

Motivation

Eine Vielzahl an Aufgabenstellungen aus der Bildverarbeitung lässt sich mithilfe mathematischer Modellierungs- und Regularisierungstechniken auf konvexe Optimierungsaufgaben zurückführen. Prominente Beispiele dafür sind das Entrauschen und Schärfen von Bildern, die Bildkompression, die Rekonstruktion fehlender Bildanteile oder die maschinelle Klassifikation von Bildern anhand vorhandener Zuordnungsmuster. Sowohl die fehlende Glattheit, welche durch die Natur der Regularisierungsfunktionale oder der

Kostenfunktionale bedingt wird, als auch die komplexen Formulierungen der zu lösenden Optimierungsaufgaben

$$\text{minimiere}_x \quad f(x) + \sum_{i=1}^m (g_i \square l_i)(L_i x) + h(x)$$

schließen den Einsatz von klassischen Algorithmen der differenzierbaren Optimierung aus.

Daher war es notwendig, neue Wege zu gehen und neue Klassen von numerischen Verfahren mit attestierbaren Konvergenzeigenschaften, die von den verfügbaren konvexen Strukturen Gebrauch machen und die vorhandenen Funktionen und Operatoren einzeln und in einer einfach zu implementierende Art und Weise auswerten, einzuführen und zu untersuchen.

Methodik

Zum Lösen des primalen konvexen Minimierungsproblems wurde als erstes ein zu ihm duales Maximierungsproblem

$$\text{maximiere}_{v_1, \dots, v_m} \quad -(f^* \square h^*) \left(-\sum_{i=1}^m L_i^* v_i \right) - \sum_{i=1}^m (g_i^*(v_i) + l_i^*(v_i))$$

konstruiert. Das Zusammenspiel der beiden Optimierungsaufgaben ermöglichte bei Erfüllung von sogenannten Qualifikationsbedingungen die Formulierung eines hinreichenden und notwendigen Systems von Optimalitätsbedingungen

$$-\sum_{i=1}^m L_i^* v_i \in \partial f(x) + \nabla h(x) \text{ und } v_i \in (\partial g_i \square \partial l_i)(L_i x), i = 1, \dots, m.$$

Jede Lösung dieses Systems von Inklusionen lieferte jeweils eine optimale Lösung für das primale Minimierungsproblem und für das duale Maximierungsproblem.

Zum Lösen des Systems von Optimalitätsbedingungen, wurden in entsprechend normierten Produkträumen klassische und moderne Splitting-Verfahren zur Lösung von maximal monotonen Inklusionen eingesetzt. Die daraus entstandenen iterativen Schemata generierten Folgen von sowohl primalen als auch dualen Iterierten, die jeweils eine optimale Lösung der Minimierungs- und Maximierungsaufgabe näherungsweise approximierten.

Bezeichnend für diese sogenannten primal-dualen Splitting-Verfahren ist deren einfache Implementierung, gegeben durch die Tatsache, dass alle vorhandenen Funktionen und Operatoren einzeln ausgewertet werden, wobei dies für die nichtglaten konvexen Funktionen anhand der entsprechenden Proximal-Punkt-Abbildungen geschieht. Darüber hinaus lassen sich Konvergenzaussagen sowohl für die Folgen der primalen und der dualen Iterierten, als auch für die Folgen der entsprechenden Zielfunktionswerte beweisen. Die Natur der primal-dualen Algorithmen ermöglicht durch eine dynamische Anpassung der Schrittweiten die Erhöhung der Konvergenzge-

windigkeit und demzufolge eine Reduzierung der zum Lösen benötigten Zeit.

