Univ.-Prof. Dr. Radu Ioan Boţ

Übungen zu "Funktionalanalysis" - Gruppe 1 -

SS2020

1. Es seien $p, q > 1$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (a) (Young-Ungleichung) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \geq 0$ gilt
   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

   (b) (Hölder-Ungleichung) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_k, b_k \in \mathbb{K}, k = 1, ..., n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt
   $$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. (Minkowski-Ungleichung) Sei $p \geq 1$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_k, b_k \in \mathbb{K}, k = 1, ..., n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass (X, d) vollständig ist.

   Hinweis. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt.

4. Sei (X, d) ein (nicht notwendig vollständiger) metrischer Raum. Wir betrachten
   $$\widetilde{X} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge in } X\}$$
   mit der Äquivalenzrelation
   $$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \widetilde{X} \Leftrightarrow (d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge.}$$
   Weiterhin, sei
   $$\tilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to [0, +\infty), \qquad \tilde{d}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n).$$

   (i) Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ wohldefiniert ist und dass $(\widetilde{X}, \tilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

   (ii) Sei $J : X \to \widetilde{X}, J(x) = (x)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass J injektiv und isometrisch ist und dass $J(X)$ dicht in $\widetilde{X}$ ($\overline{J(X)} = \widetilde{X}$) ist.

5. Sei X der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$. Für $x \in X$, sei
   $$\|x\|_{\text{Lip}} := |x(0)| + \sup_{s,t\in[0,1], s\neq t} \left|\frac{x(s) - x(t)}{s - t}\right|.$$
   Zeigen Sie, dass

   (a) $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ eine Norm ist, und es gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\text{Lip}}$ für alle $x \in X$;

   (b) $(X, \|\cdot\|_{\text{Lip}})$ ein Banach-Raum ist.

6. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

   (i) $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ ist eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante ≤ 1, und die Lipschitz-Konstante ist gleich 1 ist falls $X \setminus \overline{A}$ nichtleer ist;

   (ii) die Umgebungen $B_r(A) = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < r\}$ sind für alle $r > 0$ offene Mengen;

   (iii) für $r, s > 0$ gilt $B_r(B_s(A)) \subseteq B_{r+s}(A)$; ermitteln Sie, wann Gleichheit gilt.

7. Sei $C[0, 1]$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$. Für $f \in C[0, 1]$ definieren wir

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt.$$

   Zeigen Sie, dass $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ ein nicht vollständiger normierter Raum ist.

   Hinweis. Für $n \geq 2$, sei

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), & \textit{falls } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 1, & \textit{falls } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \geq 2}$ eine nicht konvergente Cauchy-Folge in $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ ist.

8. (Pompeiu-Hausdorff-Abstand) Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X \mid A \text{ ist nichtleer, beschränkt und abgeschlossen}\}.$$

   Der Pompeiu-Hausdorff-Abstand zwischen $A_1 \in \mathcal{A}$ und $A_2 \in \mathcal{A}$ ist definiert durch

$$d_H(A, B) := \inf\{\varepsilon > 0 : A_1 \subseteq B_\varepsilon(A_2) \text{ und } A_2 \subseteq B_\varepsilon(A_1)\}.$$

   Zeigen Sie, dass d_H eine Metrik auf $\mathcal{A}$ ist und dass für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\left\{\sup_{a \in A} \operatorname{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \operatorname{dist}(b, A)\right\} \\ &= \sup_{x \in M} |\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, B)|, \end{aligned}$$

   für jede Menge $M \subseteq X$ mit $A \cup B \subseteq M$.

9. (James, 1951) Für $x = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$, sei

$$\|x\|_J := \sup_{r \geq 2, n_1 < n_2 < \ldots < n_r} \left(\sum_{k=1}^{r-1} |t_{n_{k+1}} - t_{n_k}|^2 + |t_{n_r} - t_{n_1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   Betrachten Sie nun

$$J := \{x \in c_0 \mid \|x\|_J < +\infty\}.$$

   Zeigen Sie, dass $(J, \|\cdot\|_J)$ ein Banach-Raum ist.

