Univ.-Prof. Dr. Radu Ioan Boţ, Axel Böhm

Konversatorium zu "Lineare Algebra und Analysis"

Analysis - Übungsbeispiele

SS2018

A1. Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ so, dass
$$f(s+t) \geq f(s) + f(t) \quad \forall s, t \geq 0$$
und dass ein $M \geq 0$ existiert mit
$$|f(t)| \leq Mt \quad \forall t \geq 0.$$
Zeigen Sie, dass
$$\alpha := \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}$$
existieren. Untersuchen Sie die Beziehung von f zu den Funktionen $t \mapsto \alpha t$ und $t \mapsto \beta t$.

A2. Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$. Zeigen Sie, dass ein $c \in [0, \pi]$ mit $f(c) = f(c + \pi)$ existiert.

A3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} = 0$ und $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} = \infty$.

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(f(x))}{\log(x)} = a$.

A4. Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b).

(a) Zeigen Sie, dass ein $c \in (a, b)$ existiert mit $f(a) - f(c) = f'(c)(c - b)$.

(b) Zeigen Sie, dass, falls $f(a) = f(b)$, dann existiert für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein $c \in (a, b)$ mit
$$f'(c) = r(2c - a - b)f(c).$$

A5. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass für jedes ausreichend kleines $h > 0$ ein $p \in I$ mit
$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(p)$$
existiert.

A6. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine differenzierbare Funktion so, dass f' stetig und $f'(x) > 0 \; \forall x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass ein $c \in (a, b)$ existiert mit
$$f(f(b)) - f(f(a)) = (f'(c))^2(b - a).$$

A7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion so, dass
$$f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass
$$f(x)f''(x) \leq (f'(x))^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A8. Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(i) $f'(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{Z}$;

(ii) falls $f'(x) = 0$, für $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $f(x) = 0$.

A9. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex (in I) ist, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1, \; \forall x_i \in I, \lambda_i \in [0,1], i = 1, ..., k, \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \text{ gilt } f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i).$$

Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ und $x_1, ..., x_k, \lambda_1, ..., \lambda_k > 0$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ gilt

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i.$$

A10. (Formel von Leibniz) Für $I \subseteq \mathbb{R}$, seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal Funktionen in I. Zeigen Sie, dass

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \forall x \in I.$$

A11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

(a) Berechnen Sie die Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle von f.

(b) Zeigen Sie, dass die n-te Ableitung geschrieben werden kann als

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}} \;\; \forall t \in R,$$

wobei P_n ein Polynom vom Grad n ist. Berechnen Sie den führenden Koeffizienten von P_n.

(c) Zeigen Sie, dass $P_n' = -n^2 P_{n-1}$.

A12. Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \\ x(1 - (\log(x))^2), & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Monotonieintervalle von f.

(b) Bestimmen Sie die Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle von f.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ die $(n+2)$-te Ableitung von f an der Stelle $x > 0$ durch

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{x^{n+1}} n! \left(\log(x) - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}\right)$$

gegeben ist.

(d) Sei $x > 0$. Zeigen Sie, dass genau zwei Lösungen $\alpha_1 < \alpha_2$ der Gleichung $f(x) = xf'(\alpha x)$ existieren. Berechnen Sie $\log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)$ und $\log(\alpha_1)\log(\alpha_2)$. Untersuchen Sie die Lage von α_1 und α_2 relativ zu 1.

A13. (a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2) dx.$$

A14. Sei $\mathcal{F} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ ist stetig und $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 1\}$ und

$$I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \qquad I(f) = \int_0^1 f(x)dx - f(0) + f(1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $I(f) < 3$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

(b) Berechnen Sie $\sup\{I(f) : f \in \mathcal{F}\}$.

A15. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann monoton wachsend ist, wenn

$$(c-b)\int_a^b f(x)dx \le (b-a)\int_b^c f(x)dx \quad \text{für alle } a < b < c.$$

A16. Sei $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion so, dass $f(b) \le 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x))^n dx = 0$.

