Univ.-Prof. Dr. Radu Ioan Boţ

Übungen zu "Analysis"

SS2018

1. Sei V eine Umgebung eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die differenzierbar in $V \setminus \{x_0\}$ und stetig im Punkt x_0 ist, so, dass der Grenzwert $l := \lim_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie, dass f differenzierbar in x_0 ist und dass $f'(x_0) = l$.

2. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\tan(x) = x$ in jedem Intervall $(n\pi, (n+1)\pi), n \geq 1$, mindestens eine Lösung besitzt, indem Sie den Satz von Rolle für
$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{\pi}{x}), & \text{falls } x \in (0,1], \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$
auf dem Intervall $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$, anwenden.

3. Bestimmen Sie für die Funktionen
$$\text{(a) } f(x) = x^5 \log(x) \qquad \text{(b) } f(x) = 2x + \cos(2x) \qquad \text{(c) } f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x}$$
die maximalen Definitionsbereiche und die lokalen Extrema.

4. Bestimmen Sie für die Funktionen
$$\text{(a) } f(x) = \frac{2-x}{2+x} \qquad \text{(b) } f(x) = x \log(-x) \qquad \text{(c) } f(x) = (x+2) \exp(-x)$$
die maximalen Definitionsbereiche und Monotonieintervalle.

5. Bestimmen Sie für die Funktionen
$$\text{(a) } f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad \text{(b) } f(x) = x + \sqrt[3]{x} \qquad \text{(c) } f(x) = \exp(x) - \frac{x^2}{2}$$
die maximalen Definitionsbereiche und Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle.

6. Berechnen Sie mit der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte
$$\text{(a) } \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3} \qquad \text{(b) } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\tan(x)} \qquad \text{(c) } \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

7. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \varphi, \psi \in \tau[a,b] \text{ so, dass } \varphi \leq f \leq \psi \text{ und } \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \varepsilon.$$
Leiten Sie daraus ab, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

8. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass λf Riemann-integrierbar ist und dass
$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

9. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für jede Folge von Unterteilungen des Intervalls $[a, b]$

$$\mathcal{Z}_n : a = x_0^n < x_1^n < ... < x_{k_n}^n = b, n \geq 1,$$

und jede Folge von Stützstellen

$$\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n], 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1,$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Xi_n) = 0, \text{ wobei } \Xi_n := \left((x_i^n)_{i=0}^{k_n}, (\xi_i^n)_{i=1}^{k_n}\right), n \geq 1,$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(\Xi_n, f) = s.$$

10. Sei $a > 1$. Berechnen Sie $\int_1^a \frac{1}{x} dx$ mittels Riemmanschen Summen.

    Hinweis. Verwenden Sie die Unterteilung $\mathcal{Z} : 1 < a^{\frac{1}{n}} < ... < a^{\frac{n-1}{n}} < a$ des Intervalls $[1, a]$.

11. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit den Eigenschaften:

    (i) f ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$;

    (ii) es existiert eine endliche Menge $A \subseteq [a, b]$, so dass

    $$g(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b] \setminus A.$$

    Zeigen Sie, dass g Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ ist und dass

    $$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

12. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ungleich der Nullfunktion auf (a, b). Zeigen Sie, dass $\int_a^b |f(x)|dx > 0$.

13. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass $f(I)$ kein Intervall ist. Zeigen Sie, dass f keine Stammfunktion (in I) besitzt. Leiten Sie daraus ab, dass die Funktion $\text{floor} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$, keine Stammfunktion besitzt.

    Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass die Ableitung jeder differenzierbaren Funktion die Zwischenwerteigenschaft (Darboux-Eigenschaft) hat. Leiten Sie daraus ab, dass jede Funktion, die eine Stammfunktion besitzt, die Zwischenwerteigenschaft (Darboux-Eigenschaft) haben muss.

14. Zeigen Sie, dass die Funktion

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

    keine Stammfunktion besitzt.

15. Zeigen Sie, dass die Funktion

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

    keine Stammfunktion besitzt.