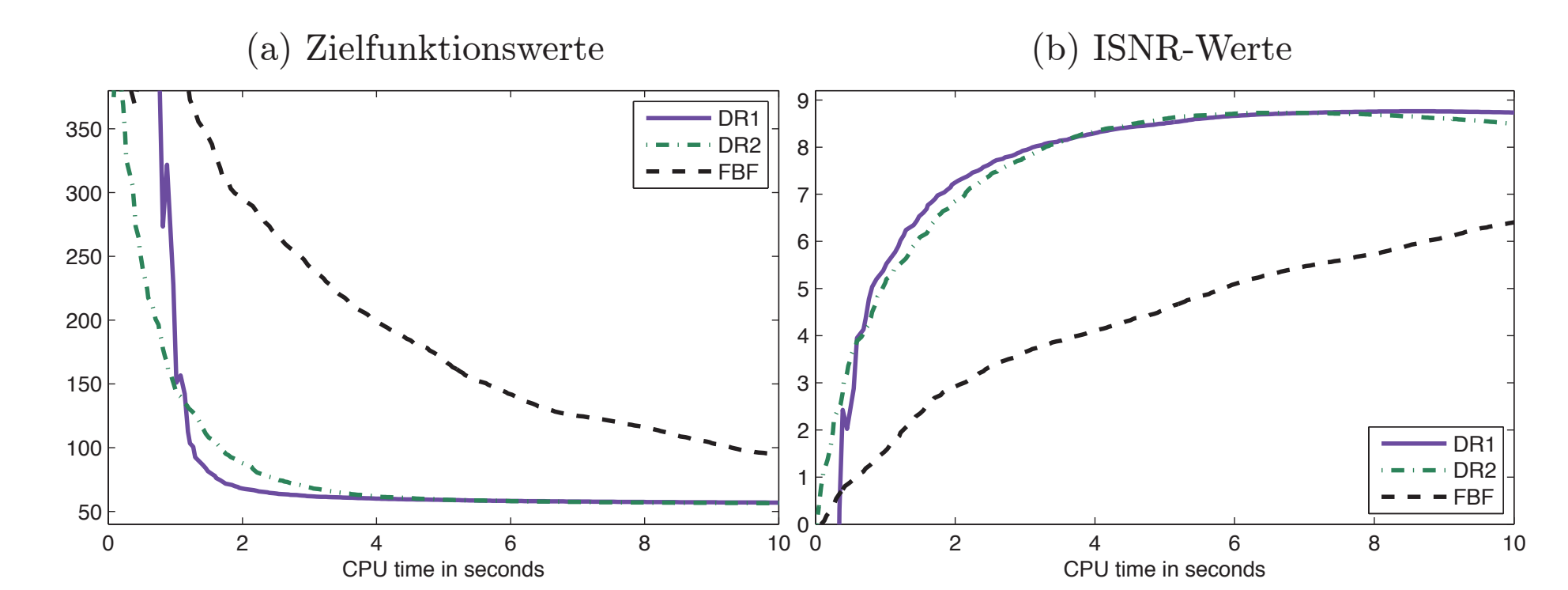


Abbildung 1. Die Entwicklung der Zielfunktions- und ISNR-Werte für drei primal-duale Algorithmen beim Lösen eines Problems zum Entrauschen und Schärfen von Bildern

Anwendungen

Neben den theoretischen Eigenschaften der primal-dualen Splitting-Verfahren — wie Konvergenzeigenschaften und -raten — war die Durchführung einer Performanceanalyse dieser Algorithmen basierend auf numerischen Experimenten bei verschiedenen Aufgaben der Bildverarbeitung von nicht weniger Interesse. Die dafür verwendeten Testbilder wurden zunächst in Matrizenform eingelesen, wobei jedem Pixel ein eindeutiger numerischer Wert zugeordnet wird, und später vektorisiert.

1. Entrauschen von Bildern. Mit dem Ziel einer möglichst genauen Rekonstruktion, wurde das 256×256 Pixel große Lichtenstein-Testbild mit einem Gaußschen Rauschen und entsprechender Standardabweichung versehen. Zu diesem Zweck wurde die quadratische Abweichung zum verrauschten Bild mittels diskreter anisotroper totaler Variation reguliert und das resultierende Minimierungsproblem mit verschiedenen Splitting-Verfahren gelöst. Die quadratische Abweichung wurde sowohl anhand ihres Gradienten als Vorwärtsschritt als auch anhand ihrer Proximal-Punkt-Abbildung als Rückwärtsschritt ausgewertet.

