautEn AssistentIn zu fragen, ihm/ihr doch eine der Antworten 2 oder 3 als falsch zu bestätigen. Zunächst verweigert der/die AssistentIn noch die Antwort, doch dann läßt er/sie sich erweichen und sagt dem/der StudentIn, dass die dritte Antwort falsch ist.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Antwort richtig ist?
   b) Welche Antwort sollte der/die StudentIn ankreuzen, um mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit die richtige Antwort anzukreuzen?

29) Ein Autotyp kann mit folgenden Motoren gekauft werden: Benzin 1.5l, Benzin 1.8l, Benzin 2.2l GTi, Diesel 2.0l, Diesel 2.2l Tdi. Weiters ist dieser Typ in den Ausstattungsvarianten *Basic*, *Comfort* und *Luxus* erhältlich, und kann in den Farben weiß, rot, blau, grün, grau und schwarz geliefert werden.
   a) Wieviele verschiedene Varianten dieses Autotyps gibt es, wenn alle Kombinationen möglich sind?
   b) Die Ausstattungsvariante *Basic* ist nur zusammen mit dem 1.5l Benzinmotor oder dem 2.0l Dieselmotor, sowie mit den Farben weiß und rot kombinierbar. Weiters sind die Fahrzeuge mit Dieselmotor nicht in den Farben blau und grün lieferbar, und die Ausstattungsvariante *Luxus* kann nicht in den Farben weiß und schwarz bestellt werden. Wieviele verschiedene Varianten dieses Autotyps gibt es in diesem Fall?
   c) Die Ausstattungsvariante *Basic* ist nur zusammen mit dem 1.5l Benzinmotor oder dem 2.0l Dieselmotor, sowie mit den Farben weiß, rot und grau kombinierbar. Der 2.2l GTi Benzinmotor ist nur in der Sonderausstattungsvariante *Sport* und in den Farben rot oder schwarz erhältlich. Den 2.2l Tdi Dieselmotor kann man nur in der Ausstattungsvariante *Comfort* und den Farben blau, grün oder grau, oder der Sonderausstattungsvariante *Sport* und den Farben rot oder schwarz bestellen. Wieviele verschiedene Varianten dieses Autotyps gibt es in diesem Fall?

30) Ein Auto hat 4 Sitzplätze. Vier Personen steigen in dieses Auto ein um eine Autofahrt zu unternehmen.
   a) Auf wieviele Arten können sie die Sitzplätze einnehmen, wenn jedEr von ihnen einen Führerschein hat?
   b) Auf wieviele Arten können sie die Sitzplätze einnehmen, wenn nur zwei von diesen Personen einen Führerschein haben?

31) In einer Fußballliga spielen 16 Vereine. Wieviele Spiele gibt es, wenn jeder Verein gegen jeden anderen Verein jeweils zu Hin- und Rückspiel antreten muss?

32) Auf einer Veranstaltung werden die fünf Reden von den 5 RednerInnen A, B, C, D und E gehalten.
   a) Wieviele Möglichkeiten gibt es die RednerInnenliste zu gestalten?
   b) RednerIn B muss seine/ihre Rede erst nach der Rede (muss nicht unmittelbar darauf sein!) von A halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es in diesem Fall die RednerInnenliste zu gestalten?

c) RednerIn B muss seine/ihre Rede unmittelbar nach der Rede von A halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es in diesem Fall die RednerInnenliste zu gestalten?

d) RednerIn B muss seine/ihre Rede unmittelbar nach der Rede von A, und RednerIn D darf seine/ihre Rede nicht vor der Rede von B halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es in diesem Fall die RednerInnenliste zu gestalten?

e) RednerIn B muss seine/ihre Rede unmittelbar nach der Rede von A, RednerIn D darf seine/ihre Rede nicht vor der Rede von B, und RednerIn C darf seine/ihre Rede nicht vor der Rede von E halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es in diesem Fall die RednerInnenliste zu gestalten?

33) Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten für die folgenden Zufallsexperimente.

a) Einen Lottotipp abgeben (6 Zahlen aus 1–45).

b) Das Ziehen von 5 Karten aus 20 Karten (siehe Beispiel 13) f)).

c) Das Ziehen von 5 Karten aus 52 Karten (siehe Beispiel 13) g)).

d) Antworten zu einer Prüfung mit 10 Fragen, zu denen jeweils 4 Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind, von denen jeweils genau eine richtig ist, falls zu jeder Frage genau eine Antwort angekreuzelt wird.

e) Antworten zu einer Prüfung mit 10 Fragen, zu denen jeweils 4 Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind, von denen jeweils genau eine richtig ist, falls zu jeder Frage entweder genau eine Antwort oder gar keine angekreuzelt wird.
Hinweis: Man könnte den binomischen Lehrsatz verwenden.

f) Das Aufteilen von 20 Karten (siehe Beispiel 13) f)) auf 4 Personen, von denen jede 5 Karten erhält.

g) Das Werfen von 7 Würfeln.

34) Wenn man einen Totoschein (bei 12 Spielen wird jeweils 1, 2 oder X angekreuzt) rein zufällig ausfüllt und die Fußballspiele rein zufällige Ergebnisse (1, 2 oder X tritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auf) lieferten, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen „Zehner“ (das heißt genau 10 Spiele liefern dasselbe Ergebnis, auf das getippt wurde) getippt zu haben?

35) Aus dem in Beispiel 13) g) beschriebenen Kartenspiel (52 Karten) werden 5 Karten gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

a) Es wurden vier Asse gezogen.

b) Unter den 5 Karten haben drei Karten denselben Wert, und die beiden anderen Karten zeigen den gleichen (natürlich vom Wert der drei anderen unterschiedlichen) Wert.

c) Ordnet man die Werte der Größe nach, so folgt der Wert der nächsthöheren Karte unmittelbar auf den Wert der nächstkleineren (dabei sind die Werte durch $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 <$ Bub $<$ Dame $<$ König $<$ Ass geordnet, und „unmittelbar folgen“ heißt, dass er der nächsthöhere Wert in der obigen Anordnung ist).

d) Das in Beispiel c) beschriebene Ereignis ist erfüllt, alle Karten sind von einer Farbe, aber es wurde kein Ass gezogen.

36) In einer Urne befinden sich 5 grüne, 7 blaue und 4 rote Kugeln. Es werden 7 Kugeln zufällig aus dieser Urne gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um zwei grüne, drei blaue und zwei rote Kugeln handelt.

37) An einer Kutschenfahrt nehmen 23 Personen teil. Von den 4 zur Verfügung stehenden Kutschen bietet die erste 5 Personen, die zweite 8 Personen, die dritte 6 Personen und die vierte 4 Personen Platz.
   a) Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es die 23 Personen auf die 4 Kutschen aufzuteilen?
   b) Eine der 23 Personen ist der/die ReiseleiterIn. Wenn die 23 Personen zufällig auf die 4 Kutschen aufgeteilt werden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der/die ReiseleiterIn auf der dritten Kutsche fährt?