10. (a) Zeigen Sie, dass für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt $\ell^p \subseteq \ell^q$ indem Sie zeigen, dass

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p.$$

    (b) Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{1 \leq p < \infty} \ell^p \subseteq c_0$$

    und ermitteln Sie, ob diese Inklusion echt ist.

11. Sei $x \in \ell^q$, für $q \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

12. Ist T eine Menge und Σ eine σ-Algebra auf T, so heißt eine Abbildung $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$) signiertes (bzw. komplexes) Maß, falls μ additiv ist, d.h. wenn für paarweise disjunkte Mengen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ gilt
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$
Es ist einfach zu sehen, dass $\mu(\emptyset) = 0$.

Ist μ ein signiertes oder komplexes Maß und $A \in \Sigma$, so definiert
$$|\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|,$$
wobei das Supremum über alle endlichen Zerlegungen $A = A_1 \cup ... \cup A_n$ mit paarweise disjunkten $A_i \in \Sigma$ gebildet wird, ein positives Maß, das als Variation von μ bezeichnet wird. Es kann gezeigt werden, daß $|\mu|(T) < +\infty$.

Die Menge $M(T, \Sigma)$ aller Maße auf Σ ist ein Vektorraum und die sogenannte Variationsnorm wird als
$$\|\mu\| := |\mu|(T) \quad \forall \mu \in M(T, \Sigma)$$
definiert. Zeigen Sie, dass $M(T, \Sigma)$, ausgestattet mit der Variationsnorm, ein Banach-Raum ist.

13. Sei $X = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = 0\}$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum und $M = \{x \in X \mid \int_0^1 x(t)dt = 0\}$ ein echter abgeschlossener linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{dist}(x, M) = \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \quad \forall x \in X$$
und dass für kein $x \in X\backslash M$ das Infimum in der Definition der Distanz-Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, M)$ angenommen wird.

14. Zeigen Sie, dass die Norm von ℓ^∞/c_0 durch $\|[x]\| = \limsup_{k\to+\infty} |t_k|$, für $x = (t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, gegeben ist.

15. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

    (a) Zeigen Sie, dass für $1 \le p \le q < \infty$ gilt $L^q[a,b] \subseteq L^p[a,b]$ indem Sie zeigen, dass
    $$\frac{\|f\|_p}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} \le \frac{\|f\|_q}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall f \in L^q[a,b].$$

    (b) Sei $f \in L^\infty[a,b]$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

    (c) Sei $f \in L^q[0,1]$, für $q > 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\downarrow 1} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^1}$.

16. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    (i) X ist endlichdimensional.

    (ii) Jede zwei Normen auf X sind äquivalent.

17. Zeigen Sie mittels Riesz-Lemma, dass ein Banach-Raum keine abzählbare Basis haben kann.

18. Sei $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definiert durch $(Tf)(x) = f(\sqrt{x})$ für $f \in L^2[0,1]$ und $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass T stetig ist und finden Sie $\|T\|$.

19. (Heisenberg-Relation) Sei X ein nichttrivialer normierter Raum und $P, Q : X \to X$ lineare Operatoren mit $PQ - QP = \mathrm{Id}$. Zeigen Sie, dass P und Q nicht stetig sein können.

20. Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ setze $\|p\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. Ist er vollständig?

(b) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Operatoren $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ stetig sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$:

$$T(p) = \int_0^1 p(t)dt, \quad T(p) = p'(0), \quad T(p) = p'(1).$$

(c) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Operatoren $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ stetig sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$:

$$(Tp)(t) = p(t+1), \quad (Tp)(t) = \int_0^t p(s)ds.$$

21. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit μ *semifinit*, d. h. für jede Menge $M \in \Sigma$ mit $\mu(M) = +\infty$ es existiert $N \subset M, N \in \Sigma$, mit $0 < \mu(N) < +\infty$, und $g \in L^\infty(\mu)$. Zeigen Sie, dass für

$$Tg : L^1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad (Tg)(f) = \int fg d\mu,$$

gilt $\|Tg\| = \|g\|_{L^\infty}$.