16. Finden Sie die Stammfunktionen

    $$\text{(a)} \int x^2 e^x dx \qquad \text{(b)} \int \sqrt{x^2+1}dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x+1}{x^4+x^2+1}dx.$$

17. Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \int_1^e x^3(\log(x))^2 dx \qquad \text{(b)} \int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^\pi} \cos(\log(x))dx \qquad \text{(c)} \int_1^2 \frac{1}{x^3+x^5}dx.$$

18. Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx \qquad \text{(b)} \int_1^2 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx \qquad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$$

19. (a) Geben Sie eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die Riemann-integrierbar ist und keine Stammfunktion besitzt.

    (b) Geben Sie eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die eine Stammfunktion besitzt und nicht Riemann-integrierbar ist.

20. (a) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion so, dass für jedes offene Intervall $(x', x'') \subset [0, 1]$ mindestens ein Punkt $\xi \in (x', x'')$ mit $f(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi}$ existiert. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 f(x)dx = \log(2).$$

    (b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion so, dass für jedes offene Intervall $(x', x'') \subset [0, 1]$ zwei Punkte $\xi', \xi'' \in (x', x'')$ mit $f(\xi') = \xi'$ und $f(\xi'') = 2\xi''$ existieren. Zeigen Sie, dass f nicht Riemann-integrierbar ist.

21. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ für:

$$\text{(a) } a_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad \text{(b) } a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{4n^2-k^2}} \qquad \text{(c) } a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)^2+(2n)^2}}.$$

Hinweis. Verwenden Sie Riemannsche Summen.

22. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wie sieht die Taylor-Reihe von p mit Entwicklungspunkt x_0 aus? Was erhalten wir speziell für $x_0 = 0$?

23. (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion $x \mapsto \tan(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

    (b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der Funktionen $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto \cos(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass diese Reihen für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren und bestimmen Sie die jeweiligen Grenzwerte.

24. Sei $m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $2m$-ter Ordnung der Funktion $x \mapsto \arctan(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweis. Zeigen Sie, dass für $y(x) = \arctan(x)$ gilt

$$(1+x^2)y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

25. (a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar ($n \geq 1$) und für $x_0 \in (a, b)$ gelte:

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

    Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

    (i) Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

    (ii) Ist n gerade, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Extremum. Dieses ist ein lokales Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist, und ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(b) Für $c \geq 0$, sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = x^4 - 4cx^3$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion p, indem Sie die Kriterien von (a) anwenden.

26. (Restglied nach Schlömlich-Roche) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion in I so, dass $f^{(n+1)}(x)$ für jedes $x \in I \setminus \{x_0\}$ existiert. Zeigen Sie, dass für jedes $p > 0$ und jedes $x \in I \setminus \{x_0\}$ ein ξ zwischen x_0 und x existiert, sodass

$$f(x) - T_n[f, x_0](x) = \frac{1}{n!p} \left(\frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p (x - \xi)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \ \forall n \geq 0.$$

27. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x}} dx \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

28. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \qquad \text{(b)} \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

29. Mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums für Reihen:

(i) untersuchen Sie die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ auf Konvergenz.

(ii) bestimmen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ die unendliche Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k))^s}$ konvergiert.

30. Sei $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ und $g : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ so, dass für alle $R > a$ die Funktionen $f|_{[a,R]}$ und $g|_{[a,R]}$ Riemann-integrierbar sind und

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \in [0, +\infty].$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(i) Ist $K < +\infty$ und $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ konvergent, so ist auch $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergent.

(ii) Ist $K > 0$ und $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ divergent, so ist auch $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergent.

31. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} dx \qquad \text{(d)} \int_2^{+\infty} \frac{\log(x)}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

32. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$.

(i) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise?

(ii) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig?

33. Sei die Funktionen folge $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, definiert durch

$$f_1(x) = x, \quad f_{n+1}(x) = \sin\left(f_n(x)\right).$$

Untersuchen Sie die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \geq 1}$.

34. Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge monoton wachsender (oder monoton fallender) Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.

35. Untersuchen Sie die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$, für $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$\text{(a) } f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{1 + n^2 x^2} \qquad \text{(b) } f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{(1 + x^2)^n}.$$

36. Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe um $x_0 \in \mathbb{C}$ so, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ existiert. Zeigen Sie, dass, falls der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ existiert, dann ist er gleich dem Konvergenzradius der Pontenzreihe.

37. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius R für die Potenzreihen:

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} \qquad \text{(b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \log(n+1)} \qquad \text{(c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n+1}.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihen in den reellen Randpunkten (a) $2 \pm R$, (b) $\pm R$ und, beziehungsweise, (c) $\pm R$.

38. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius R für die Potenzreihen:

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad \text{(b) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n \qquad \text{(c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Finden Sie jeweils die Summenfunktionen für relle $x \in (-R, R)$ und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den reellen Randpunkten $\pm R$.

39. Bestimmen Sie die Taylorreihe für die Funktionen

$$\text{(a) } \arcsin : (-1,1) \to \mathbb{R} \qquad \text{(b) } f : (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

40. Sei

$$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, & \text{falls } 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch direkte Abschätzungen, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$, für $0 < \delta < \pi$, gleichmäßig gegen f konvergiert.

41. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\text{abs} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \quad \text{abs}(x) = |x|.$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion f. Was besagt die Parseval-Gleichung für f?

42. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$[0, 2\pi) \mapsto \mathbb{C}, \quad x \mapsto \exp(iax).$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion f. Was besagt die Parseval-Gleichung für f?

43. Sei $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig auf } [a,b]\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{C}, \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

ein unitäres Skalarprodukt auf $\mathcal{C}[a,b]$ definiert wird.

44. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktion, die auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe der Funktion f für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$ absolut konvergiert.

45. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei 2π-periodische und auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktionen,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die Fourier-Reihe der Funktion f und

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx))$$

die Fourier-Reihe der Funktion g. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k + b_k d_k)\,.$$

46. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

   (a) Zeigen Sie, dass durch
   $$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\|,$$
   eine Metrik auf V definiert wird.

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt
   $$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

47. (*Metrik des französischen Eisenbahnsystems*) Bezeichne P (für Paris) einen beliebigen Punkt im $\mathbb{R}^2$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Wir definieren $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \text{falls } x - P, y - P \text{ linear abhängig,} \\ \|x - P\| + \|y - P\|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Veranschaulichen Sie typische Fälle für die Lage von x und y in einer Skizze.

   (b) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

   (c) Skizzieren Sie jeweils die Menge aller Punkte, die von $Q := P + (4, 0)$ beziehungsweise $R := P + (1, 0)$ Distanz 2 bezüglich d haben.

48. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit den Normen $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

   (a) Skizzieren Sie jeweils für $p = 1, 2, \infty$ die Menge $\overline{B}_1^p(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\overline{B}_1^1(0) \subseteq \overline{B}_1^2(0) \subseteq \overline{B}_1^\infty(0)$.

   (c) Bestimmen Sie

   $$\text{(i)} \ \max\{\lambda \geq 0 : \lambda \overline{B}_1^\infty(0) \subseteq \overline{B}_1^2(0)\} \qquad \text{(ii)} \ \max\{\lambda \geq 0 : \lambda \overline{B}_1^\infty(0) \subseteq \overline{B}_1^1(0)\}$$
   $$\text{(iii)} \ \max\{\lambda \geq 0 : \lambda \overline{B}_1^2(0) \subseteq \overline{B}_1^1(0)\}.$$

   Hinweis. Für $C \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lambda C := \{\lambda c : c \in C\}$.

49. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

   (i) $X \setminus \mathrm{int}(Y) = \overline{X \setminus Y}$;

   (ii) $X \setminus \overline{Y} = \mathrm{int}(X \setminus Y)$;

   (iii) Y ist genau dann offen, wenn $Y = \mathrm{int}(Y)$;

(iv) Y ist genau dann abgeschlossen, wenn $Y = \overline{Y}$;

(v) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(Y)) = \mathrm{int}(Y), \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$;

(vi) $X = \mathrm{int}(Y) \cup \partial Y \cup \mathrm{int}(X \setminus Y)$;

(vii) $\partial \overline{Y} \subseteq \partial Y$;

(viii) $\partial\, \mathrm{int}(Y) \subseteq \partial Y$;

(ix) Y ist genau dann offen, wenn $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y$;

(x) Y ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial Y = Y \setminus \mathrm{int}(Y)$.

50. Sei $\mathbb{R}$ mit dem euklidischen Abstand als Metrik versehen. Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:

$$A = [a, b) \qquad B = \{a\} \qquad C = \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right) \qquad D = [a, +\infty).$$

Bestimmen Sie für jede dieser Mengen jeweils den Rand, das Innere und den Abschluss.

51. Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem euklidischen Abstand als Metrik versehen. Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:

$$E = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \qquad F \text{ ist eine endliche Teilmenge} \qquad G = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| < 2\}$$

$$H = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0, x_2 = \frac{1}{x_1} \right\}.$$

Bestimmen Sie für jede dieser Mengen jeweils den Rand, das Innere und den Abschluss.

52. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $x, y \in V$ so, dass

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|\lambda x + \mu y\| = \lambda\|x\| + \mu\|y\| \ \forall \lambda, \mu \geq 0.$$

53. (a) Zeigen Sie, dass Grenzwerte konvergenter Folgen in metrischen Räumen eindeutig sind.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^2$ für $n \to +\infty$, falls er existiert, für:

(i) $x_n = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}\right) \ \forall n \geq 1$;

(ii) $x_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{\log(n)}{n}\right) \ \forall n \geq 1$;

(iii) $x_n = \left(\left(-\frac{n+1}{n}\right)^n, (-1)^{n+1}\right) \ \forall n \geq 1$;

(iv) $x_n = \left(\frac{2^n}{3^n+1}, \sqrt[n]{n}\right) \ \forall n \geq 1$.

54. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\text{(i) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad \text{(ii) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ un $b \in \mathbb{R}$ die Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y \mapsto f(a,y)$, und $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x,b)$, stetig sind.

(b) Ist f stetig in $(0,0)$?

55. Sei $E = \{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : L \text{ ist linear}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|L\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|Lx\|_2 : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq 1\}$ eine Norm auf E definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass $\|L\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Lx\|_2 : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$.

(c) Bestimmen Sie die Operatornorm der linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

56. Zeigen Sie, dass genau ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $ae^{e^{-a}} = 1$.

    Hinweis. Verwenden Sie den Fixpunktsatz von Banach.

57. Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\|A\|_{\text{op}} < 1$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung
$$x = b + Ax$$
gibt. Es gilt also $x = (I - A)^{-1}b$, wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Welche Näherungsformel für $(I - A)^{-1}$ ergibt das iterative Verfahren aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Banach für den Startwert $x_0 := b$?

58. Der komplexe Vektorraum $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig}\}$ sei mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ versehen. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung
$$L : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{C}, \quad L(f) = \int_a^b f(x)dx,$$
stetig ist und berechnen Sie ihre Operatornorm $\|L\|_{\text{op}}$.