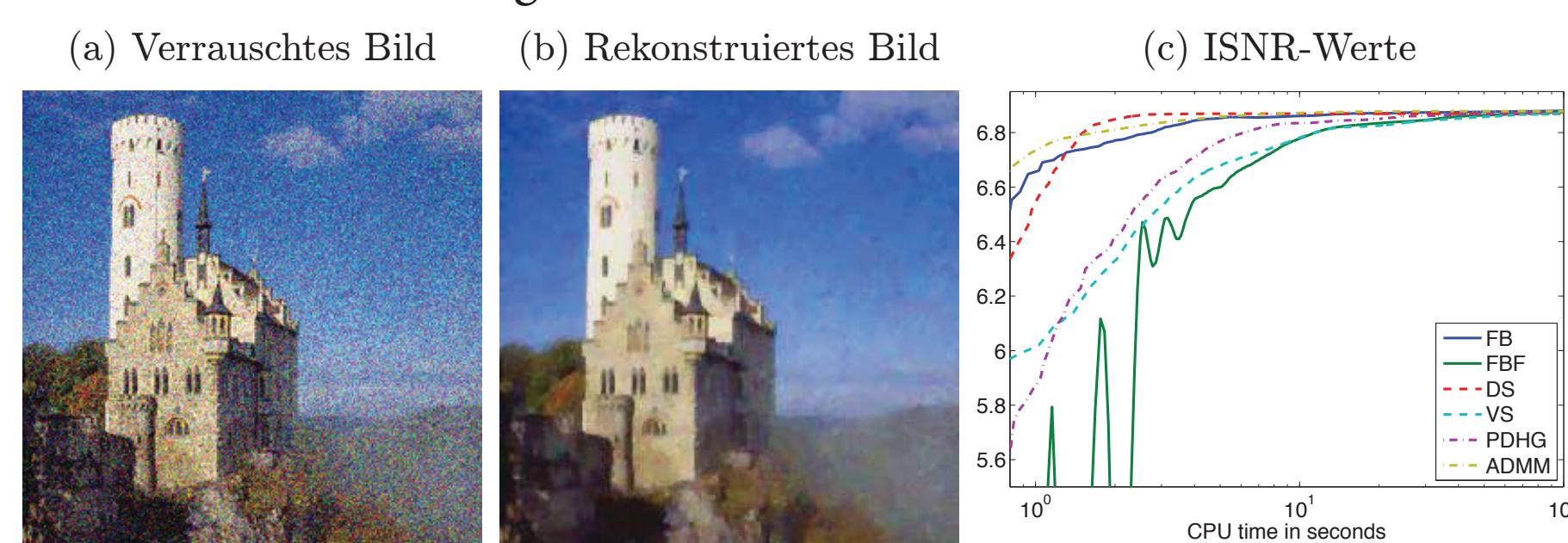


Abbildung 2. Die Rekonstruktion des mit additivem Gaußschen Rauschen mit Standardabweichung 0.12 gestörten 256×256 Lichtenstein-Testbildes

Der Vergleich der ISNR-Werte (Improvement in Signal to Noise Ratio), die einen Indikator für die Qualität der rekonstruierten Bilder in jeder Iteration darstellen und eng verbunden mit den Konvergenzeigenschaften der Folge der primalen Iterierten sind, bescheinigte den primal-dualen Verfahren eine hohe Leistungsfähigkeit, auch im Vergleich mit anderen Algorithmen.

2. Schärfen und Entrauschen von Bildern. Das durch einen linearen Faltungoperator und Gaußsches Rauschen weichgezeichnete und verrauschte 256×256 Cameraman-Testbild wurde in diesem Experiment betrachtet. Die Rekonstruktion des Originalbildes entsprach daher der Lösung eines schlecht gestellten linearen Gleichungssystems, dessen Matrix und rechte Seiten von dem Faltungoperator bzw. dem weichgezeichneten und verrauschten Bild gegeben wurden. Aufgrund dieser Eigenschaften wurde das mittels diskreter isotroper totaler Variation regulierte zugehörige l_1 -Norm-App-

roximationsproblem mit verschiedenen primal-dualen Splitting-Verfahren gelöst. Es hat sich herausgestellt, dass die Werte der Zielfunktion an der Folge der gemittelten Iterierten mit einer Geschwindigkeit von $O(1/n)$ konvergieren und dass sie aus dieser Sicht die Zielfunktionswerte der Folge der Iterierten übertreffen.

