Univ.-Prof. Dr. Radu Ioan Boţ

Übungen zu "Funktionalanalysis"
SS2020

1. Es seien $p, q > 1$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (a) (Young-Ungleichung) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \geq 0$ gilt
   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

   (b) (Hölder-Ungleichung) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_k, b_k \in \mathbb{K}, k = 1, ..., n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt
   $$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. (Minkowski-Ungleichung) Sei $p \geq 1$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_k, b_k \in \mathbb{K}, k = 1, ..., n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt
$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Sei T eine nichtleere Menge, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
$$\ell^\infty(T) := \{x : T \to \mathbb{K} \mid x \text{ ist eine beschränkte Funktion}\}$$
und, für $x \in \ell^\infty(T)$,
$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$
Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\ell^\infty(T)$ ist.

4. Für $n \in \mathbb{N}$, sei
$$x_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$
Zeigen Sie, dass

   (a) die Glieder der Funktionenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[-1, 1]$ stetig differenzierbar sind;

   (b) die Funktionenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie ihre Grenzfunktion.

5. Sei X der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$. Für $x \in X$, sei
$$\|x\|_{\text{Lip}} := |x(0)| + \sup_{s,t \in [0,1], s \neq t} \left| \frac{x(s) - x(t)}{s - t} \right|.$$
Zeigen Sie, dass

   (a) $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ eine Norm ist, und es gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\text{Lip}}$ für alle $x \in X$;

   (b) $(X, \|\cdot\|_{\text{Lip}})$ ein Banach-Raum ist.

6. Seien X und Y normierte Räume, $1 \le p \le \infty$ und für alle $(x,y) \in X \oplus Y$

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty; \\ \max\{\|x\|, \|y\|\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf der direkten Summe $X \oplus Y$ definiert (die so normierte direkte Summe wird mit $X \oplus_p Y$ bezeichnet);

(b) für alle $1 \le p \le \infty$ gilt $(x_n, y_n) \to (x,y)$ $(n \to +\infty)$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ genau dann wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ $(n \to +\infty)$;

(c) falls X und Y vollständig sind, dann ist auch $X \oplus_p Y$ vollständig.

7. Sei $C[0,1]$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{K}$. Für $f \in C[0,1]$ definieren wir

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Zeigen Sie, dass $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ein nicht vollständiger normierter Raum ist.

Hinweis. Für $n \ge 2$, sei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), & \text{falls } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \le \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \ge 2}$ eine nicht konvergente Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist.

8. Für $n \in \mathbb{N}$, sei

$$\mathcal{P}_n[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad } \le n\}.$$

Weiterhin sei $\mathcal{P}[a,b] := \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n[a,b]$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ein nicht vollständiger normierter Raum ist.

9. Für $x = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, sei

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^n t_k \right|.$$

Zeigen Sie, dass $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. Ist $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum?

10. (a) Zeigen Sie, dass für $1 \le p \le q < \infty$ gilt $\ell^p \subseteq \ell^q$ indem Sie zeigen, dass

$$\|x\|_q \le \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{1 \le p < \infty} \ell^p \subseteq c_0$$

und ermitteln Sie, ob diese Inklusion echt ist.

11. Sei $x \in \ell^q$, für $q \ge 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

12. Für $x = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, sei

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|t_n|}{2^n}.$$

Zeigen Sie, dass $(c_0, \|\cdot\|)$ ein nicht vollständiger normierter Raum ist.

13. Sei $X = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = 0\}$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum und $M = \{x \in X \mid \int_0^1 x(t)dt = 0\}$ ein echter abgeschlossener linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{dist}(x, M) = \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \quad \forall x \in X$$

und dass für kein $x \in X \backslash M$ das Infimum in der Definition der Distanz-Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, M)$ angenommen wird.