38) Zwei SpielerInnen, A und B, spielen folgendes Spiel. In jeder Runde wird eine Münze geworfen. Falls dabei Edelweiß erscheint, dann gewinnt A diese Runde, und B gewinnt diese Runde, wenn Zahl erscheint. Als GesamtsiegerIn soll der/diejenige gelten, der/die zuerst insgesamt 6 Runden gewonnen hat. Nach 8 Runden ist 5 mal Edelweiß und drei mal Zahl erschienen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt.

39) Zwei SpielerInnen, A und B, spielen folgendes Spiel. Sie ziehen abwechselnd aus einer Urne, in der sich 94 gelbe und 152 grüne Kugeln befinden, eine Kugel, so lange bis einEr von ihnen gewonnen hat. Falls der/die SpielerIn nicht gewonnen hat, legt er/sie die Kugel in die Urne zurück. SpielerIn A beginnt zu ziehen. Falls A bei seinem/ihrem Zug eine gelbe Kugel zieht, dann hat er/sie gewonnen. Hingegen gewinnt SpielerIn B, falls er/sie bei seinem/ihrem Zug eine grüne Kugel zieht. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt.

40) Bestimme den Wahrscheinlichkeitsvektor für die folgenden Zufallsvariablen beim Werfen von zwei Würfeln.
   a) Die Summe der Augenzahlen.
   b) Das Maximum der beiden Augenzahlen.
   c) Der Betrag der Differenz der beiden Augenzahlen.
   d) Das Doppelte der Augenzahl des ersten Würfels, falls der zweite Würfel einen Sechser zeigt, die Augenzahl des ersten Würfels, falls der zweite Würfel eine ungerade Augenzahl zeigt, und 0 in allen anderen Fällen.

41) a) Berechne $P(X \leq 8)$, wobei X wie in Beispiel 40) a) ist.
   b) Berechne $P(6 \leq X < 11)$, wobei X wie in Beispiel 40) a) ist.
   c) Berechne $P(X \leq 2)$, wobei X wie in Beispiel 40) c) ist.
   d) Berechne $P(X > 5)$, wobei X wie in Beispiel 40) d) ist.
   e) Berechne den Erwartungswert und die Streuung der in Beispiel 40) beschriebenen Zufallsvariablen.

42) Die Zufallsvariable X sei durch die Verteilung $f(x) := \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{x^2+1}$ für $-1 \leq x \leq 1$ und $f(x) := 0$ für $|x| > 1$ gegeben.
   a) Warum ist die oben angegebene Funktion tatsächlich die Verteilung einer Zufallsvariablen?
   b) Berechne $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \leq X \leq 1\right)$.
   c) Bestimme den Erwartungswert von X.
   d) Bestimme die Streuung von X.

43) Ein Punkt wird zufällig (gleichverteilt) im Quadrat $[0,4]^2$ gewählt. Die Zufallsvariable X sei der Abstand des Punkts vom Rand des Quadrats. Bestimme die Dichte von X.

44) Eine Person A spielt gemeinsam mit den SpielerInnen B, C und D mit einem 20 Karten enthaltenden Kartenspiel (siehe Beispiel 13) f)), wobei C als PartnerIn von A, und B und D als GegnerInnen von A gelten. JedEr der 4 SpielerInnen erhält 5 Karten. Dabei hat A alle 4 Asse, sowie den Karo König erhalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einEr seiner/ihrer GegnerInnen sowohl den Karo Zehner als auch noch mindestens eine weitere Karo Karte erhalten hat?

45) Ein Würfel wird 5 mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse.
- a) Es erscheint genau drei mal ein Sechser.
- b) Es erscheint genau zwei mal ein Sechser.
- c) Es erscheint genau drei mal eine gerade Augenzahl.
- d) Es erscheint genau zwei mal eine Augenzahl, die größer als oder gleich 5 ist.
- e) Es erscheint genau 4 mal eine ungerade Augenzahl.

46) Betrachte das Werfen einer Münze.
- a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass bei 8 Würfen mindestens 6 mal Edelweiß erscheint.
- b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass bei 12 Würfen mindestens 9 mal Edelweiß erscheint.
- c) Welche der beiden Wahrscheinlichkeiten (aus den Beispielen a) und b)) ist größer? Versuche das Ergebnis intuitiv zu begründen.
- d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 11 Würfen höchstens 8 mal Edelweiß erscheint.
- e) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen Edelweiß mindestens 5 mal und höchstens 7 mal erscheint.

47) Untersuche, ob durch die folgenden Definitionen Verteilungen von Zufallsvariablen beschrieben werden können (mit exakten Begründungen).
- a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $P(X=k) := \frac{1}{k}$.
- b) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $P(X=k) := \frac{1}{k^2}$.
- c) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $P(X=k) := \frac{1}{\log 2} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

48) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 60 Würfen mit einem Würfel der Sechser öfter als 5 mal auftritt.

49) Die Zufallsvariable X habe die Dichte $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ für $x \geq 1$ und $f(x) := 0$ für $x < 1$.
- a) Zeige, dass diese Funktion tatsächlich die Dichte einer Zufallsvariablen ist.
- b) Berechne $P(2 \leq X \leq 8)$.
- c) Bestimme t so, dass $P(3 \leq X \leq t) = \frac{1}{4}$ ist.
- d) Berechne den Erwartungswert und die Streuung von X.

50) Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable mit $\sigma(X) > 0$. Setze $\mu := E(X)$ und $\sigma := \sigma(X)$. Zeige, dass $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ Erwartungswert 0 und Streuung 1 hat.

51) In einem Waggon eines Zuges fahren 75 Personen, von denen 18 SchmugglerInnen sind. An der Grenze durchsucht der/die ZollbeamtIn 4 Personen, die er/sie durch Zufall ausgewählt hat.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einE SchmugglerIn durchsucht wird?
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl mindestens einE SchmugglerIn, als auch mindestens eine Person, die nicht schmuggelt, durchsucht werden.
   c) Unter diesen vier vom/von der ZollbeamtIn durchsuchten Personen befanden sich sowohl mindestens einE SchmugglerIn, als auch mindestens eine Person, die nicht schmuggelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine unter den durchsuchten Personen zufällig ausgewählte Person SchmugglerIn ist.

52) Untersuche, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dichte einer Zufallsvariablen sein können (mit exakten Begründungen).
   a) $f(x) := \frac{1}{2}\sin x$ für $0 \leq x \leq 3\pi$, und $f(x) := 0$ für $x \leq 0$ oder $x \geq 3\pi$.
   b) $f(x) := \dfrac{8}{x^2 + 2x - 15}$ für $x \geq 7$, und $f(x) := 0$ für $x < 7$.
   c) $f(x) := \dfrac{3}{x^2 - 10x + 25}$ für $x \geq 2$, und $f(x) := 0$ für $x < 2$.