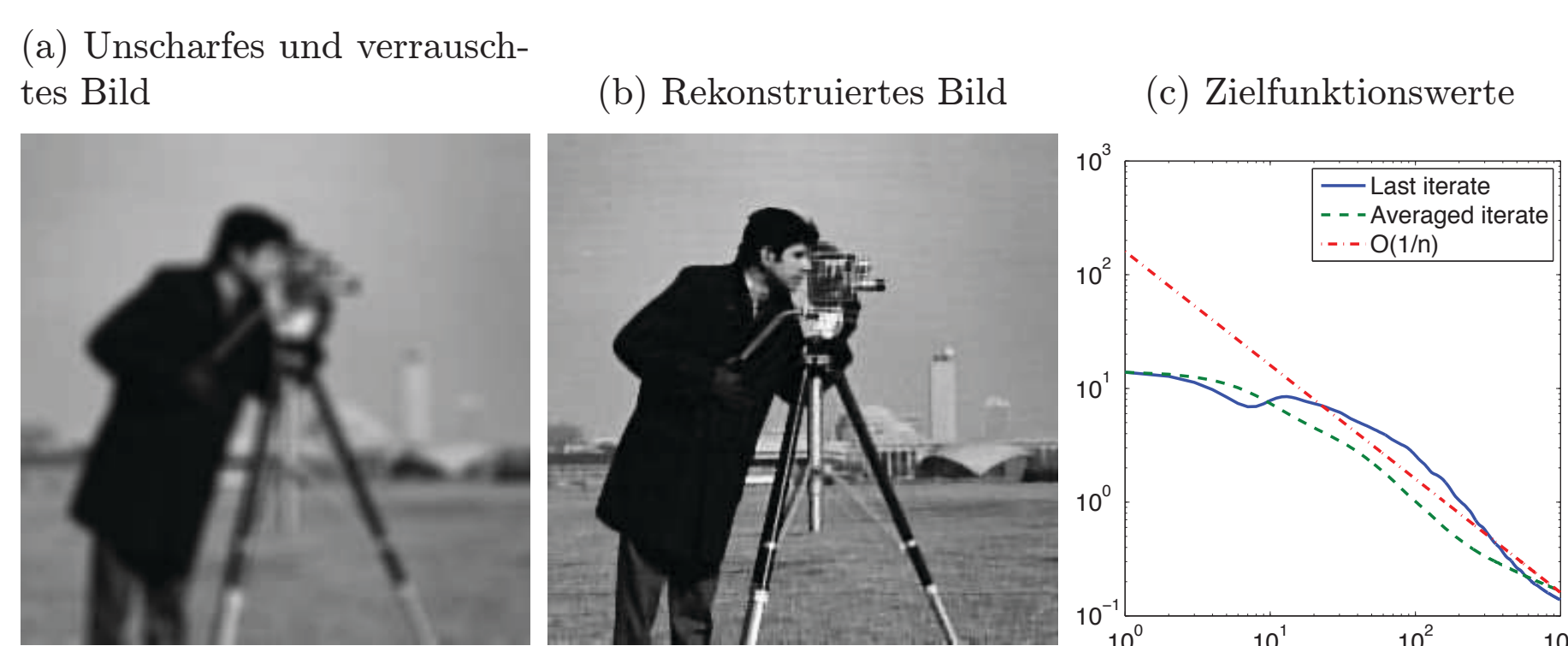


Abbildung 3. Die Rekonstruktion des weichgezeichneten und verrauschten 256×256 Cameraman-Testbildes

Diese Erkenntnisse haben die theoretischen Aussagen betreffend der Konvergenz der Zielfunktionswerten bestätigt.

3. Rekonstruktion fehlender Bildanteile. Für das Experiment im Zusammenhang mit der Rekonstruktion fehlender Bildpixel, das anhand des 240×256 Fruits-Testbildes durchgeführt wurde, wurden zufällig gewählte 80% der Bildpixel geschwärzt. Minimiert wurde die diskrete anisotrope totale Variation über der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zur Einhaltung der bekannten Pixelwerte samt Nebenbedingungen in Bezug auf den Wertebereich der gesuchten Pixel.