14. (Allgemeine Integralversion der Hölder-Ungleichung) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und

$$q = \begin{cases} \infty, & \text{falls } p = 1; \\ \frac{p}{p-1}, & \text{falls } 1 < p < \infty; \\ 1, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

(Ω, Σ, μ) sein ein Maßraum, und es seien $f \in L^p(\mu)$ und $g \in L^q(\mu)$. Zeigen Sie, dass $fg \in L^1(\mu)$ und

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

15. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

    (a) Zeigen Sie, dass für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt $L^q[a,b] \subseteq L^p[a,b]$ indem Sie zeigen, dass

    $$\frac{\|f\|_p}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{\|f\|_q}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall f \in L^q[a,b].$$

    (b) Sei $f \in L^\infty[a,b]$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

16. Für $x \in C^1[0,1]$, seien

$$|||x|||_1 := |x(0)| + \|x'\|_\infty$$
$$|||x|||_2 := \max\left\{\left|\int_0^1 x(t)dt\right|, \|x'\|_\infty\right\}$$
$$|||x|||_3 := \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt + \int_0^1 |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

    (a) Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||_i$ $(i = 1,2,3)$ jeweils eine Norm auf $C^1[0,1]$ ist.

    (b) Welche $|||\cdot|||_i$ $(i = 1,2,3)$ ist äquivalent zu der Norm $|||\cdot|||$, definiert durch $|||x||| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$?

17. Zeigen Sie, dass:

    (a) jede Teilmenge eines separablen metrischen Raumes ein separabler metrischer Raum ist;

    (b) c_{00}, c_0 und c separabel sind;

    (c) $L^\infty([0,1])$ nicht separabel ist.

18. Seien X und Y zwei normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator.

    (a) Zeigen Sie, dass, falls X und Y nichttrivial sind und T stetig ist, dann gilt

    $$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| < 1\} = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}.$$

    (b) Zeigen Sie, dass, falls für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ beschränkt ist, dann ist T stetig.

19. (a) Sei $z \in \ell^\infty$ und, für $1 \leq p \leq \infty$, $T_z : \ell^p \to \ell^p, (T_z x)(k) = z(k)x(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\|T_z\|$.

(b) Seien $0 \le t_1 < ... < t_n \le 1$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$. Weiterhin sei $T : C[0,1] \to \mathbb{K}, T(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x(t_i)$. Berechnen Sie $\|T\|$.

20. Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ setze $\|p\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

    (a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. Ist er vollständig?

    (b) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Operatoren $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ stetig sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$:

$$T(p) = \int_0^1 p(t)dt, \quad T(p) = p'(0), \quad T(p) = p'(1).$$

    (c) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Operatoren $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ stetig sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$:

$$(Tp)(t) = p(t+1), \quad (Tp)(t) = \int_0^t p(s)ds.$$

21. $\mathbb{K}^n$ sei ausgestattet mit der Supremumnorm $\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|$ für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, und $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei ein linearer Operator. Bestimmen Sie $\|T\|$.

22. (a) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ seien zwei äquivalente Normen auf dem Vektorraum X. Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ isomorph sind.

    (b) Auf c_{00} seien die Normen

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |t_k| \quad \text{und} \quad \|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |kt_k| \quad \forall x := (t_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

    Zeigen Sie, dass $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \cong (c_{00}, \|\cdot\|)$; jedoch sind die beiden Normen nicht äquivalent.

23. Lösen Sie die Integralgleichung

$$x(s) - \int_0^1 2stx(t)dt = \sin(\pi s), \quad s \in [0,1],$$

indem Sie die Methode der Neumannschen Reihe verwenden. Für $T : C[0,1] \to C[0,1], (Tx)(s) = \int_0^1 2stx(t)dt$, zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ konvergiert (trotz $\|T\| = 1$) und berechnen Sie $(\mathrm{Id} - T)^{-1}$.

24. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und der Shift-Operator

$$T(t_1, t_2, t_3, ...) = (0, \varepsilon t_1, \varepsilon t_2, \varepsilon t_3, ...) \quad \forall (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Zeigen Sie, dass

    (a) falls $T : (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2}) \to (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$, der Operator $\mathrm{Id} - T$ invertierbar ist;

    (b) falls $T : (c_{00}, \|\cdot\|_{\ell^2}) \to (c_{00}, \|\cdot\|_{\ell^2})$, der Operator $\mathrm{Id} - T$ nicht invertierbar ist.