22. Sei S ein kompakter topologischer (metrischer) Raum und

$$\mathcal{M} := \{T : C(S) \to \mathbb{K} \mid T \neq 0, T \text{ ist linear und multiplikativ}\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $T \in \mathcal{M}$ ein $x_T \in S$ existiert so, dass

$$T(f) = f(x_T) \quad \forall f \in C(S).$$

23. Seien X und Y zwei normierte Räume und $T : X \to Y$ ein Quotientenoperator. Zeigen Sie, dass $X/\ker(T) \cong Y$.

24. (Mazur-Ulam) Zeigen Sie, dass jede bijektive Isometrie zwischen reellen normierten Räumen

$$f : X \to Y, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X,$$

affin ist, d.h.

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in X \ \forall t \in [0, 1].$$

Hinweis. Für $x, y \in X$ fixiert, zeigen Sie, dass die "affine Defektfunktion"

$$\operatorname{def}(f) = \left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \right\|$$

gleich Null ist, indem Sie:

- zeigen, dass $\operatorname{def}(f) \leq \frac{\|x-y\|}{2}$;
- zeigen, dass $f' = f^{-1} \circ \rho \circ f$, mit $\rho(z) = f(x) + f(y) - z$, eine bijektive Isometrie ist, und $\operatorname{def}(f')$ ermitteln.

25. Finden Sie die Form der stetigen linearen Funktionale auf c_0, die auf der abgeschlossenen Einheitskugel ihre Norm annenhmen.

26. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass:

(a) falls X *folgenkompakt* ist, d.h., jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge, dann ist X *vollständing* und *total beschränkt*, d.h., $\forall \varepsilon > 0$ es existieren endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n \in X$ so, dass $X \subseteq \bigcup_{k=1}^n \{x \in X : d(x, x_k) < \varepsilon\}$.

(b) falls X *vollständing* und *total beschränkt* ist, dann ist X *kompakt*.

27. (a) Sei X ein Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativkompakt ist.

    (b) Sei T ein kompakter metrischer Raum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (C(T), \|\cdot\|_\infty)$ eine (gleichmäßig) beschränkte Folge und die Abbildung $g : T \to \ell^\infty, g(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass g genau dann stetig ist, wenn die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativkompakt ist.

    (c) Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge zweimal differenzierbarer Funktionen definiert auf einem offenen Intervall, das $[0,1]$ enthält. Weiters, sei $g_n(0) = g_n'(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|g_n''(x)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge hat, die gleichmäßig konvergent auf $[0,1]$ ist.

28. Sei X ein Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ so, dass $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K := \left\{ x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \in X \;\middle|\; \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \leq 1 \right\}$$

kompakt ist.

29. Sei X ein normierter Raum, $Y \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $x_0 \in X \setminus Y$.

    (a) Zeigen Sie, dass $f : \operatorname{lin}(Y \cup \{x_0\}) \to \mathbb{K}, f(y + \lambda x_0) = \lambda$ für $y \in Y$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, wohldefiniert und linear ist.

    (b) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $x_0 \notin \overline{Y}$.

    (c) Zeigen Sie, dass $\overline{Y} = \cap\{\text{Ker } x^* \mid x^* \in X^*, Y \subseteq \text{Ker } x^*\}$.

30. Zeigen Sie, dass jedes lineare stetige Funktional auf c_0 eine eindeutige Hahn-Banach-Fortsetzung auf ℓ^∞ hat.

31. Sei $M = \{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid t_1 = t_3 = t_5 = ... = 0\}$. Zeigen Sie, dass jedes lineare stetige Funktional auf M, das nicht Null ist, unendlich viele Hahn-Bahanch-Forsetzungen auf ℓ^1 hat.

32. (König) Sei X ein separabler normierter Raum. Dann existiert ein injektiver linearer stetiger Operator $T : X \to c_0$.

33. Sei X ein normierter Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe stetige Funktion sowie $g : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine konkave Funktion mit $g \leq f$. Zeigen Sie, dass eine stetige affine Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ existiert so, dass $g \leq h \leq f$.