Die Umformulierung dieses Problems als unrestringierte Minimierungsaufgabe ermöglichte das Einsetzen von primal-dualen Splitting-Verfahren, welche wiederum qualitativ hochwertige Lösungen lieferten.

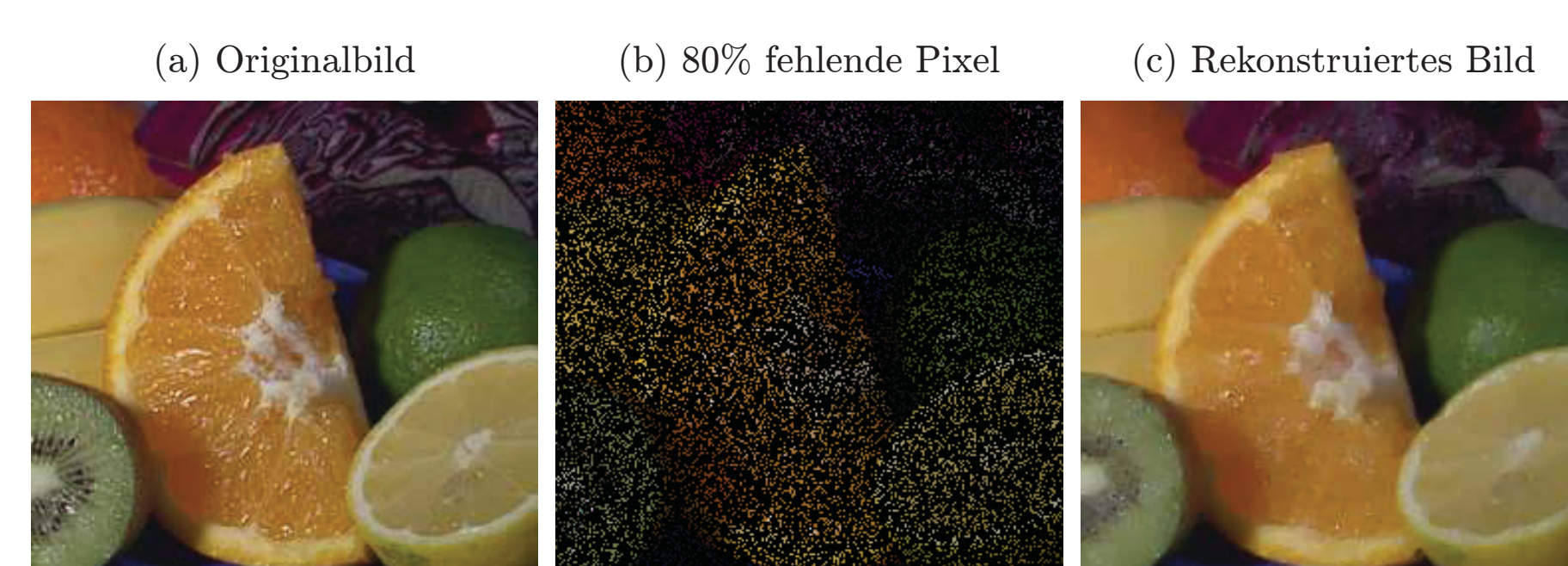


Abbildung 4. Die Wiederherstellung fehlender Bildpixel im 240×256 Fruits-Testbild

4. Maschinelle Klassifikation von Bildern. Bei der binären Klassifikationsaufgabe sollte anhand von gegebenen Trainingsdaten, die in unserem Fall Bilder von handgeschriebenen Ziffern 5 und 6 waren, eine Entscheidungsfunktion gefunden werden, die handgeschriebene Bilder aus einer der beiden Klassen richtig erkennen sollte.