53) In einer Urne befinden sich zwei rote, drei gelbe und 6 grüne Kugeln. Die Kugeln werden (ohne Zurücklegen) nacheinander aus der Urne gezogen. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Züge bis zum erstmaligen Ziehen einer gelben Kugel zählt (also $X = k$ genau dann, wenn beim k-ten Zug das erste Mal eine gelbe Kugel gezogen wurde). Berechne den Erwartungswert von X. Weiters bestimme die Streuung von X.

54) Unter 30 Würfeln befinden sich
5 Würfel, die auf je drei Seiten die Augenzahlen 3 und 4 zeigen,
3 Würfel, die auf je drei Seiten die Augenzahlen 1 und 6 zeigen,
1 Würfel, der auf 5 Seiten die Augenzahl 1 und auf einer Seite die Augenzahl 6 zeigt,
alle übrigen Würfel sind normal. Einer dieser Würfel wird zufällig ausgewählt und 5 mal geworfen. Dabei erscheint 5 mal die Augenzahl 1. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Würfel auf 5 Seiten die Augenzahl 1 zeigt.

55) Eine Versicherung nimmt an, dass einE AutofahrerIn mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ innerhalb eines Jahres einen oder mehrere Unfälle verschuldet. Weiters wird angenommen, dass der von der Versicherung zu bezahlende Gesamtschaden aller Unfälle innerhalb eines Jahres, den einE AutofahrerIn verschuldet, der/die mindestens einen Unfall in diesem Jahr verschuldet hat, 8 000 € beträgt. Die jährlichen Fixkosten dieser Versicherung betragen 40 Millionen €. Es haben 100 000 AutofahrerInnen bei dieser Versicherung eine Haftpflichtversicherung abgeschlossen. Falls allen diesen AutofahrerInnen dieselbe jährliche Haftpflichtversicherungsprämie verrechnet wird, wie hoch müsste diese sein, damit die Versicherung kostendeckend arbeitet?

56) Die Zufallsvariable X habe die Dichte $f(x) := \dfrac{384}{x^7}$ für $x \geq 2$ und $f(x) := 0$ für $x < 2$.
- a) Zeige, dass diese Funktion tatsächlich die Verteilung einer Zufallsvariablen ist.
- b) Berechne $P(5 \leq X \leq 10)$.
- c) Berechne den Erwartungswert und die Streuung von X.

57) Sei X die in Beispiel 43) beschriebene Zufallsvariable. Bestimme den Erwartungswert und die Streuung von X.

58) Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Zeige, dass

$$\int\limits_{\mu+a\sigma}^{\mu+b\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

gilt.

59) Eine automatische Abfüllanlage für Milchflaschen ist so eingestellt, dass das in eine Flasche abgefüllte Milchvolumen normalverteilt ($N(\mu, \sigma)$-verteilt) mit $\mu = 1000\,\mathrm{cm}^3$ (also 1 Liter) und $\sigma = 5\,\mathrm{cm}^3$ ist. Es wird gerade eine Milchflasche abgefüllt.
- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche mindestens 0.99 l Milch enthält.
- b) In eine Flasche passen höchstens $1016\,\mathrm{cm}^3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Abfüllvorgang keine Milch verschüttet wird?

60) Eine Fabrik erzeugt elektronische Bauteile für Computer. Von den in den Verkauf gelangten Bauteilen sind 0.5% fehlerhaft. Ein Computerhersteller hat 8000 dieser Bauteile gekauft. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 55 der 8000 gekauften Bauteile fehlerhaft sind auf folgende Arten.
- a) Direkt mit der Binomialverteilung.
- b) Mit Hilfe der Approximation durch die Normalverteilung.
- c) Mit Hilfe der Approximation durch die Poissonverteilung.

Hinweis: Dieses Beispiel sollte man sinnvollerweise mit Hilfe eines Computers lösen.

61) Zwei Mannschaften, A und B, bestreiten ein Fußballspiel. Falls ein Tor fällt, so hat dieses mit Wahrscheinlichkeit p die Mannschaft A erzielt. Angenommen, in diesem Spiel sind insgesamt n Tore gefallen.
- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft A genau k Tore erzielt hat.
- b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft A das Spiel gewonnen hat.
- c) Welche Möglichkeiten gibt es für den Fall, dass A nicht gewonnen hat, und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie jeweils ein?
- d) Gelten die obigen Ergebnisse immer noch, wenn man „Fußball“ durch „Handball“ oder „Eishockey“ ersetzt? (Versuche noch weitere Möglichkeiten zu finden.)

62) Zwei Mannschaften, A und B, bestreiten ein Fußballspiel. Falls ein Tor fällt, so hat dieses mit Wahrscheinlichkeit p die Mannschaft A erzielt. Sei P_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft A ein Spiel gewinnt, in dem n Tore gefallen sind.
- a) Beweise, dass $P_{n+2} > P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, falls $p > \frac{1}{2}$.
- b) Ist $P_{n+1} > P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig, wenn $p > \frac{1}{2}$?
- c) Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, $n_1 < n_2$ und n_1 sei gerade. Zeige, dass $P_{n_2} > P_{n_1}$ gilt, falls $p > \frac{1}{2}$.

d) Erkläre intuitiv die Ergebnisse von Beispiel a) und Beispiel c).
e) Untersuche den Fall $p < \frac{1}{2}$. Gibt es dabei Überraschungen?

63) Zwei Mannschaften, A und B, bestreiten ein Fußballspiel. Falls ein Tor fällt, so hat dieses mit Wahrscheinlichkeit p die Mannschaft A erzielt. In einem Fußballspiel fallen mit Wahrscheinlichkeit p_n genau n Tore. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft A das Spiel gewinnt.

Weiters bestimme den numerischen Wert dieser Wahrscheinlichkeit, falls $p = 0.6$ gilt und die Wahrscheinlichkeiten p_n wie in folgender Tabelle seien:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0.1	0.22	0.26	0.22	0.1	0.075	0.015	0.01

Außerdem bestimme die numerischen Werte für die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft A das Spiel verliert, und die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel Unentschieden endet.

64) Zwei Mannschaften, A und B, spielen Handball. Falls ein Tor fällt, so hat dieses mit Wahrscheinlichkeit 0.6 die Mannschaft A erzielt.
a) In dem Spiel sind genau 30 Tore gefallen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt unter Verwendung der in Beispiel 61) erzielten Ergebnisse.
b) Berechne die in Beispiel a) gefragte Wahrscheinlichkeit mittels einer Approximation durch die Normalverteilung.
c) In einem Handballspiel fallen mindestens 30 Tore. Was kann man unter Zuhilfenahme der in den Beispielen a) und b) erzielten Ergebnisse über die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft A das Spiel gewinnt, aussagen? Gib exakte Begründungen!