34. Sei $H = L^2([-1,1];\mathbb{R})$ und, für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, $U_\alpha := \{f \in H \mid f \text{ ist stetig}, \; f(0) = \alpha\}$ und $U_\beta := \{f \in H \mid f \text{ ist stetig}, \; f(0) = \beta\}$. Zeigen Sie, dass U_α und U_β disjunkt, konvex und dicht in H sind und dass sie nicht durch ein stetiges lineares Funktional auf H getrennt werden können.

35. Sei X ein reeller normierter Raum.

    (a) Zeigen Sie, dass, für eine nichtleere Menge $U \subseteq X$, gilt

$$\overline{\operatorname{co} U} = \left\{ x \in X \mid x^*(x) \leq \sup_{u\in U} x^*(u) \; \forall x^* \in X^* \right\}.$$

    (b) Sei $U \subseteq X$ eine abgeschlossene konvexe Menge mit nichtleerem Inneren. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in U \setminus \operatorname{int} U$ ein $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ existiert mit $x^*(x) = \sup_{u\in U} x^*(u)$.

    (c) Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in U \setminus \operatorname{int} U$ ein $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert mit $x^*(x) = \sup_{u\in U} x^*(u)$.

36. Sei X ein reflexiver Banach-Raum und $K \subseteq X$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge. Zeigen Sie, dass zu jedem $x \in X$ ein $y \in K$ mit

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, K) = \inf_{k\in K} \|x - k\|$$

existiert. Leiten Sie daraus, dass $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ nicht reflexiv ist.

37. Sei X ein normierter Raum.

    (a) Ist $T \in L(X, \ell^\infty)$, so existiert eine beschränkte Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ mit $T(x) = (x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in X$.

    (b) Sei $Y \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $T : Y \to \ell^\infty$ ein stetiger linearer Operator. Zeigen Sie, dass ein Operator $\widetilde{T} \in L(X, \ell^\infty)$ existiert so, dass $\widetilde{T}|_Y = T$ und $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

38. (a) Für $n \in \mathbb{N}$, sei $X_n := \{f \in C[0,1] \mid \exists t \in [0,1]$ so, dass $|f(s) - f(t)| \leq n|s-t|\ \forall s \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass X_n abgeschlossen und nirgends dicht ist.

    (b) Leiten Sie aus (i) die Existenz einer G_δ-Teilmenge von $C[0,1]$ ab, die nur aus Funktionen besteht, die an keiner Stelle im Intervall $[0,1]$ differenzierbar sind.

39. Sei X ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum und $T_n : X \to Y, n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger linearer Operatoren. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    (i) Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ gilt $T_n(x_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$.

    (ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$.

    Hinweis. Der Banach-Raum (warum?) $c_0(X) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0\}$ ausgestattet mit der Norm $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ könnte hilfreich sein.

40. Sei $C := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ ist $2\pi-$periodisch und stetig$\}$ ausgestattet mit der Supremumnorm, $\sigma_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k$, für $f \in C$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, k \in \mathbb{N}$, der k-te Fourierkoeffizient von f ist. Zeigen Sie, dass $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger linearer Funktionale auf C ist mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n\| = +\infty$. Leiten Sie daraus ab, dass eine Funktion $f \in C$ existiert so, dass die Fourier-Reihe der Funktion f an der Stelle 0 divergent ist.

41. Seien X und Y Banach-Räume und $T \in L(X,Y)$ so, dass T abgeschlossene beschränkte Mengen in X auf abgeschlossene Mengen in Y abbildet. Zeigen Sie, dass $T(X)$ abgeschlossen in Y ist.

42. Seien X und Y normierte Räume, $X \neq \{0\}$ und $Y \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    (i) Jeder lineare stetige Operator $T : X \to Y, T \neq 0$, ist offen.

    (ii) Jeder lineare stetige Operator $T : X \to Y, T \neq 0$, ist surjektiv.

    (iii) $\dim Y = 1$.

43. Zeigen Sie, dass keine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ existiert so, dass, für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$, die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ absolut konvergent ist genau dann, wenn die Folge $(a_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

44. Sei X ein abgeschlossener linearer Unterraum von $C[0,1]$, der nur aus C^1-Funktionen besteht. Zeigen Sie, dass X endlichdimensional ist.