Die Entscheidungsfunktion wurde als Linearkombination von bestimmten

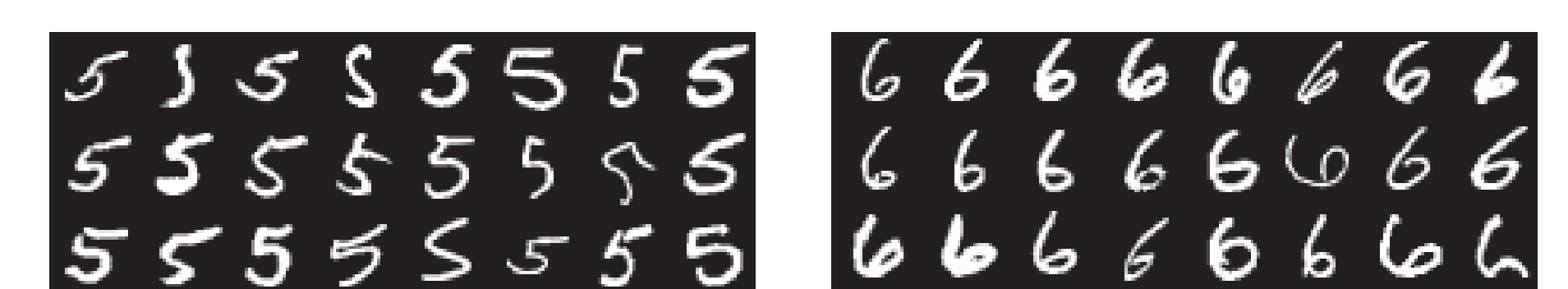


Abbildung 5. Ein Auszug aus den Testbildern für die maschinelle Klassifikation

Gaußschen Kernfunktionen so gesucht, dass ein konvexes Kostenfunktional, welches eine fehlerhafte Zuordnung der Bilddateien bestrafen soll, minimiert wurde. Betrachtet man die Tikhonov-Regularisierung dieses Problems in einem entsprechenden Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, so ist die Entscheidungsfunktion mithilfe der optimalen Lösung eines konvexen Minimierungsproblems darstellbar. In den Experimenten wurden sowohl verschiedene Kostenfunktionen, als auch Modellparameter betrachtet, um eine möglichst kleine Fehlklassifizierung zu erreichen.

λ	Kernparameter					
	0.125	0.25	0.5	0.75	1	2
0.1	1.0270	1.3514	1.3514	1.8919	2.1081	3.0270
1	1.0270	0.7027	0.7568	1.3514	1.4595	2.2162
10	1.0270	0.7568	0.9189	1.0811	1.1892	1.8378
100	1.0270	0.7568	0.8649	1.4054	1.2432	1.8378
1000	1.0270	0.7568	0.8649	1.4595	1.2432	1.8378

Tabelle 1. Fehlklassifizierungsrate in Prozent bei der Klassifizierung von handgeschriebenen Ziffern

Die Auswertung der Ergebnisse mittels Kreuzvalidierung hat gezeigt, dass die primal-dualen Verfahren sehr niedrige Fehlklassifizierungsraten bei der Klassifizierung von handgeschriebenen Ziffern liefern.

Mitarbeitende an der Fakultät:

Radu Ioan Boş, Ernő Robert Csetnek, Sebastian Banert

Durchführungszeitraum:

Sommersemester 2012 bis Wintersemester 2013/2014

Publikationen:

- R. I. Boş, E. R. Csetnek, A. Heinrich, C. Hendrich (2014) – On the convergence rate improvement of a primal-dual splitting algorithm for solving monotone inclusion problems, *Mathematical Programming*, DOI: 10.1007/s10107-014-0766-0.
- R. I. Boş, C. Hendrich (2014) – Convergence analysis for a primal-dual monotone + skew splitting algorithm with applications to total variation minimization, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 49(3), 551-568.
- R. I. Boş, C. Hendrich (2013) – A Douglas-Rachford type primal-dual method for solving inclusions with mixtures of composite and parallel-sum type monotone operators, *SIAM Journal on Optimization* 23(4), 2541-2565.
- R. I. Boş, E. R. Csetnek, A. Heinrich (2013) – A primal-dual splitting algorithm for finding zeros of sums of maximal monotone operators, *SIAM Journal on Optimization* 23(4), 2011-2036.

Externe Partner der Wissenschaft:

André Heinrich (TU Chemnitz), Christopher Hendrich (TU Chemnitz), Deutsche Forschungsgemeinschaft

Externe Partner der Wirtschaft:

Continental AG



TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