65) Die SpielerInnen A und B spielen Tennis. Wenn einE SpielerIn einen Punkt gewinnt, so hat mit Wahrscheinlichkeit p der/die SpielerIn A diesen Punkt gewonnen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der/die SpielerIn A ein Game gewinnt. Weiters bestimme den numerischen Wert dieser Wahrscheinlichkeit, falls $p = 0.6$ gilt.

66) Ein Würfel wird 100 mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Sechser dabei mindestens 16 und höchstens 18 mal aufgetreten ist auf folgende Arten.
a) Direkt mit der Binomialverteilung.
b) Mit Hilfe der Approximation durch die Normalverteilung.
c) Mit Hilfe der Approximation durch die Poissonverteilung.

67) Aus dem in Beispiel 13) g) beschriebenen Kartenspiel mit 52 Karten werden 5 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau drei Pik und genau zwei Könige sind?

68) Für $n \in \mathbb{N}_0$ nehme die Zufallsvariable X den Wert n mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ an.
a) Zeige, dass damit tatsächlich die Verteilung einer Zufallsvariablen gegeben ist.
b) Berechne den Erwartungswert von X.
c) Berechne die Streuung von X.

69) Die Länge der Nägel eines Erzeugers ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt (normalverteilt) mit $\mu = 4\,\text{cm}$ und $\sigma = 1\,\text{mm}$.
  a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nagel mindestens $3.9\,\text{cm}$ lang ist?
  b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nagel höchstens $4.25\,\text{cm}$ lang ist.
  c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge eines Nagels zwischen $3.8\,\text{cm}$ und $4.1\,\text{cm}$ liegt?

70) Eine Maschine füllt Packungen mit Zucker. Die Füllmenge ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt (normalverteilt) mit $\mu = 1010\,\text{g}$ und $\sigma = 7\,\text{g}$. Das Gesetz schreibt vor, dass höchstens 6% der Packungen weniger Zucker enthalten dürfen als auf der Packung als Mindestabfüllmenge aufgedruckt ist.
  a) Welche Mindestabfüllmenge ist auf die Verpackung zu drucken, wenn die Angabe in vollen Gramm erfolgen soll?
  b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung mindestens die Mindestabfüllmenge und höchstens $1025\,\text{g}$ enthält?
  c) Aufgrund einer Gesetzesänderung dürfen nur mehr höchstens 2% der Packungen weniger als die angegebene Mindestabfüllmenge enthalten. Bestimme die auf die Verpackung zu druckende Mindestabfüllmenge, wenn die Angabe wieder in vollen Gramm erfolgen soll.

71) Ein Geschäft verkauft Schuhe. Die Anzahl der KundInnen, die im Zeitintervall t das Geschäft betreten, ist $P(\nu t)$-verteilt (Poisson-verteilt), wobei $\nu = 15$ KundInnen pro Stunde ist.
  a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 15.15 und 15.30 höchstens 5 KundInnen das Geschäft betreten.
  b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 10.30 und 10.50 mindestens 3 und höchstens 8 KundInnen das Geschäft betreten.
  c) Sei X die Anzahl der KundInnen, die zwischen 14.00 und 15.00 das Geschäft betreten. Berechne den Erwartungswert und die Streuung von X.

72) Nach Bezahlung einer Startgebühr von 2 € kann einE SpielerIn folgendes Spiel spielen. Er/sie würfelt mit einem Würfel. Erscheint kein Sechser, so hat er/sie verloren. Hat er/sie jedoch einen Sechser gewürfelt, so würfelt er/sie solange weiter, bis zum ersten Mal kein Sechser mehr erscheint. Wurde dabei genau n mal der Sechser geworfen, so werden 3^n € als Gewinn ausbezahlt.
  a) Welchen Gewinn hat der/die SpielerIn zu erwarten, wenn man die Startgebühr vom tatsächlich ausbezahlten Gewinn abzieht?
  b) Wie hoch müsste die Startgebühr sein, damit das Spiel „fair“ ist?

73) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim österreichischen Lotto zwei aufeinanderfolgende Zahlen gezogen werden?
Anleitung: Ordne zunächst die gezogenen Zahlen der Größe nach, also $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6$. Wenn darunter keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen vorkommen, so gilt $n_1 < n_2 - 1 < n_3 - 2 < n_4 - 3 < n_5 - 4 < n_6 - 5 \leq 40$. Nütze das um die Anzahl der Möglichkeiten, bei denen keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen vorkommen, zu bestimmen.

74) Ein Würfel wird 10 000 mal geworfen. Mit Hilfe der Approximation durch die Normalverteilung berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
a) Es treten mindestens 1567 und höchstens 1766 Sechser auf.
b) Es erscheinen höchstens 1000 Sechser.
c) Es treten mindestens 2000 Sechser auf.

75) In einem Museum werden an einer Kassa Eintrittskarten für den Besuch des Museums verkauft. Die Anzahl der BesucherInnen, die sich im Zeitintervall t eine Eintrittskarte kaufen, ist $P(\nu t)$-verteilt (Poisson-verteilt) mit $\nu = 100$ BesucherInnen pro Stunde.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 15.15 und 15.45 höchstens 60 BesucherInnen eine Eintrittskarte kaufen.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 11.00 und 11.10 mindestens 10 und höchstens 20 BesucherInnen eine Eintrittskarte kaufen.
c) Falls zwischen 14.00 und 14.15 mindestens 30 BesucherInnen eine Eintrittskarte kaufen, wird bis 17.15 eine zweite Kassa geöffnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zweite Kassa geöffnet wird?

76) Die Zufallsvariable X habe die Dichte f, wobei f durch $f(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \geq 0$ und $f(x) := 0$ für $x < 0$ definiert ist.
a) Zeige, dass diese Funktion tatsächlich die Verteilung einer Zufallsvariablen ist.
b) Berechne den Erwartungswert von X.
c) Berechne die Streuung von X.

77) Ein Waschmittelerzeuger füllt die 2500 g Waschmittelpackungen mit Hilfe einer Abfüllmaschine. Die von dieser Maschine abgegebene Füllmenge ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\sigma = 12\,\mathrm{g}$, wobei μ justierbar ist (also μ kann an der Maschine eingestellt werden), allerdings muss der Wert für μ auf einen vollen Grammwert eingestellt werden. Auf Grund der Beschaffenheit der Packungen dürfen höchstens 1% der Packungen mehr als 2530 g Waschmittel enthalten.
a) Auf welchen Wert für μ sollte die Abfüllmaschine eingestellt werden, wenn dieser Wert so groß wie möglich gewählt werden soll?
b) Das Gesetz schreibt vor, dass auf jede Waschmittelpackung eine Mindestabfüllmenge in vollen Gramm zu drucken ist, die von höchstens 4% der Packungen unterschritten werden darf. Welche Mindestabfüllmenge ist auf die Waschmittelpackung zu drucken, wenn die Maschine auf den in Beispiel a) bestimmten Wert eingestellt ist?
c) Die Abfüllmaschine ist auf den in Beispiel a) ermittelten Wert eingestellt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung zwischen 2475 g und 2525 g Waschmittel enthält.

