universität wien

Univ.-Prof. Dr. Radu Ioan Boţ

Übungen zu "Höhere Analysis und Differentialgeometrie"

WS2018/2019

1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$, so, dass also die Niveaumenge $N_f(1) = f^{-1}(\{1\})$ für f zum Wert 1 den Einheitskreis beschreibt.

   (a) In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ kann jeweils eine Variable als differenzierbare Funktion der anderen ausgedrückt werden?

   (b) Vergleichen Sie die implizite Berechnung der Ableitungen mit jener aus der expliziten Auflösung nach einer Variable.

2. Wir untersuchen die Niveaumenge $N_f(0)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

   (a) Für welche Punkte kann der Satz über implizite Funktionen keine Aussage machen?

   (b) An welchen Stellen ist keine Auflösbarkeit nach y (als differenzierbare Funktion von x) möglich?

   (c) An welchen Stellen gilt $y'(x) = 0$?

3. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x, y, z) = xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$, mit Nullstellenmenge $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

   (a) Welche Variablen können in einer Umgebung von $(0, 0, 1)$ jeweils innerhalb N als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden?

   (b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der sich ergebenden Funktionen.

4. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x y + \sin(xz) + \log(1 + z) - 2 \\ \sin(x^2 y) + y^2 + z^5 - 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Welche zwei Variablen lassen sich aus dem Gleichungssytem $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0, 2, 0)$ durch die jeweils dritte ausdrücken?

   (b) Berechnen Sie die Differentiale der sich dabei ergebenden Funktionen an der $(0, 2, 0)$ entsprechenden Stelle.

5. Interpretieren Sie die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2$, als Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, indem Sie $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ersetzen. Berechnen Sie das Differential von g und untersuchen Sie, auf welcher Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ die Abbildung g ein lokaler Diffeomorphismus ist. Ist g ein Diffeomorphismus dieser Teilmenge W mit ihrer Bildmenge $g(W)$?

   Hinweis. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist, heißt *lokaler Diffeomorphismus*, falls jeder Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung $W \subseteq U$ besitzt so, dass $f(W)$ offen ist und die Einschränkung $f|_W : W \to f(W)$ von f auf W ein Diffeomorphismus ist.

6. (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \sin\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   (a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus?

(b) Sei $U := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Bildmenge $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, indem Sie für einen Punkt $(x, y, z) = f(r, \varphi, \theta)$ die Größen r, φ und θ geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene $z = 0$ und Winkel mit der z-Achse interpretieren. Erstellen Sie eine Skizze.

(c) Zeigen Sie, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist.

(d) Ist $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus?

7. Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Wege:

   (a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die *Schraubenlinie* $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $c > 0$;

   (b) $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ die *Zykloide* $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ (Weg eines Punktes an der Peripherie eines Einheitskreises, der eben und ohne Gleiten abrollt).

8. Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Wege im $\mathbb{R}^2$:

   (a) $x(t) = \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), y(t) = \log\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right), t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$;

   (b) $x(t) = 5\sin(t) - \sin(5t), y(t) = 5\cos(t) - \cos(5t), t \in [0, 2\pi]$.

9. (Polarkoordinatendarstellung ebener Wege) Es sei $\alpha > 0$ und $r : [0, \alpha] \to [0, +\infty)$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass durch $\gamma(t) = r(t) \cdot (\cos(t), \sin(t))$ ein stetig differenzierbarer Weg definiert wird und dass der Weg γ genau dann regulär ist, wenn $r'(t)^2 + r(t)^2 > 0$ für alle $t \in [0, \alpha]$. Bestimmen Sie die Gesamtbogenlänge:

   (a) der *Kardioide* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch die Radiusfunktion $r(t) = 1 + \cos(t)$;

   (b) der *Archimedischen Spirale* mit beliebigem Winkelbereich $\gamma : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch die Radiusfunktion $r(t) = bt$, wobei $b > 0$ konstant ist.

10. Sei $p > 0$. Bestimmen Sie die Länge des Parabelbogens
$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}, \ y \in [-p, p].$$

11. Sei $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\exp(-t)\cos(t), \exp(-t)\sin(t))$. Berechnen Sie die Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge.