25. Sei $x^* : c_0 \to \mathbb{K}, x^*(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k}{2^{k-1}}$, für $x = (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$. Zeigen Sie, dass

    (a) x^* ein stetiges lineares Funktional ist mit $\|x^*\| = 2$;

    (b) $x^* \in (c_0)^*$ auf der abgeschlossenen Einheitskugel in c_0 seine Norm nicht annimmt.

26. (a) Sei X ein normierter Raum, Y ein separabler Banach-Raum und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $F(Y)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{n\to+\infty} S_n y = y \quad \forall y \in Y.$$

    Zeigen Sie, dass $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$.

(b) Sei (T,d) ein kompakter metrischer Raum und $M \subseteq (C(T), \|\cdot\|_\infty))$. Zeigen Sie, dass M genau dann relativkompakt, wenn M beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Hinweis zu (a). Zeigen Sie, dass $S_nT \to T$ $(n \to +\infty)$.

27. (a) Sei $z \in \ell^\infty$ und, für $1 \leq p \leq \infty$, $T_z : \ell^p \to \ell^p, (T_z x)(k) = z(k)x(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe Übungsbeispiel 19(a)). Zeigen Sie, dass T_z genau dann kompakt ist, wenn $z \in c_0$.

    (b) $C^1[0,1]$ sei mit der Norm $\|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ ausgestattet. Zeigen Sie, dass der Einbettungsoperator Operator $\mathrm{Id} : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kompakt ist.

28. (Volterra-Integraloperator) Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig und

$$T : C[0,1] \to C[0,1], \quad (Tx)(s) := \int_0^s k(s,t)x(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass T wohldefiniert und kompakt ist.

29. Sei $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der euklidischen Norm, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$ und $f : M \to \mathbb{R}, f(x,y) = x$. Zeigen Sie, dass

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{x}{5} + \frac{2y}{5},$$

die einzige Hahn-Banach-Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^2$ ist.

30. Sei $M = \{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid t_1 - 3t_2 = 0\}$ und $f : M \to \mathbb{K}, f((t_n)_{n\in\mathbb{N}}) = t_1$. Zeigen Sie, dass

$$g : \ell^1 \to \mathbb{K}, \quad g((t_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \frac{3}{4}t_1 + \frac{3}{4}t_2,$$

die einzige Hahn-Banach-Fortsetzung von f auf ℓ^1 ist.

31. Sei X ein normierter Raum, M ein abgeschlossener linearer Unterraum von X und $x \in X \setminus M$. Dann existiert $x^* \in M^\perp$ mit $\|x^*\| \leq 1$ und $x^*(x) = \mathrm{dist}(x, M)$.

32. Sei X ein normierter Raum und M ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Zeigen Sie, dass

$$(X/M)^* \cong M^\perp \text{ und } M^* \cong X^*/M^\perp.$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass

$$l \in (X/M)^* \mapsto x^* = l \circ [\cdot] \in M^\perp$$

und

$$x^* + M^\perp \in X^*/M^\perp \mapsto x^*|_M \in M^*$$

isometrische Isomorphismen sind.

33. Sei X ein Vektorraum, $A \subseteq X$ eine konvexe und absorbierende Menge und

$$p_A : X \to \mathbb{R}, \quad p_A(x) := \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda A\},$$

das Minkowski-Funktional der Menge A. Zeigen Sie, dass:

    (a) p_A endlich und sublinear ist, und es gilt $\mathrm{core}\, A = \{a \in A \mid \cup_{\lambda>0} \lambda(A - a) = X\} = \{x \in X \mid p_A(x) < 1\}$.

    (b) Ist X ein normierter Raum und A eine Umgebung von 0, dann ist p_A stetig und es gilt

$$\mathrm{int}\, A = \mathrm{core}\, A = \{x \in X \mid p_A(x) < 1\} \text{ und } \overline{A} = \{x \in X \mid p_A(x) \leq 1\}.$$

34. Sei $c_{00}(\mathbb{R})$ der normierte Raum c_{00} über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$U = \{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \mid t_N > 0 \text{ für } N := \max\{n \in \mathbb{N} \mid t_n \neq 0\}\} \subseteq c_{00}(\mathbb{R})$$

und $V := -U$. Zeigen Sie, dass U und V nicht offene, konvexe und disjunkte Mengen sind und dass für jedes $x^* \in (c_{00}(\mathbb{R}))^* \setminus \{0\}$ gilt $x^*(U) = x^*(V) = \mathbb{R}$.