78) In einer Fabrik werden Abfüllanlagen für Mehlpackungen mit 1000 g Normalfüllmenge hergestellt. Die von diesen Anlagen abgegebene Mehlmenge ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt, wobei μ vom Benutzer in vollen Gramm justierbar ist, und σ während der Produktion der Anlagen festgelegt wird (je kleiner σ ist, umso aufwendiger ist die Produktion der Anlagen). Auf Grund gesetzlicher Vorschriften sind die Mehlproduzenten verpflichtet eine Mindestabfüllmenge auf die Verpackung zu drucken, die von höchstens 3% der Mehlpackungen unterschritten werden darf.

a) Die Mehlproduzenten wünschen, dass mindestens 990 g Mindestabfüllmenge angegeben werden kann, falls die Anlage auf $\mu = 1000\,\text{g}$ eingestellt ist. Welchen Wert für σ muss der Hersteller der Abfüllanlagen erreichen?

b) Der Hersteller der Abfüllanlagen konnte den Wert $\sigma = 4.8\,\text{g}$ für seine Anlagen erreichen. Welchen Wert für μ muss ein Mehlproduzent mindestens einstellen, wenn er 995 g Mindestabfüllmenge auf die Mehlpackungen drucken will?

c) Die Abfüllanlage hat den Wert $\sigma = 4.8\,\text{g}$, der Mehlproduzent hat $\mu = 1006\,\text{g}$ eingestellt, und er druckt 995 g Mindestabfüllmenge auf die Packungen. In eine Mehlpackung passen höchstens 1019 g Mehl. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung mindestens die Mindestabfüllmenge enthält und beim Abfüllen kein Mehl verschüttet wurde.

79) Sei X eine $E(\lambda)$-verteilte (exponentialverteilte) Zufallsvariable. Berechne den Erwartungswert und die Streuung von X.

80) Die Lebensdauer von Glühbirnen ist $E(\lambda)$-verteilt (exponentialverteilt) mit $\lambda = 0.0005$, wobei die Zeit in Stunden angegeben wird.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Glühbirne mindestens 100 Stunden funktioniert?

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Glühbirne mindestens 200 Stunden funktioniert.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Lebensdauer der Glühbirne mindestens 100 Stunden und höchstens 8000 Stunden?

d) Bestimme x so, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.95 die Lebensdauer der Glühbirne höchstens x Stunden beträgt.

81) Ein Autohersteller produziert den Autotyp A mit dem Motor B (wir werden dazu im Folgenden kurz nur A sagen). Die Höchstgeschwindigkeit dieser Autos ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 190\,\text{km/h}$ und $\sigma = 6\,\text{km/h}$.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Auto des Modells A die Höchstgeschwindigkeit zwischen 177 km/h und 206 km/h liegt.

b) Der Hersteller gibt im Prospekt als Höchstgeschwindigkeit des Modells A einen Wert an, der von höchstens 5% dieser Autos unterschritten wird. Welche Höchstgeschwindigkeit wird daher ins Prospekt gedruckt?

c) Ein kritischer Verkehrsklub bewertet Autos auf ihre Umweltverträglichkeit, wobei hohe Höchstgeschwindigkeiten viele negative Punkte bringen. Als Höchstgeschwindigkeit eines Modells wertet dieser Verkehrsklub jene Höchstgeschwindigkeit, die von höchstens 1% der Autos dieses Modells überboten wird. Mit welcher Höchstgeschwindigkeit wird demnach das oben beschriebene Modell A gewertet?

82) Bei einem Spiel hat man in einer Runde Erfolg, wenn man bei drei Versuchen mindestens einmal einen Sechser mit einem Würfel wirft (etwa beim „Mensch ärgere Dich nicht“, wenn man eine Figur „ansetzen“ muss). Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Runden angibt, bis man das erste Mal Erfolg hat.

a) Welche Verteilung hat X?

b) Bestimme den Erwartungswert von X.

83) Eine steile Forststraße wird gerne von MountainbikerInnen zum Bergabfahren benützt. Die Anzahl der Unfälle von MountainbikerInnen auf dieser Strecke im Zeitintervall t ist $P(\nu t)$-verteilt mit $\nu = 6$ Unfälle pro Jahr. Der/Die BesitzerIn des Grundstücks, auf dem die Forststraße verläuft, wählt willkürlich einen Zeitpunkt und zählt die Zeit X bis zum ersten Unfall eines/einer MountainbikerIn auf dieser Forststraße nach diesem Zeitpunkt.
a) Welche Verteilung hat X?
b) Bestimme den Erwartungswert von X.

84) Es sei X die Anzahl der Runden, bis beim Roulette die Kugel das erste Mal auf eine Zahl zwischen 1 und 12 (einschließlich der Zahlen 1 und 12) fällt.
a) Welche Verteilung hat X?
b) Bestimme den Erwartungswert von X.

85) Für $k \in \mathbb{N}$ nehme die Zufallsvariable X den Wert k mit Wahrscheinlichkeit $\dfrac{2k^2}{3^{k+1}}$ an.
a) Zeige, dass damit tatsächlich die Verteilung einer Zufallsvariablen gegeben ist.
b) Berechne den Erwartungswert von X.
c) Berechne die Streuung von X.
Anleitung: Betrachte zunächst die Formel für die geometrische Reihe für $|x| < 1$ als eine Funktion $f_0(x)$. Durch wiederholtes Berechnen von $xf'(x)$ leite Formeln für $\sum_{n=1}^{\infty} n^j x^n$ für $|x| < 1$ und $j = 1, 2, 3, 4$ her.

86) Die Zufallsvariable X habe die Dichte $f(x)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist (selbstverständlich ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$). Bestimme die Dichte $g(x)$ der Zufallsvariablen X^2.
Hinweis: Arbeite mit den Verteilungen $F(x)$ von X und $G(x)$ von X^2.

87) Wenn X die Dichte $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ hat (also $N(0,1)$-verteilt ist), welche Dichte hat X^2?
Hinweis: Verwende das Ergebnis von Beispiel 86).

88) Die Zufallsvariable X habe die Verteilung $f(x) := \dfrac{\pi}{10} \sin\left(\dfrac{\pi}{5} x\right)$ für $0 \leq x \leq 5$ und $f(x) := 0$ für $x \leq 0$ oder $x \geq 5$.
a) Zeige, dass diese Funktion tatsächlich die Verteilung einer Zufallsvariablen ist.
b) Berechne den Erwartungswert von X.
c) Berechne die Streuung von X.
d) Bestimme die Dichte von X^2.
Hinweis: Verwende das Ergebnis von Beispiel 86).