12. Bestimmen Sie die Krümmung eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $(0, 0)$ an jeder Stelle.

13. Gegeben sei die 1-Form $\omega(x, y) = -ydx + xdy$ auf $\mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von ω über C, wobei C:

    (a) das Bild des Weges $\gamma : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = e^t(\cos(t), \sin(t))$ ist;

    (b) die Zusammensetzung der Strecken von $(1, 0)$ nach $(0, 0)$ und von $(0, 0)$ nach $e^\alpha(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ist.

14. Für $r > 0$ und $c > 0$, sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$, die Schraubenlinie (Spirale) C mit Radius r und Ganghöhe c. Berechnen Sie das Kurvenintegral der 1-Form $\omega(x, y, z) = (x - y)dx + zdy + xydz$ über C.

15. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, $\omega = \sum_{i=1}^n v_i dx_i$ die zugehörige 1-Form auf U und $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U. Zeigen Sie, dass die folgende Abschätzung gilt:
$$\left| \int_\gamma \omega \right| = \left| \int_\gamma \langle v | dx \rangle \right| \leq L(\gamma) \|v\|_{\gamma, \infty},$$
wobei $L(\gamma)$ die Weglänge von γ bezeichnet und $\|v\|_{\gamma,\infty} = \sup\{\|v(\gamma(t))\| : t \in [a, b]\}$ das Maximum der euklidischen Norm von v entlang γ.

16. Es sei $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $v : U \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $v(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$ mit zugeordneter 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^3 v_i dx_i$. Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{\|x\|}$ eine Stammfunktion für ω auf U definiert und berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ entlang des Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\tanh(t\log(3/2)), t^{7/6}, \cos(\pi t))$.

17. Es sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ und $v : U \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = (x^2y, ze^x, xy\log(z))$.

    (a) Ist v ein Gradientenfeld auf U?

    (b) Sei ω die zugeordnete 1-Form auf U. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \omega$, wobei C durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (t, t^2, 1)$, gegeben ist.

18. Zeigen Sie, dass der Ausdruck unter dem Integral eine exakte stetige 1-Form ist und berechnen Sie das entsprechende Kurvenintegral entlang einer Kurve für welche nur der Anfangspunkt und der Endpunkt gegeben sind:

    (a) $\int\limits_{(0,2)}^{(2,0)} y^2e^x dx + 2ye^x dy$;

    (b) $\int\limits_{(1,2)}^{(-3,3)} \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \frac{x^2}{(x-y)^2} dy$;

    (c) $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{y^2z^2dx + 2x^2zdy + 2x^2ydz}{(2x+yz)^2}$.

19. Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z \geq 0\}$ und $P, Q, R : U \to \mathbb{R}$,

$$P(x,y,z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2} \quad Q(x,y,z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2} \quad R(x,y,z) = z^2 - xy.$$

    (a) Berechnen Sie $\int\limits_C \omega$ für $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ und $C \subseteq U$ eine Kurve, die die Punkte $A(1,1,0)$ und $B(-1,1,0)$ verbindet.

    (b) Betrachtet man ω als 1-Form über $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, zeigen Sie, dass eine Kurve $D \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, die $A(1,1,0)$ und $B(-1,1,0)$ verbindet, existiert, sodass $\int\limits_C \omega \neq \int\limits_D \omega$.

20. Besitzen die folgenden 1-Formen eine Stammfunktion? Wenn ja, geben Sie eine an:

    (a) $\omega(x,y) = (x^2 + 2y)dx + (2x - y^2)dy$ auf $\mathbb{R}^2$;

    (b) $\nu(x,y) = x\log(y)dx + y\log(x)dy$ auf $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$;

    (c) $\mu(x,y,z) = (x+z)dx - (y+z)dy + (x-y)dz$ auf $\mathbb{R}^3$;

    (d) $\eta(x,y) = \left(-\frac{\tan(y)}{x^2} + 2xy + x^2\right) dx + \left(\frac{1}{x\cos^2(y)} + x^2 + y^2\right) dy$ auf $\mathbb{R}^2$.

21. Es sei $T = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. Die *Mercator-Projektion* $\mu : T \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mu(s,\varphi) = \frac{1}{\cosh(s)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \sinh(s) \end{pmatrix}.$$

    (a) Welches Stück von S^2 wird durch $\mu(T)$ beschrieben? Ermitteln Sie, ob μ eine lokale Parametrisierung von $\mu(T)$ liefert.