45. (a) Sei X ein strikt konvexer normierter Raum, d.h. für $x, y \in X$ und $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt $\|x+y\| < 2$. Falls für $x, y, z \in X$ eine Zahl $\lambda \in [0,1]$ existiert so, dass $\|z - x\| = (1-\lambda)\|y-x\|$ und $\|z-y\| = \lambda\|y-x\|$, dann gilt $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

    (b) Zeigen Sie, dass Hilbert-Räume strikt konvex sind.

    (c) Sei X ein Hilbert-Raum. Für $x, y, z \in H$ mit $\|z - x\| = \|y\|$, $\|z - y\| = \|x\|$ und $\|z\| = \|x + y\|$ gilt $z = x + y$.

46. Sei H ein Hilbert-Raum und $f : B_H \to B_H$ so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in B_H.$$

Zeigen Sie, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : H \to H$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in H$$

und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in B_H$.

47. (Ptolemäische Ungleichung) Sei H ein Hilbert-Raum. Für $a, b, c, d \in H$ gilt

$$\|a-c\|\|b-d\| \leq \|a-b\|\|c-d\| + \|b-c\|\|a-d\|.$$

48. Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}$, für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)\overline{f_n(x)} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

49. (Lax-Milgram) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbert-Raum und sei $b : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear.

   (a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

      (i) b ist stetig;

      (ii) $y \mapsto b(x, y)$ ist stetig für alle $x \in H$ und $x \mapsto b(x, y)$ ist stetig für alle $y \in H$;

      (iii) es existiert $M \geq 0$ so, dass

$$|b(x, y)| \leq M\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

   (b) Zeigen Sie, dass, falls b stetig ist, dann existiert $T \in L(H)$ mit

$$b(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

   (c) Zeigen Sie, dass, falls b koerziv ist, d.h. es existiert $m > 0$ so, dass $b(x, x) \geq m\|x\|^2$ für alle $x \in H$, dann ist T invertierbar und $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

50. Zeigen Sie, dass $K = \{f \in L^2[0, 1] \mid \int_0^1 |f(x)|dx \leq 1\} \subseteq L^2[0, 1]$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge ist und bestimmen Sie den Projektionsoperator P_K.

51. (a) Sei X ein normierter Raum, $M_1 \subseteq M_2 \ldots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \ldots$ eine Folge linearer abgeschlossener Unterräume und $M := \overline{\text{lin}\left(\cup_{n=1}^{+\infty} M_n\right)}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ gilt $\text{dist}(x, M) = \lim_{n \to +\infty} \text{dist}(x, M_n)$. Falls X ein Hilbert-Raum ist, dann gilt $P_M(x) = \lim_{n\to+\infty} P_{M_n}(x)$ für alle $x \in H$.

   (b) Sei H ein Hilbert-Raum, $K_1 \supseteq K_2 \ldots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \ldots$ eine Folge nichtleerer konvexer abgeschlossener Mengen und $K := \cap_{n=1}^{+\infty} K_n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in H$ gilt $P_K(x) = \lim_{n\to+\infty} P_{K_n}(x)$.

   (c) Sei $M = \{f \in L^2(0, +\infty) \mid \int_0^n f(x)dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2(0, +\infty)$. Bestimmen Sie den orthogonalen Projektionsoperator P_M.

52. (a) Sei H ein reeller Hilbert-Raum und $f : H \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : H \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \|x\|^2 - f(x)$ nach unten beschränkt ist und dass sie auf jeder nichtleeren konvexen abgeschlossenen Menge ein edeutiges Minimum besitzt.

   (b) Sei $\varphi : L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \varphi(f) = \int_0^1 |f(x)|^2 dx - 16 \int_0^1 xf(x)dx$, und die Menge $K = \{f \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \mid \int_0^1 |f(x)|dx \leq 1\}$. Finden Sie $f^* \in K$ so, dass $\varphi(f^*) = \inf_{f \in K} \varphi(f)$.