35. (a) Seien U und V disjunkte abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmengen eines reflexiven Banach-Raums X. Zeigen Sie, dass U und V streng getrennt werden können.
    (b) Finden Sie zwei disjunkte abgeschlosse konvexe Teilmengen U und V des $\mathbb{R}^2$, die nicht streng getrennt werden können.

36. (a) Zeigen Sie, dass keiner der Räume ℓ^∞, $L^1[0,1]$ und $L^\infty[0,1]$ reflexiv ist.
    (b) (Satz von James) Zeigen Sie, dass, falls X ein reflexiver Banach-Raum ist, dann nimmt jedes Element aus X^* auf der abgeschlossenen Einheitskugel von X seine Norm an. (Die umgekehrte Aussage gilt auch; der Beweis ist allerdings etwas aufwendiger).
    (c) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ der Banach-Raum aus Übungsbeispiel 13 und $x^* : (X, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}, x^*(x) = \int_0^1 x(t)dt$, ein stetiges lineares Funktional. Zeigen Sie, dass x^* auf der abgeschlossenen Einheitskugel in $(X, \|\cdot\|_\infty)$ seine Norm nicht annimmt. Leiten Sie daraus ab, dass weder $(X, \|\cdot\|_\infty)$ noch $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ reflexiv sind.

37. (a) Seien X und Y normierte Räume. Zeigen Sie, dass $S \in L(Y^*, X^*)$ genau dann ein adjungierter Operator ist, wenn $S^*(X) \subseteq Y$.
    (b) Seien $X = Y = c_0$ und $S : (c_0)^* = \ell^1 \to (c_0)^* = \ell^1, S((t_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\sum_{k=1}^{+\infty} t_k, 0, 0, ...)$. Zeigen Sie, dass $S \in L(\ell^1)$ kein adjungierter Operator ist.

38. (a) Seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein (isometrischer) Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $T^* : Y^* \to X^*$ ein (isometrischer) Isomorphismus ist. Falls X und Y Banach-Räume sind, dann gilt auch die Umkehrung.
    (b) Der normierte Raum Y sei isomorph zu einem reflexiven Banach-Raum. Zeigen Sie, dass Y ebenfalls reflexiv ist.

39. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktonen $f_n : X \to \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ konvergiert.

    (a) Zeigen Sie, dass eine nichtleere offene Menge $V \subseteq X$ und $M > 0$ existieren so, dass $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in V$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
    (b) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine nichtleere offene Menge $V \subseteq X$ und eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existieren so, dass $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in V$ und alle $n \geq N$.

    Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Baire.

40. (a) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ so, dass für alle $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ gilt $(a_k t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$. Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$.
    (b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ so, dass für alle $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ gilt $(a_k t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$. Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

41. Seien X und Y normierte Räume. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

    (a) Ist $T \in L(X,Y)$, dann $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx$ $(n \to +\infty)$.
    (b) Ist $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx$ $(n \to +\infty)$, dann ist T stetig.
    (c) Ist Y ein Banach-Raum und $T \in K(X,Y)$, dann $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ $(n \to +\infty)$.
    (d) Ist X reflexiv und $T \in L(X,Y)$ erfülle $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ $(n \to +\infty)$, dann ist T kompakt.

42. (a) Sei X ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum und $T \in L(X,Y)$ so, dass T nicht surjektiv ist, jedoch $T(X)$ dicht in Y ist. Zeigen Sie, dass $T(X)$ eine Menge der ersten Kategorie ist, die nicht nirgends dicht in Y ist.

(b) Zeigen Sie, dass, für $1 \leq p < \infty$, ℓ^p eine Menge der ersten Kategorie ist, die nicht nirgends dicht in c_0 ist.

(c) Zeigen Sie, dass, für $1 \leq p < q < \infty$, ℓ^p eine Menge der ersten Kategorie ist, die nicht nirgends dicht in ℓ^q ist.