A17. Gesucht wird eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) f ist beschränkt;

(b) f ist stetig in (a,b) und nicht stetig in a und in b;

(c) f besitzt eine Stammfunktion;

(d) $f(a) = f(b) = 0$.

A18. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion und F eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass für jedes $\xi \in (a,b)$ zwei Punkte $x_1, x_2 \in [a,b]$ existieren mit

$$F(x_1) - F(x_2) = f(\xi)(x_1 - x_2).$$

A19. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $e^n > \dfrac{(n+1)^n}{n!} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 1$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e \cdot n!) = 2\pi$.

A20. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$.

A21. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion so, dass $f(0) = f(1) = 0$ und $\inf_{x\in[0,1]} f(x) = -1$. Zeigen Sie, dass $\sup_{x\in[0,1]} f''(x) \ge 8$.

A22. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) Ist g monoton fallend und nichtnegativ auf $[a,b]$, so existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$.

(b) Ist g monoton auf $[a,b]$, so existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$.

A23. Sei $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und, für alle $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} die Stammfunktion von f_n, die im Ursprung den Wert 0 annimmt. Zeigen Sie, dass, falls $f_{2017}(1) = \frac{1}{2018!}$, dann existiert $x_0 \in [0,1]$ mit $f_0(x_0) = x_0$.

A24. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$M_k := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \ k = 0, 1, 2.$$

Zeigen Sie, dass $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

A25. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und, für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig auf jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert.

A26. Sei die Funktionenfolge $P_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$P_0(x) = 0 \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

Untersuchen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$.

A27. Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge konvexer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass, falls f stetig auf $[a, b]$ ist, dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen f.

A28. (a) Sei die Funktionenfolge $f_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty), n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, definiert durch:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & \text{falls } x \in [0, n] \\ 0, & \text{falls } x > n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \exp(-x)$, konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt,$$

und bestimmen Sie den Wert des Integrals.

A29. Se $f_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die Funktionenfolge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, definiert durch

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

A30. Für $x \in \mathbb{R}$, sei die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe absolut und gleichmäßig konvergent ist.

(b) Sei $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0.

A31. (a) Zeigen Sie, dass

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kx)}{k^2} \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(b) Sei $a \in [0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ existiert, sodass

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kx)}{k^2 + a^2} \ \forall x \in [-\pi, \pi]$$

und bestimmen Sie f.

Hinweis. Finden Sie f als Lösung einer Differentialgleichung.

A32. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x)}.$$

A33. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$, und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2}.$$

Zeigen Sie, dass g wohldefiniert ist und bestimmen Sie ihre Fourier-Reihe.

A34. Sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, und

$$\Gamma_p := \frac{1}{\pi^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}.$$

Zeigen Sie, dass Γ_p eine positive rationale Zahl ist.

A35. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische und auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion. Sei

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

die Folge der Partialsummen der Fourier-Reihe von f. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a)

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \left(f(x+u) + f(x-u)\right) du;$$

(b) es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \right| < C \log(n) \ \forall n \geq 2.$$

A36. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische und auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion und $x_0 \in [0, 2\pi]$, sodass beide einseitigen Grenzwerte von f an der Stelle x_0 existieren. Sei

$$s_0 := \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

und $a \in (0, \pi]$ so, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^a \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s_0|}{t} dt$$

konvergiert. Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe der Funktion f an der Stelle x_0 gegen s_0 konvergiert.

Hinweis. Zeigen Sie, dass für eine Riemann-integrierbare Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b h(x) \sin(tx) dx = 0.$$

A37. Seien X, Y normierte Vektorräume, $f : X \to Y$ und $L, \varepsilon > 0$ so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in X \text{ mit } \|x - y\| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in X.$$

A38. Sei $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ eine stetige und bijektive Funktion so, dass $\varphi(1) = 1$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, die Abbildung

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \|x\| = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(|x_i|) \right) \text{ für } x = (x_1, ..., x_n),$$

definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(ii) Es existiert $p \geq 1$, sodass $\varphi(x) = x^p$ für alle $x \in [0, +\infty)$.