53. (a) Sei H ein Hilbert-Raum und $S \subseteq H$ ein unendliches Orthonormalsystem. Zeigen Sie, dass S abgeschlossen und beschränkt, allerdings nicht total beschränkt ist.

   (b) Sei $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ein Orthonormalsystem und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $\{a_n e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ genau dann total beschränkt ist, wenn $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$. Ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H \setminus \{0\}$ ein Orthogonalsystem ist, dann ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ genau dann total beschränkt, wenn $\|x_n\| \to 0$ $(n \to +\infty)$.

54. (a) Sei H ein Hilbert-Raum, $M \subseteq H$ ein abgeschlossener linearer Unterraum und $T : M \to X$ ein stetiger linearer Operator, wobei X ein normierter Raum ist. Zeigen Sie, dass ein stetiger linearer Operator $\overline{T} : H \to X$ existiert so, dass $\overline{T}|_M = T$ und $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

(b) Sei $M = \{x \in \ell^2 \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\}$ und $T : M \to c_0, Tx = x$. Geben Sie einen stetigen linearen Operator $\overline{T} : \ell^2 \to c_0$ so, dass $\overline{T}|_M = T$ und $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

55. Sei H ein Hilbert-Raum.

   (a) Zeigen Sie, dass, falls H unendlichdimensional, dann ist $L(H)$ nicht separabel.

   (b) Zeigen Sie, dass $L(H)$ genau dann ein Hilbert Raum ist, wenn $\dim H = 1$.

56. Sei $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ein linearer Operator so, dass $\langle Tx, Ty \rangle = 0$, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $T = kS$, wobei $k \geq 0$ und S unitär.

57. Sei H ein Hilbert-Raum.

   (a) Zeigen Sie, dass, falls $U \in L(H)$ ein selbstadjungierter und positiver Operator ist, dann ist U kompakt genau dann, wenn $\sqrt{U}$ kompakt ist.

   (b) Seien $U, V \in L(H)$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit $V \geq U \geq 0$ und V kompakt. Zeigen Sie, dass auch U kompakt ist.

   Hinweis. Sei H ein Hilbert-Raum. Ein Operator $T \in L(H)$ heißt positiv (man schreibt $T \geq 0$), falls $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$. Für $U, V \in L(H)$ man schreibt $V \geq U$, wenn $V - U \geq 0$. Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und positiv, so existiert genau ein selbstadjungierter positiver Operator $S \in L(H)$ mit $S^2 = T$ (man schreibt $S = \sqrt{T}$).

58. Sei H ein Hilbert-Raum und $U, V \in L(H)$ selbstadjungiert mit $V \geq U \geq \mathrm{Id}$. Zeigen Sie, dass U und V invertierbar mit stetigen Inversen sind und dass $U^{-1} \geq V^{-1}$.

59. Sei $\varphi \in L^\infty[0,1]$ und $T_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1], (T_\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x)$.

   (i) Zeigen Sie, dass T_φ linear und stetig ist und bestimmen Sie $\|T_\varphi\|$.

   (ii) Bestimmen Sie T_φ^* und ermitteln Sie wann T_φ selbstadjungiert ist.

   (iii) Zeigen Sie, dass $T_\varphi \geq 0$ genau dann, wenn $\varphi \geq 0$ fast überall auf $[0,1]$. In diesem Fall bestimmen Sie $\sqrt{T_\varphi}$.

60. (Satz von Hahn-Banach in $L(H)$)

   Sei H ein reeller Hilbert-Raum.

   (a) Zeigen Sie, dass, ein lineares stetiges Funktional $f : L(H) \to \mathbb{R}$ existiert mit $\|f\| \leq 1$ und

$$\inf_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, x \rangle \leq f(T) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, x \rangle \quad \forall T \in L(H), T \text{ selbstadjungiert.}$$

   (b) Zeigen Sie, dass, ein lineares stetiges Funktional $g : L(H) \to \mathbb{R}$ existiert mit $\|g\| = 1$ und

$$\inf_{\|x\| = 1} \langle Tx, x \rangle \leq g(T) \leq \sup_{\|x\| = 1} \langle Tx, x \rangle \quad \forall T \in L(H), T \text{ selbstadjungiert.}$$