59. Sei X eine nichtleere Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf X. Die Metriken d_1 und d_2 heißen:

    (a) topologisch äquivalent, falls für alle $x \in X$ gilt
$$U \text{ ist eine Umgebung von } x \text{ bezüglich der Metrik } d_1 \Leftrightarrow$$
$$U \text{ ist eine Umgebung von } x \text{ bezüglich der Metrik } d_2.$$

    (b) Lipschitz äquivalent, falls
$$\exists C_1, C_2 > 0, \text{ sodass } C_1 d(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y) \ \forall x, y \in X.$$

    Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

    (a) falls d_1, d_2 Lipschitz äquivalent sind, dann sind sie auch topologisch äquivalent;

    (b) d_1 und d_2 sind topologisch äquivalent genau dann, wenn
$$\forall (x_n)_{n\in N} \subseteq X \ \forall x \in X : x_n \xrightarrow{d_1} x \ (n \to \infty) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x \ (n \to \infty).$$

60. Sei (X, d) ein metrischer Raum und
$$d_1 : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

    (a) d_1 ist eine Metrik auf X;

    (b) d_1 ist topologisch äquivalent zu d;

    (c) $\text{diam}_{d_1}(X) = \sup\{d_1(x, y) : x, y \in X\} \leq 1$.

61. (Cantor) Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum (X, d) genau dann vollständig ist, wenn für jede absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X
$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq ...$$
mit der Eigenschaft, dass $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(A_n) = 0$, gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

62. Sei (X,d) ein metrischer Raum, $Y \subseteq X$ und die Distanzfunktion der Menge Y

$$d(\cdot, Y) : X \to [0, +\infty], \quad d(x, Y) = \inf\{d(x,y) : y \in Y\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) Die Distanzfunktion ist 1-Lipschitz-stetig, nämlich,

$$|d(x,Y) - d(z,Y)| \leq d(x,z) \ \forall x, z \in X.$$

(b) $d(x,Y) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{Y}$.

63. Welche der Teilmengen aus Aufgaben 50-51 sind kompakt? Welche haben einen kompakten Abschluss und welche einen kompakten Rand?

64. (a) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Menge und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge so, dass $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert, sodass

$$d(x,y) \geq c \ \forall x \in A \ \forall y \in K.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik) an, das belegt, dass die Aussage in (a) falsch wird, wenn K nur als abgeschlossen vorausgesetzt wird.

65. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei abgeschlossene Mengen und $C = A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $A + B$ ist nicht unbedingt abgeschlossen;
(b) falls A kompakt ist, dann ist $A + B$ abgeschlossen;
(c) falls $A, B \subseteq [0, +\infty)$, dann ist $A + B$ abgeschlossen;
(d) falls A, B kompakt sind, dann ist $A + B$ kompakt.

66. Seien X und Y zwei kompakte metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige und bijektive Funktion. Zeigen Sie, dass f ein Homöomprhismus ist.

67. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + ye^{2z} + \log(x^2 + y^2).$$

Sind diese stetig?

68. Es sei $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Ist r in $(0,0)$ partiell differenzierbar?
(b) An welchen Stellen ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x \cdot r(x,y)$, partiell differenzierbar? Wie lauten die partiellen Ableitungen?

69. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f zweimal partiell differenzierbar? Gilt die Relation $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ (auf ganz $\mathbb{R}^2$)?

70. Sei $U := \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $u : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x,y,t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$.

(a) Es bezeichne $\nabla_{(x,y)} u$ die Abbildung $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) : U \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für alle $(x,y,t) \in U$ gilt

$$\nabla_{(x,y)} u(x,y,t) = -\frac{u(x,y,t)}{2t} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $\Delta_{(x,y)}u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Zeigen Sie, dass u in U die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{(x,y)}u$$

erfüllt.

71. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \log\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $D_x D_y f$ und $D_y D_x f$ nicht stetig an der Stelle $(0,0)$ sind und dass trotzdem $D_x D_y f(0,0) = D_y D_x f(0,0)$ gilt.

72. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{y}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

für alle $a > 1$ auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

73. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar in $(0,0)$ ist und dass $D_x f$ und $D_y f$ nich stetig in $(0,0)$ sind.

74. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass an der Stelle $(0,0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren, die Funktion dort aber nicht differenzierbar ist.

75. (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 2x^2 + 6xy + 3y^2,$$

im Punkt $(3,2)$ in Richtung zum Punkt $(2,3)$.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}, g(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

in einem Punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ in Richtung zum Ursprung.

76. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin(x) + \exp(x^2 y) + y^3,$$

im Punkt $(0, 2, f(0,2))$. Gibt es Punkte (x_0, y_0), in denen die Tangentialebene an den Graphen von f horizontal ist?

77. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x \in U$ mit $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$ und $c := f(x)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{grad} f(x)$ im folgenden Sinne normal auf die Niveaumenge $N_f(c) := \{y \in U : f(y) = c\}$ steht: ist $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\gamma(I) \subseteq N_f(c)$ und $\gamma(0) = x$, so folgt (mit der Notation $\dot\gamma(t) = D\gamma(t)$)

$$\langle \mathrm{grad} f(x) | \dot\gamma(0) \rangle = 0.$$

78. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $(x_0, y_0) \in U$ und eine auf U partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass, falls eine der partiellen Ableitungen von f in (x_0, y_0) stetig ist, dann ist f differenzierbar in (x_0, y_0).

79. (Euler) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge so, dass für alle $x \in U$ und alle $t > 0$ gilt $tx \in U$, und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann eine homogene Funktion vom Grad $p \in \mathbb{R}$ ist, nämlich,
$$f(tx) = t^p f(x) \; \forall t > 0 \; \forall x \in U,$$
wenn
$$\sum_{i=1}^{n} x_i D_i f(x) = p f(x) \; \forall x \in U.$$

80. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a, b \in U$ so, dass $[a, b] := \{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\} \subseteq U$.

    (a) Zeigen Sie, dass ein Element $\xi \in (a, b) = \{ta + (1 - t)b : t \in (0, 1)\}$ existiert, sodass
    $$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a).$$

    (b) Zeigen Sie, dass, falls $Df(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$, dann ist f entlang der Strecke $[a, b]$. konstant.

    (c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass für vektorwertige differenzierbare Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}^m$ die (a) entsprechende Aussage im Allgemeinen falsch ist.

81. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(t) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2} dx$.

    (a) Berechnen Sie die Ableitung von h und $h(0)$.

    (b) Sei weiters $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(t) = \left(\int_0^t e^{-u^2} du\right)^2$. Zeigen Sie, dass $G + h$ konstant ist und bestimmen Sie diese Konstante. Beweisen Sie durch Grenzübergang $t \to +\infty$ die Gleichung
    $$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

82. Wie lautet die Taylor-Approximation zweiter Ordnung für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x) + e^{x^2 y} + y^3$, an der Stelle $(0, 2)$?

83. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $z_0 \in U$ mit $\operatorname{grad} f(z_0) \neq 0$. Weiters seien die Abbildungen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(y) = Df(z_0; y) = \langle \operatorname{grad} f(z_0) | y \rangle$, sowie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, h(t) := (\cos(t), \sin(t))^T$. Finden Sie die Maximal- und Minimalwerte der Funktion $g \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

84. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

    (a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{grad} f(0, 0) = 0$, aber f in $(0, 0)$ kein lokales Extremum hat.

    (b) Zeigen Sie, dass $(0, 0)$ ein lokales Minimum von f entlang jeder Geraden durch den Ursprung ist.

85. Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle Ax|x \rangle + \langle b|x \rangle + c$. Finden Sie jeweils hinreichende Bedingungen an A, b und c, damit folgendes gilt:

    (a) f hat genau ein striktes lokales Maximum;

    (b) f hat keine kritischen Stellen;

    (c) f hat unendlich viele kritische Stellen und all diese sind nicht lokale Minima.

86. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, wobei:

    (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ (c) $f(x, y) = x^3 - 4y^3 + 3x^2 - y^4$.

87. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion so, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f keine lokale Maxima besitzt.

88. Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 y$, jeweils lokale und globale Maxima und Minima auf

    (a) der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$;

    (b) dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$;

    (c) der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$.

89. Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Punkte auf dem Schnitt des Ellipsoides $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 0$ mit minimalem bzw. maximalem Abstand zum Ursprung.

90. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = \|Az\|^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$.