A39. Seien X, Y Banach-Räume, $f : X \to Y$ und $M > 0$ so, dass

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M \ \forall x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass es eine eindeutige additive Abbildung $g : X \to Y$ ($g(x+y) = g(x) + g(y) \ \forall x, y \in X$) existiert, sodass

$$\|g(x) - f(x)\| \leq M \ \forall x \in X.$$

A40. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung so, dass

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \ \forall x, y \in X, x \neq y.$$

Sei $a \in X$ so, dass die Folge

$$x_1 := f(a), x_{n+1} := f(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N},$$

einen Häufungspunkt $\overline{x} \in X$ besitzt. Zeigen Sie, dass $\overline{x}$ der einzige Fixpunkt ($f(\overline{x}) = \overline{x}$) der Abblidung f ist.

A41. Sei X ein normierter Vektorraum und Y ein linearer Unterraum von X so, dass $\text{int}(Y) \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $X = Y$.

A42. Sei X ein normierter Vektorraum und $Y \neq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Zeigen Sie, dass für alle $r \in (0, 1)$ ein Element $x_r \in X$ existiert, sodass

$$\|x_r\| = 1 \text{ und } \|x - x_r\| > r \ \forall x \in Y.$$

A43. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $f(\cdot, y)$ stetig für alle $y \in \mathbb{R}$ ist und

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(x)|y_1 - y_2| \ \forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

wobei $L : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ eine lokal beschränkte Funktion ist (d.h. für alle $z \in \mathbb{R}$ es existiert eine Umgebung U von z so, dass $L|_U$ beschränkt ist). Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) (Young) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $f(x, \cdot)$ stetig für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und $f(\cdot, y)$ stetig und monoton wachsend für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

A44. (Rowe) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Darboux-Eigenschaft (Zwischenwerteigenschaft) so, dass $f^{-1}(y)$ eine abgeschlossene Menge für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

A45. Seien (X, d) und (Y, ρ) metrische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und

$$Z := \left\{ f : X \to Y : f \text{ ist stetig}, f(x_0) = y_0, \sup_{x \neq x_0} \frac{\rho(f(x), y_0)}{d(x, x_0)} < +\infty \right\}.$$

Sei

$$\sigma : Z \times Z \to \mathbb{R}, \quad \sigma(f, g) = \sup_{x \neq x_0} \frac{\rho(f(x), g(x))}{d(x, x_0)}.$$

Zeigen Sie, dass falls (Y, ρ) vollständig ist, dann ist auch (Z, σ) ein vollständiger metrischer Raum.

A46. Seien X ein Banach-Raum, Y ein normierter Vektorraum und $V : X \to Y$ eine lineare und stetige Abbildung. Seien $k > 0$ und $0 < q < 1$ mit der Eigenschaft

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \text{ mit } \|x\| \leq k\|y\| \text{ und } \|Vx - y\| \leq q\|y\|.$$

Zeigen Sie, dass V surjektiv ist.

A47. Seien X, Y zwei normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $a, b \geq 0$ existieren, sodass $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$ für alle $x \in X$ gilt. Ist eine stetige Funktion $f : X \to Y$ mit der Eingehschaft, dass $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$ für alle $x \in X$, unbedingt gleichmäßig stetig?

A48. Sei X ein normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ eine offene und konvexe Menge ($\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ für alle $x, y \in U$ und alle $\lambda \in [0, 1]$) und $f : U \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ($f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ für alle $x, y \in U$ und alle $\lambda \in [0, 1]$). Sei $x_0 \in U$ so, dass f auf einer Umgebung von x_0 nach oben beschränkt ist. Zeigen Sie, dass f lokal Lipschitz-stetig auf U ist, d.h.

$$\forall x_1 \in U \ \exists r > 0, L > 0, \text{ sodass } B_r(x_1) \subseteq U \text{ und } \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in B_r(x_1).$$

A49. (Dini) Sei X ein kompatker metrischer Raum und $f_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, eine monotone Folge stetiger Abbildungen ($(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für alle $x \in X$ entweder monoton fallend oder monoton wachsend), die punktweise gegen eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.