43. Sei $\varphi \in C[0,1]$ und $A = \{f\varphi \mid f \in C[0,1]\}$. Formulieren eine notwendinge und hinreichende Bedingung an φ dafür, dass A eine Menge der ersten Kategorie in $C[0,1]$ ist.

44. Seien $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass für jeder Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ gilt $(a_n t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Multiplikationsoperator $M_a : \ell^p \to \ell^q, M_a((t_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, linear und stetig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass, falls $1 \leq p \leq q < \infty$, dann gilt $a \in \ell^\infty$ und $\|M_a\| = \|a\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

45. Ein kompakter Operator zwischen Banach-Räumen hat genau dann abgeschlossenes Bild, wenn sein Wertebereich endlichdimensional ist.

46. Sei $1 \leq p < \infty$. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist ein Hilbert-Raum genau dann, wenn $p = 2$.

47. (Verallgemeinerte Parallelogrammgleichung) Sei H ein Hilbert-Raum. Falls $x_1, ..., x_n \in H$, dann gilt

$$\sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

48. Sei $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k t}, n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, ..., n\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g\rangle := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}dt$$

   ein inneres Produkt auf X definiert.

   (b) Zeigen Sie, dass für $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k t}$, mit $\lambda_k \neq \lambda_j$, falls $k \neq j$, gilt

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   (c) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ nicht vollständig ist.

   (d) Sei H die Vervollständigung von X bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass H nicht separabel ist.

49. Sei H ein Hilbert-Raum, $K \subseteq H$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge und $x \in H \setminus K$.

   (a) Zeigen Sie, dass $P_K(x) \in \operatorname{bd} K := \overline{K} \setminus \operatorname{int} K$ und dass $\operatorname{dist}(x, K) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{bd} K)$.

   (b) Zeigen Sie, dass, falls $\operatorname{bd} K$ nichtleer und konvex ist, dann gilt $P_K(x) = P_{\operatorname{bd} K}(x)$.

   (c) Für H ein reeller Hilbert-Raum und $K := \{x \in H \mid \langle x, a\rangle \leq c\}$, wobei $a \in H \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$, bestimmen Sie den orthogonalen Projektionsoperator P_K.

50. (a) Sei H ein Hilbert-Raum und $K \subseteq H$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

   (b) Bestimmen Sie $P_{\overline{U}_r(a)}$, wobei $\overline{U}_r(a) = \{x \in H \mid \|x - a\| \leq r\}$.

51. Der Vektorraum c_{00} sei ausgestattet mit dem Skalarprodukt des Raumes ℓ^2 und der entsprechenden Norm, und sei

$$M = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges Funktional $x^* \in c_{00}^*$ existiert so, dass $M = \ker x^*$ und $x^*(e_1) = 1$. Leiten Sie daraus ab, dass M ein abgeschlossener linearer Unterraum ist.

   (b) Zeigen Sie, dass kein $y \in c_{00}$ existiert so, dass für alle $x \in c_{00}$ gilt $x^*(x) = \langle x, y\rangle$.

   (c) Bestimmen Sie $M^\perp$. Zeigen Sie, dass $c_{00} \neq M \oplus_2 M^\perp$ und dass $M \neq M^{\perp\perp}$.

52. Sei H ein Hilbert-Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ und $x \in H$. Dann gilt:

$$x_n \to x \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x,\ \|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to +\infty).$$

53. Sei H ein Hilbert-Raum, $M \subseteq H$ ein abgeschlossener linearer Unterraum und $\ell : M \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf M. Zeigen Sie, dass ℓ eine eindeutige Hahn-Banach-Fortsetzung auf H hat und dass diese durch $x \mapsto \ell \circ P_M(x)$ gegeben ist.

54. (a) Sei H ein Hilbert-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H. Zeigen Sie, dass $x_n \xrightarrow{w} 0 \quad (n \to +\infty)$.

   (b) Sei $A \subseteq [0, 2\pi]$ eine Lebesgue-messbare Menge. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A \sin(nt) = \lim_{n\to+\infty} \int_A \cos(nt) = 0.$$

55. Sei $w : [0,1] \to (0, +\infty)$ eine stetige Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$, definieren wir auf $\mathcal{P}_n[0,1]$ (siehe Übungsbeispiel 8) das Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)w(t)dt \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_n[0,1].$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_n[0,1]$ eine Orthonormalbasis $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ hat mit $\mathrm{Grad}(p_k) = k, k = 0, ..., n$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\langle p_k, p_k'\rangle = 0$ für alle $k = 0, ..., n$.