    (b) Der Winkel φ entspricht der geographischen Länge. Wie ist der Zusammenhang zwischen dem Parameter s und der geographischen Breite?

22. Sei $D = \mathbb{R} \times (0,\pi) \times (0,\pi)$ und

$$f : D \to \mathbb{R}^4, f(u,v,w) = (\sin(u)\sin(v)\sin(w), \cos(u)\sin(v)\sin(w), \cos(v)\sin(w), \cos(w)).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(D) \subseteq S^3$;

(b) Ermitteln Sie, ob f eine lokale Parametrisierung von $f(D)$ liefert.

23. Stellen Sie den Torus als Niveaumenge zu einem regulärem Wert einer stetig differezierbaren Funktion dar. Schließen Sie daraus, dass es sich um eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt.

24. (a) Es sei Z der Mantel des Kreiszylinders mit Radius $r > 0$ um die z-Achse. Stellen Sie Z als Rotationsfläche dar. Zeigen Sie, dass Z eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, indem Sie Z als Nullstellenmenge einer geeigneten stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ schreiben. Kann Z als Nullstelenmenge der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = 2r(x^2 + y^2 - r^2) + \sin(r(x^2 + y^2 - r^2))$, geschrieben werden?

    (b) Es sei $\alpha : (0, 3) \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) := \left(2 + \sin\left(\frac{3\pi}{4-t}\right), t\right)$, die als Kurve in der $x-z$-Ebene aufgefasst wird. M sei die durch Rotation um die z-Achse daraus entstehende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Schreiben Sie M auch als Nullstellenmenge einer geeigneten stetig differenzierbaren Funktion, deren Gradient auf Z nicht verschwindet. Stellen Sie α und M (z.B. in `Mathematica`) graphisch dar.

25. Klären Sie für folgende Spezialfälle von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, ob es sich um Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ handelt und welche Dimension diese haben:

    (a) U eine offene Teilmenge;

    (b) V ein Untervektorraum der Dimension k.

26. (a) Geben Sie eine Formel für einen Normalvektor an den Torus in einem beliebigen Punkt desselben an.

    (b) Sei M die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit aus Übungsbeispiel 24(b). Geben Sie eine Basis der Tangentialebene und einen Normalvektor an M in einem Punkt $a \in M$ an.

27. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph von f.

    (a) Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und bestimmen Sie ihre Dimension.

    (b) Geben Sie eine Basis des Tangentialraumes und des Normalraumes an M in einem Punkt $(x, f(x))$ an.

28. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y)^2} d(x,y) \quad \text{(b)} \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\cos(y)}{1+\sin(x)\sin(y)} d(x,y) \quad \text{(c)} \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2]} x^2 y \cos(xy^2) d(x,y).$$

29. Sei $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

    Zeigen Sie, dass die iterierten Integrale $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy$ existieren aber nicht gleich sind. Warum widerspricht es nicht dem Satz von Fubini?

30. Für $y > 0$ sei $g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y}$.

    (a) Finden Sie einen expliziten Ausdruck für $g(y)$ und $g'(y)$.

    (b) Fassen Sie andererseits $g(y)$ als Parameterintegral auf und zeigen Sie, dass g stetig differenzierbar ist. Wie lautet die Ableitung $g'(y)$ als Parameterintegral?

(c) Berechnen Sie:

$$\int_{[0,1]\times[1,3]} \frac{1}{(x^2+y)^3} d(x,y).$$

31. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = (x-y^2)\exp(z)$.

    (a) Berechnen Sie $I := \int_{[0,1]^3} f(x,y,z)d(x,y,z)$.

    (b) Seien a, b und c positive Zahlen und $Q := [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$. Berechnen Sie $\int_Q f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) d(x,y,z)$ und vergleichen Sie den Wert mit I.

32. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-\|x\|^2}, & \text{falls } \|x\| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Begründen Sie, warum $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx$.