A50. Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass, falls Y kompakt ist, dann ist

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y),$$

eine stetige Abbildung.

A51. Sei (X, d) ein metrischer Raum und eine *folgenkompakte* Menge $Y \subseteq X$ (jede Folge in Y enthält eine Teilfolge, die gegen ein Element aus Y konvergiert).

(a) Zeigen Sie, dass Y *totalbeschränkt* ist, nämlich,

$$\forall r > 0 \text{ es existiert eine endliche Menge } Z \subseteq X, \text{ sodass } Y \subseteq \cup_{z\in Z} B_r(z).$$

(b) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y.

(i) Zeigen Sie, dass eine positive Zahl $r > 0$ existiert, sodass

$$\forall y \in Y \ \exists i \in I \text{ mit } B_r(y) \subseteq U_i.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung von Y enthält.

A52. Seien (X, d) und (Y, ρ) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass, falls f *eigentlich* (für jede kompakte Menge $K \subseteq Y$ ist auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt) ist, dann ist f *abgeschlossen* (für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist auch $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen).

(b) Sei $k > 0$ so, dass

$$\rho(f(x), f(y)) \geq kd(x, y) \ \forall x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass, falls X vollständig ist, dann ist f eine eigentliche Abbildung.

A53. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \ \forall x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ und dass f bijektiv ist.

A54. Sei V ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) V ist endlichdimensional.

(b) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von V ist kompakt.

(c) Die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

A55. Sei V ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) V ist *strikt konvex*, d.h. für $x, y \in V$ mit $x \neq y$ und $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt $\|x + y\| < 2$;

(b) für alle $x, y \in V$, mit $y \neq 0$ und $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, es existiert $t \in \mathbb{R}$, sodass $x = ty$.

A56. Seien V und W zwei reelle Vektorräume so, dass W strikt konvex ist, und $f : V \to W$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(0) = 0$ und

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \ \forall x, y \in V.$$

Zeigen Sie, dass f stetig und linear ist.

A57. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass $g(0) = 0$ und $g'(0) \neq 0$. Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} g(xy)\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Existenz der partiellen Ableitungen und die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle $(0, 0)$.

(b) Zeigen Sie, dass $D_x D_y f(0, 0) \neq D_y D_x f(0, 0)$.

A58. Sei $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = g(\|x\|)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig differenzierbar;

(b) g ist stetig differenzierbat und $g'(0) = 0$.

A59. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $(x_0, y_0) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ und $V \subseteq U$ eine offene Umgebung von (x_0, y_0) so, dass f stetig in (x_0, y_0) ist und partielle Ableitungen 1. Ordnung in $V \setminus \{(x_0, y_0)\}$ hat, mit der Eigenschaft, dass

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} D_x f(x, y) \in \mathbb{R} \text{ und } \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} D_y f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar in (x_0, y_0) ist.

A60. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion so, dass $M > 0$ existiert mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \ \forall x, y \in U.$$

Zeigen Sie, dass $\|Df(x)\| \leq M$ für alle $x \in U$.

A61. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & \text{falls } x \neq y, \\ f'(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F stetig differenzierbar ist.

A62. Sei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \|x\|^2 \sin \frac{1}{\|x\|}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar (auf $\mathbb{R}^n$) ist.

A63. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ so, dass

(i) f und g sind stetig auf $[a, b]$;

(ii) f und g sind differenzierbar auf (a, b);

(iii) $\|Df(x)\| \leq g'(x)\ \forall x \in (a, b)$.

Zeigen Sie, dass
$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $a, b \in U$ so, dass $[a, b] := \{ta + (1 - t)b : t \in [0, 1]\} \subseteq U$ und

(i) f ist stetig auf $[a, b]$;

(ii) f ist differenzierbar auf (a, b).

Zeigen Sie, dass
$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in (a, b)\}.$$

A64. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion (auf U). Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist konvex;

(ii) $f(y) - f(x) \geq Df(x)(y - x)\ \forall x, y \in U$;

(iii) $(Df(y) - Df(x))\,(y - x) \geq 0\ \forall x, y \in U$;

(iv) $D^2 f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in U$.