89) Es seien X und Y zwei unabhängige, $E(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimme die Dichte von $X + Y$.

90) Die Zufallsvariable X sei $E(\lambda)$-verteilt mit $\lambda = 1$.
   a) Berechne die Dichte von $2X$.
   b) Bestimme $P(2X \leq 1)$.
   c) Es sei Y ebenfalls eine $E(1)$-verteilte Zufallsvariable, und X, Y seien unabhängig. Bestimme $P(X + Y \leq 1)$.
   Hinweis: Verwende das Ergebnis von Beispiel 89).
   d) Warum erhält man bei den Beispielen b) und c) verschiedene Ergebnisse?

91) Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig, X sei $E(2)$-verteilt, und die Dichte von Y sei $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x^2}{36}$ für $0 \leq x \leq 6$ und 0 für $x \leq 0$ oder $x \geq 6$. Bestimme die Dichte von $X + Y$.

92) Ein Punkt wird zufällig (gleichverteilt) im Würfel $[0, 1]^3$ gewählt. Die Zufallsvariable X sei der Abstand des Punkts vom Rand des Würfels.
   a) Bestimme die Dichte und die Verteilung von X.
   b) Berechne den Erwartungswert von X.
   c) Berechne die Streuung von X.

93) Es seien X und Y zwei unabhängige (diskrete) Zufallsvariable, die nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen. Zeige, dass $X + Y$ nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt, und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = n - k)\, P(Y = k)\,.$$

94) Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariable, wobei X eine $P(\lambda_1)$-verteilte und Y eine $P(\lambda_2)$-verteilte Zufallsvariable ist. Zeige, dass $X + Y$ eine $P(\lambda_1 + \lambda_2)$-verteilte Zufallsvariable ist.
Hinweis: Verwende Beispiel 93) und den binomischen Lehrsatz.

95) Beweise die folgende Version des **schwachen Gesetzes der großen Zahlen**:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von quadratisch integrierbaren unabhängigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die gleiche Verteilung haben. Setze $\mu := E(X_1)$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0\,.$$

Anleitung: Verwende die Tschebyschev'sche Ungleichung.

96) Es wurde die Körpergröße von 10 Personen in m gemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:
   1.74, 1.72, 1.81, 1.83, 1.91, 1.86, 1.76, 1.71, 1.83, 1.79.
Bestimme den Median, den Mittelwert und die Standardabweichung der Körpergrößen dieser Personen.

97) Das Ergebnis einer Prüfung lieferte folgende Noten:
   5, 5, 1, 3, 5, 4, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 4, 5, 2, 1, 5, 4, 2, 3, 4, 2, 5, 3, 1, 5, 5, 4, 5, 2.
Stelle die Ergebnisse in einem Balkendiagramm und einem Tortendiagramm dar. Weiters berechne den Median, den Mittelwert und die Standardabweichung dieser Noten.

98) Ein Fußballverein bezahlt seinen FußballspielerInnen die folgenden Jahresgehälter in €:
108 000, 112 000, 132 000, 120 000, 114 000, 119 000, 104 000, 138 000, 125 000, 96 000, 105 000, 111 000, 98 000, 117 000, 122 000.
   a) Berechne den Median, den Mittelwert und die Standardabweichung der Jahresgehälter dieser SpielerInnen.
   b) Der Fußballverein hat einEn neuEn SpielerIn gekauft, dem/der er 750 000 € Jahresgehalt zahlt. Wie wirkt sich das auf den Median, den Mittelwert und die Standardabweichung der Jahresgehälter der SpielerInnen aus?

99) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum_{j=1}^{n}(a-a_j)^2$ minimal wird. Was bedeutet dieses Ergebnis in der beschreibenden Statistik?

100) Die Abfüllanlage einer Waschmittelfirma füllt Waschmittelpackungen. Die Füllmenge ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\sigma = 12\,\mathrm{g}$, wobei μ nicht bekannt ist. Um μ zu bestimmen wurde die Füllmenge von in den Verkauf gelangten Waschmittelpackungen gemessen. Dabei wurden die folgenden Werte (in g) erhalten:
2503, 2522, 2491, 2501, 2483, 2496, 2507, 2512, 2500, 2503, 2518, 2490, 2508, 2524, 2490, 2499, 2509, 2511, 2487, 2504, 2514, 2507, 2493, 2477, 2510, 2495.
   a) Bestimme das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.92 für μ.
   b) Berechne die Konfidenzintervalle mit Sicherheit 0.9, bzw. Sicherheit 0.95, bzw. Sicherheit 0.98, bzw. Sicherheit 0.99, bzw. Sicherheit 0.995 für μ.

101) Die Waschmittelfirma aus Beispiel 100) möchte ein (möglichst gutes) Konfidenzintervall mit 1.4% Irrtumswahrscheinlichkeit für μ finden. Dazu wurde die Füllmenge von 581 in den Verkauf gelangten Waschmittelpackungen mit einer Präzisionswaage gemessen. Der Mittelwert der Füllmenge dieser 581 Packungen betrug 2501.21 g. Welches Konfidenzintervall erhält diese Firma daraus?

102) Bei einer Fernsehshow wird folgendes Spiel gespielt. Einem Kandidaten/Einer Kandidatin wird gesagt, dass in einem von ihm/ihr getrennten Raum zwei Kugeln aus einer Urne, in der sich 16 grüne, 15 gelbe und 9 rote Kugeln befinden, gezogen werden. Er/sie soll dann sagen, ob sich unter diesen beiden Kugeln mindestens eine grüne Kugel befindet, oder ob keine grüne Kugel gezogen wurde. Falls die Antwort richtig ist, gewinnt er/sie einen Preis. Zuvor wird einE zweitEr KandidatIn geholt, der/die nicht weiß wieviele Kugeln welcher Farbe in der Urne waren. Ihm/Ihr werden die zwei gezogenen Kugeln gezeigt, und er/sie soll die Farbe einer der beiden gezogenen Kugeln, auf keinen Fall aber „grün“ dem/der ersten Kandidaten/Kandidatin sagen. DiesEr zweite KandidatIn sagt: „Es war eine rote Kugel unter den zwei Kugeln.“ (im Sinne von: mindestens eine rote Kugel). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln grün ist?