56. (a) Sei H ein komplexer Hilbert-Raum. Zeigen Sie, dass jeder Operator $T \in L(H)$ als $T = U + iV$, mit $U, V \in L(H)$ selbstadjungiert, dargestellt werden kann.

   (b) Sei H ein Hilbert-Raum. Zeigen Sie, dass jeder Operator $T \in L(H)$ als $T = U - V$, mit $U \in L(H)$ selbstadjungiert und $V \in L(H)$ schiefsymmetrisch ($V^* = -V$), dargestellt werden kann.

   (c) Zeigen Sie, dass, falls H ein Hilbert-Raum mit $\dim H \geq 2$ ist, dann sind die Mengen $\{U \in L(H) \mid U \text{ ist selbstadjungiert}\}$ und $\{U \in L(H) \mid U \text{ ist schiefsymmetrisch}\}$ nirgends dicht in $L(H)$.

57. (a) Seien H und G Hilbert-Räume, $\{e_1, ..., e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H, $\{f_1, ..., f_n\}$ ein Orthonormalsystem in G, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, und $T : H \to G, T(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \langle x, e_i\rangle$. Berechnen Sie $\|T\|$.

   (b) Sei H ein Hilbert-Raum, $a, b \in H \setminus \{0\}, a \perp b$, und $T : H \to H, T(x) = a\langle x, b\rangle + b\langle x, a\rangle$. Berechnen Sie $\|T\|$.

   (c) Sei $T : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi], (Tf)(x) = \sin x \int_0^\pi f(t) \cos t dt + \cos x \int_0^\pi f(t) \sin t dt$. Berechnen Sie $\|T\|$.

58. (a) Sei H ein Hilbert-Raum und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(H)$ so, dass $\lim_{n\to+\infty} |\langle T_n x, y\rangle| = 0$ für alle $x, y \in H$. Lässt sich daraus herleiten, dass $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist? Lässt sich daraus herleiten, dass die Folge $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist?

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$T_n : \ell^2 \to \ell^2, \quad T_n(x_1, x_2, ...) = (a_{n+1}x_{n+1}, a_{n+2}x_{n+2}, ...).$$

(i) Zeigen Sie, dass $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(\ell^2)$ und dass $T_n(x) \to 0$ $(n \to +\infty)$ für alle $x \in \ell^2$.

(ii) Berechnen Sie T_n^* für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Sei $M := \{x \in \ell^2 \mid T_n^*(x) \to 0 \ (n \to +\infty)\}$. Zeigen Sie, dass $M = \ell^2$ genau dann, wenn $a \in c_0$ und dass $M = \{0\}$ genau dann, wenn $a \notin c_0$.

59. Sei $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $T : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1], (Tf)(x) = \varphi(x) \int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$.

(a) Zeigen sie, dass T selbstadjungiert und positiv ist.

(b) Bestimmen Sie $\lambda \geq 0$ so, dass $T^2 = \lambda T$.

(c) Bestimmen Sie $\sqrt{T}$.

Hinweis. Sei H ein Hilbert-Raum. Ein Operator $T \in L(H)$ heißt positiv (man schreibt $T \geq 0$), falls $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$. Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und positiv, so existiert genau ein selbstadjungierter positiver Operator $S \in L(H)$ mit $S^2 = T$ (man schreibt $S = \sqrt{T}$).

60. Sei $X = \{x \in \ell^\infty([0, 1]) \mid x \text{ ist stetig bei } 0 \text{ und } 1, x(0) = 0\}$ ausgestattet mit der Supremumnorm.

(a) Zeigen Sie, dass X ein abgeschlossener linearer Unterraum von X ist.

(b) Sei $T : X \to X, (Tx)(t) = tx(t)$. Zeigen Sie, dass T ein linearer stetiger Operator ist mit $\sigma(T) = [0, 1]$. Bestimmen Sie $\sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.