A65. Für $i = 1, 2$, seien $x_i > 0$ und $y_i, z_i \in \mathbb{R}$ mit $x_i y_i > z_i^2$. Zeigen Sie, dass
$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}.$$

A66. (a) Für $m, n \geq 1$, seien $\alpha_i > 0$ und $x_{ij} > 0, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Zeigen Sie, dass
$$\left(\sum_{j=1}^m x_{1j}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^m x_{nj}\right)^{\alpha_n} \geq \sum_{j=1}^m x_{1j}^{\alpha_1} \cdots x_{nj}^{\alpha_n}.$$

(b) Kommt Ihnen die obige Ungleichung für $n = 2$ bekannt vor?

(c) Für $n \geq 1$, seien $x_i, y_i \geq 0, i = 1, ..., n$. Zeigen Sie, dass
$$\left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

A67. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, +\infty)$ gilt
$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

A68. Seien $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ mit $b^2 - 4ac < 0$ und
$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3 = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass eine Zahl $r > 0$ existiert, sodass die Mengen
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < r\}$$

und M disjunkt sind.

A69. Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass $|f(x,y)| \leq 1$ für alle $(x,y) \in B$. Zeigen Sie, dass ein Punkt $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(B)$ existiert, sodass

$$(D_x f(x_0,y_0))^2 + (D_y f(x_0,y_0))^2 \leq 16.$$

A70. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^T d < 0$ beliebig gegeben. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) Die Schrittweite

$$t_{\min} := -\frac{\nabla f(x)^T d}{d^T Q d}$$

liefert den stärksten Abstieg von f entlang der Richtung d, d.h., es gilt

$$f(x + t_{\min} d) \leq f(x + td) \ \forall t \in \mathbb{R};$$

für $t \neq t_{\min}$ gilt dabei sogar die strikte Ungleichung.

(b) Es existiert eine von x und f unabhängige Konstante $\theta > 0$ mit

$$f(x + t_{\min} d) \leq f(x) - \theta \left(\frac{\nabla f(x)^T d}{\|d\|} \right)^2.$$

A71. Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge.

(a) Zeigen Sie, dass zu jedem $y \in \mathbb{R}^n$ ein eindeutig bestimmter Vektor $z \in X$ mit

$$\|y - z\| \leq \|y - x\| \ \forall x \in X$$

existiert. Der Vektor $z := \operatorname{Pr}_X(y)$ heißt Projektion von y auf X.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$z = \operatorname{Pr}_X(y) \Leftrightarrow \langle z - y | x - z \rangle \geq 0 \ \forall x \in X.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\langle x - y | \operatorname{Pr}_X(x) - \operatorname{Pr}_X(y) \rangle \geq \| \operatorname{Pr}_X(x) - \operatorname{Pr}_X(y)\|^2 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Folgern Sie daraus, dass $x \to \operatorname{Pr}_X(x)$ 1-Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

A72. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Die Menge

$$\begin{aligned} T_X(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : &\exists (d^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \ \exists (t^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,+\infty) \text{ mit } t_k \to 0, d^k \to d \ (k \to \infty) \\ &\text{und } x + t_k d^k \in X \ \forall k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

heißt Tangentialkegel von X in x.

(a) Zeigen Sie, dass $T_X(x)$ ein nichtleerer und abgeschlossener Kegel ($\mathbb{R}_+ \cdot T_X(x) \subseteq T_X(x)$) ist.

(b) Zeigen Sie, dass, falls X eine konvexe Menge ist, dann gilt $T_X(x) = \operatorname{cl}(\cup_{t>0} t(X - x))$. Folgern Sie daraus, dass in diesem Fall $T_X(x)$ konvex ist.

(c) Sei $x \in \operatorname{int}(X)$. Zeigen Sie, dass $T_X(x) = \mathbb{R}^n$.

(d) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x \in X$ ein lokales Minimum von f auf X. Zeigen Sie, dass

$$\langle \nabla f(x) | d \rangle \geq 0 \ \forall d \in T_X(x).$$