103) Ein Hersteller von Mineralwasser füllt die Mineralwasserflaschen mit einer Abfüllanlage ab. Das Füllvolumen ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\sigma = 6\,\mathrm{cm}^3$.
   a) Um ein 94%-iges Konfidenzintervall für μ zu bestimmen wurde der Inhalt von 19 Mineralflaschen gemessen. Der Mittelwert betrug 1.5021 l (also 1502.1 cm^3). Wie sieht das Konfidenzintervall aus?

b) Beim Test an 253 in den Verkauf gelangten Mineralwasserflaschen wurde mit Präzisionsgeräten der Mittelwert 1.50072 l für das Füllvolumen ermittelt. Bestimme das Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.024 für μ.

104) Von der Abfüllanlage eines Zuckerfabrikanten ist bekannt, dass das abgegebene Füllgewicht $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\sigma = 7\,\mathrm{g}$ ist. Der Fabrikant behauptet, dass der Durchschnitt des Füllgewichts der Zuckerpackungen zumindest 1010 g beträgt. Eine Verbraucherorganisation versucht diese Behauptung zu widerlegen, und misst dazu das Gewicht des Inhalts von 22 in den Verkauf gelangten Zuckerpackungen.

a) Bis zu welchem Mittelwert der Füllgewichte dieser 22 Packungen kann die Verbraucherorganisation sagen die Behauptung des Fabrikanten mit 93%-iger Sicherheit widerlegt zu haben?

b) Bestimme die entsprechenden kritischen Bereiche mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.1, bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit 0.05, bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit 0.02, bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit 0.01, bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit 0.005.

105) In einer Fabrik wird Sonnenblumenöl in 1 l-Flaschen abgefüllt. Es ist bekannt, dass das Füllvolumen $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\sigma = 9\,\mathrm{cm}^3$ ist. Nach Angaben des Produzenten beträgt der Durchschnitt des Füllvolumens der Sonnenblumenölflaschen zumindest 1.005 l. Um zu versuchen diese Behauptung mit 1.8%-iger Irrtumswahrscheinlichkeit zu widerlegen misst einE PrüferIn eines Konsumentenmagazins das Füllvolumen von 77 Sonnenblumenölflaschen dieses Produzenten.

a) Bestimme den kritischen Bereich für diesen Test.

b) Für den Mittelwert des Füllvolumens dieser 77 Sonnenblumenölflaschen ermittelte der/die PrüferIn 1.0035 l. Was bedeutet dieses Ergebnis für den obigen Test?

c) Unter dem in Beispiel b) ermittelten Ergebnis berechne die Sicherheit, mit der das Konsumentenmagazin behaupten kann, dass das durchschnittliche Füllvolumen der Sonnenblumenölflaschen geringer als 1.005 l ist.

106) Der Sonnenblumenölproduzent aus Beispiel 105) möchte mit Sicherheit 0.992 beweisen, dass der Durchschnitt des Füllvolumens der Sonnenblumenölflaschen zumindest 1.003 l beträgt. Dazu misst er das Füllvolumen von 216 Sonnenblumenölflaschen.

a) Bestimme den kritischen Bereich.

b) Als Mittelwert des Füllvolumens der 216 Sonnenblumenölflaschen ergab sich 1.0047 l. Was bedeutet dieses Ergebnis für diesen Test?

c) Unter dem Ergebnis aus Beispiel b) ermittle mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit der Produzent behaupten kann, dass seine Sonnenblumenölflaschen durchschnittlich zumindest 1.003 l enthalten.

107) In einer Fabrik werden Holzbretter zugeschnitten. Die Dicke dieser Bretter ist normalverteilt. Mit Präzisionsmessgeräten wurde die Dicke von 19 dieser Holzbretter gemessen. Dabei ergab sich ein Mittelwert von 5.11 cm und eine Standardabweichung von 0.82 cm. Bestimme das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.99 für die durchschnittliche Dicke der in dieser Fabrik zugeschnittenen Holzbretter.

108) Ein Mehlproduzent füllt die Mehlpackungen mit einer Abfüllmaschine ab. Das abgegebene Füllgewicht ist normalverteilt. Bei der Messung des Füllgewichts von in den Verkauf gelangten Mehlpackungen ergaben sich folgende Werte (in g):

1008, 1002, 1005, 997, 1003, 1008, 1013, 1006, 1011.

a) Überprüfe, ob mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.03 bewiesen werden kann, dass das durchschnittliche Füllgewicht der Mehlpackungen mindestens 1000 g beträgt.

b) Berechne das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.96 für das Füllgewicht der Mehlpackungen dieses Produzenten.

109) Ein Autohersteller produziert das Modell A, ein Auto des Typs C mit dem Motor B. Die Höchstgeschwindigkeit dieses Modells ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Die Tests des Herstellers an 15 verschiedenen Autos dieses Modells A ergaben folgende Höchstgeschwindigkeiten in km/h:

194, 181, 190, 196, 185, 180, 189, 192, 197, 186, 189, 196, 201, 191, 184.

a) EinE TechnikerIn, der/die das Modell A entwickelt hat, behauptet, dass die durchschnittliche Höchstgeschwindigkeit der Autos dieses Modells größer als 187 km/h ist. Kann diese Behauptung aus den obigen Daten mit 94%-iger Sicherheit bewiesen werden?

b) Bestimme das Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.03 für μ.

c) Berechne das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.93 für σ.

110) In einer Waschmittelfirma werden die Waschmittelpackungen mit einer Abfüllanlage abgefüllt. Das abgegebene Füllgewicht ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Von 27 in den Verkauf gelangten Waschmittelpackungen wurde das Füllgewicht gemessen. Dabei ergab sich ein Mittelwert von 2503.2 g und eine Standardabweichung von 11.94 g.

a) Berechne das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.98 für μ.

b) Bestimme das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.91 für σ.

111) Eine Waschmittelfirma möchte mit Sicherheit 0.93 den relativen Anteil der Bevölkerung, bei dem den Waschmitteln dieser Firma gute Reinigungswirkung zugeschrieben wird, feststellen. Dazu wurden 663 zufällig ausgewählte Personen befragt. Von diesen schrieben 432 Personen den Waschmitteln dieser Firma gute Reinigungswirkung zu. Welches Konfidenzintervall ergibt sich daraus?

112) Eine beliebte Wanderung im Gebiet des *Gran Sasso* (Abruzzen, Italien) führt vom *Campo Imperatore* über die *Direttissima* auf den *Corno Grande* (2912 m). Die Begehungszeit sei normalverteilt. Um die durchschnittliche Begehungszeit mit Sicherheit 0.97 zu bestimmen, wurden die Begehungszeiten von verschiedenen Gruppen von WandererInnen gestoppt. Dabei ergaben sich folgende Zeiten (in Minuten):

188, 165, 176, 204, 181, 192, 161.

Bestimme das entsprechende Konfidenzintervall für die durchschnittliche Begehungszeit.

113) Ein Modekonzern A möchte mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.06 beweisen, dass seine Jeans zumindest 20% des gesamten Jeansmarktes ausmachen. Dazu wird bei 1184 KäuferInnen von Jeans die Marke der gekauften Jean erhoben.

a) Bestimme den kritischen Bereich für den obigen Test.

b) Von den obigen 1184 KäuferInnen kauften 252 eine Jean des Konzerns A. Was bedeutet das für den obigen Test?

c) Berechne das Konfidenzintervall mit Sicherheit 0.92 für den Marktanteil des Konzerns A am Jeansmarkt.

114) Gegen eine bestimmte Krankheit wird das Medikament A eingesetzt, das sich seit Jahren bewährt hat. Bei 2381 mit A behandelten PatientInnen zeigte sich bei 1946 Personen heilende Wirkung, und bei 79 Personen zeigten sich Nebenwirkungen. Der Pharmakonzern, der A herstellt, hat ein neues Medikament B gegen die obige Krankheit entwickelt. Falls mit Sicherheit 0.95 bewiesen werden kann, dass sowohl der relative Anteil der Personen, bei denen B heilende Wirkung zeigt, (der Wirkungsgrad von B) größer als die obere Grenze des Konfidenzintervalls mit Sicherheit 0.98 für den Wirkungsgrad von A ist, als auch der relative Anteil der Personen, bei denen B Nebenwirkungen zeigt, kleiner als 5% ist, dann wird A vom Markt genommen, und das Medikament B wird in Zukunft gegen die obige Krankheit verwendet. Dazu wird B an 473 an obiger Krankheit leidenden PatientInnen getestet.

a) Beschreibe, bei welchen Ergebnissen das Medikament B in Zukunft gegen die obige Krankheit verwendet wird.

b) Die Gesundheitsbehörde verlangt die Angabe der Konfidenzintervalle mit Sicherheit 0.97 für den Wirkungsgrad und den relativen Anteil der Personen, bei denen das Medikament Nebenwirkungen zeigt, des in Zukunft gegen obige Krankheit verwendeten Medikaments. Der Test von B an den obigen 473 Personen zeigte bei 433 PatientInnen heilende Wirkung und bei 14 PatientInnen Nebenwirkungen. Welche Konfidenzintervalle sind der Gesundheitsbehörde anzugeben?

115) Ein Würfel wurde 2178 mal geworfen. Dabei erschien der Einser 369 mal, der Zweier 382 mal, der Dreier 333 mal, der Vierer 351 mal, der Fünfer 386 mal und der Sechser 357 mal. Führe einen Chi-Quadrat-Test mit Sicherheit 0.99 zum Test der folgenden Hypothesen durch.

a) Jede der Augenzahlen erscheint mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

b) Die Augenzahlen 1 bis 5 erscheinen jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.173 und der Sechser erscheint mit Wahrscheinlichkeit 0.135.

116) Um zu testen ob das Füllgewicht der Waschmittelpackungen einer bestimmten Waschmittelfirma $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 2500\,\mathrm{g}$ und $\sigma = 12\,\mathrm{g}$ ist, wurde das Füllgewicht von 143 in den Verkauf gelangten Waschmittelpackungen dieser Firma gemessen. Dabei war das Füllgewicht

bei 2 Packungen niedriger als 2480 g,
bei 8 Packungen zwischen 2480 g und 2485 g,
bei 16 Packungen zwischen 2485 g und 2490 g,
bei 13 Packungen zwischen 2490 g und 2495 g,
bei 19 Packungen zwischen 2495 g und 2500 g,
bei 27 Packungen zwischen 2500 g und 2505 g,
bei 22 Packungen zwischen 2505 g und 2510 g,
bei 18 Packungen zwischen 2510 g und 2515 g,
bei 7 Packungen zwischen 2515 g und 2520 g,
bei 11 Packungen höher als 2520 g.

Führe einen Chi-Quadrat-Test mit Sicherheit 0.95 durch.

117) An einem unfallgefährdeten Straßenstück wurde ein Jahr lang die Anzahl der täglichen Unfälle protokolliert. Es gab
an 207 Tagen keinen Unfall,
an 111 Tagen genau einen Unfall,
an 40 Tagen genau zwei Unfälle,
an 7 Tagen drei oder mehr Unfälle.
Um mit Sicherheit 0.93 zu testen, ob die Anzahl der Unfälle auf diesem Straßenstück pro Tag $P(0.6)$-verteilt ist, führe einen Chi-Quadrat-Test durch.

118) Um zu testen, ob Rauchen Lungenkrebs fördert, werden die medizinischen Daten von 3347 Personen ausgewertet. Von diesen gaben 2038 an regelmäßig zu rauchen (wir bezeichnen sie im Folgenden als RaucherInnen). Von den RaucherInnen waren 41 an Lungenkrebs erkrankt, von den NichtraucherInnen hingegen nur 10. Führe einen Chi-Quadrat-Test mit Sicherheit 0.99 durch, ob Rauchen und an Lungenkrebs erkranken unabhängig sind.

119) Es soll mit Sicherheit 0.92 getestet werden, ob die Ereignisse „eine Person besitzt (mindestens) einen Hund“ und „eine Person fährt öfters mit einem Fahrrad“ unabhängig sind. Bei einer Befragung von 1893 Personen ergab sich:
313 fahren Rad und besitzen einen Hund,
346 besitzen einen Hund, aber fahren nicht Rad,
546 fahren Rad, aber besitzen keinen Hund,
die restlichen Personen fahren nicht Rad und besitzen keinen Hund.
Führe einen Chi-Quadrat-Test durch.

120) Es soll mit Sicherheit 0.97 getestet werden, ob bei AutobesitzerInnen ein Zusammenhang zwischen Monatseinkommen und Höchstgeschwindigkeit des Autos besteht. Von 3865 Personen liegen statistische Daten vor. Diese wurden in die folgenden 5 Einkommensklassen eingeteilt:
Klasse 1: Monatseinkommen geringer als 1000 €,
Klasse 2: Monatseinkommen zwischen 1000 € und 2000 €,
Klasse 3: Monatseinkommen zwischen 2000 € und 3000 €,
Klasse 4: Monatseinkommen zwischen 3000 € und 5000 €,
Klasse 5: Monatseinkommen höher als 5000 €.
Die Höchstgeschwindigkeiten der Autos wurden in die folgenden 4 Typen unterteilt:
Typ 1: Höchstgeschwindigkeit kleiner als 160 km/h,
Typ 2: Höchstgeschwindigkeit zwischen 160 km/h und 180 km/h,
Typ 3: Höchstgeschwindigkeit zwischen 180 km/h und 200 km/h,
Typ 4: Höchstgeschwindigkeit größer als 200 km/h.
Dabei ergab sich die folgende Tabelle.

	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4
Klasse 1	340	194	47	87
Klasse 2	366	483	370	317
Klasse 3	88	249	300	168
Klasse 4	49	68	213	147
Klasse 5	37	33	212	97

Führe einen Chi-Quadrat-Test durch.