33. Geben Sie eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die folgende Bedingungen erfüllt:

    (a) $\operatorname{supp}(g) \subseteq \overline{B_1(0)}$ (insbesondere gilt also $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$);

    (b) für alle $u \in \mathbb{R}^2$ gilt $0 \leq g(u) \leq 1$;

    (c) $g(u) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| \leq \frac{1}{2}$.

Skizzieren Sie die Funktion g und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} g(u)du$.

34. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Menge.

    (a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ so existiert, dass $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in K$.

    (b) Sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$. Zeigen Sie, dass

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right| \leq C\|f\|_\infty,$$

    wobei die Konstante $C \geq 0$ nur von K und φ abhängt.

35. Zeigen Sie, dass der Differentialoperator $H := -\Delta$ folgende Positivitätseigenschaft erfüllt:

$$\langle Hf|f\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} (Hf)(x)f(x)dx \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Überdies gilt $\langle Hf|f\rangle_{L^2} = 0$ genau dann, wenn f die Nullfunktion ist.

36. (a) Wie sieht die Transformationsformel für Integrale von Funktionen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ im Spezialfall eines affin linearen Diffeomorphismus aus? Was erhalten wir in den noch spezielleren Fällen einer orthogonalen Transformation oder einer skalaren Multiplikation?

    (b) Geben Sie eine entsprechende Formel für Integrale an mittels der Kugelkoordinatentransformation (s. Übungsbeispiel 6).

37. Es bezeichne $U_{-\pi} = (0,+\infty)\times(-\pi,\pi), V_{-\pi} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$ und $\Phi : U_{-\pi} \to V_{-\pi}$ die Polarkoordinatentransformation $\Phi(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Eine Funktion $w : V_{-\pi} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt konstruiert:

$$w(x) = g(\|x\|)\cdot h\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right),$$

für $g \in \mathcal{C}_c((0,+\infty))$ und $h \in \mathcal{C}_c((-1,+\infty))$.

    (a) Begründen Sie, warum w wohldefiniert ist, kompakten Träger in $V_{-\pi}$ hat und stetig ist.

    (b) Welchen Ausdruck erhalten Sie für $\int_{V_{-\pi}} w(x)dx$ nach Transformation auf Polarkoordinaten?

38. Sei
$$\Phi : B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\det D\Phi|$.

(c) Sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Verwandeln Sie $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$ mittels Φ in ein Integral über die offene Einheitskugel.

Hinweis. Sie können das folgende Resultat verwenden: Für eine invertierbare $n \times n$ Matrix A und $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\det(A + uv^T) = (1 + v^T A^{-1} u)\det(A).$$

In diesem Fall, beweisen Sie diese Aussage.

39. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann unterhalbstetig in x_0 ist, wenn für jede Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x^k \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt
$$\liminf_{k\to\infty} f(x^k) = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} f(x^k) \geq f(x_0).$$

(b) Sei $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann unterhalbstetig in x_0 ist, wenn gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass
$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x - x_0\| < \delta.$$

40. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist unterhalbstetig;

(b) der *Epigraph* $\operatorname{epi}(f) := \{(x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq c\}$ der Funktion f ist abgeschlossen;

(c) die Menge $f^{-1}((-\infty, c])) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen.

41. Es sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2-\|x\|^2}}, & \text{falls } \|x\| < a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f unterhalbstetig ist.

(b) Konstruieren Sie für den Fall $n = 1$ explizit eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, die punktweise monoton wachsend gegen f konvergiert.

(c) Ebenfalls für $n = 1$: zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx$ gleich dem uneigentlichen Riemann-Integral $\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ ist.

42. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x, y) = 4 - x^2$, $B = [0, 2] \times [0, 6] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f = g \cdot 1_B$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^2)$ une berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)d(x, y)$.

43. Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ so, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ gilt und
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k,\in\mathbb{N},k\to\infty} \int_{[-k,k]^n} f(x)dx,$$
wobei $+\infty$ als Grenzwert zugelassen wird.

(b) Zeigen Sie, dass
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]^n} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\overline{B_R(0)}} f(x)dx.$$

44. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{falls } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist, aber f weder unterhalbstetig noch oberhalbstetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die iterierten Riemann-Integrale $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy$ existieren, aber nicht gleich sind.

45. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(z) = \exp(-\|z\|^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ und drücken Sie $\int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz$ mittels eindimensionaler uneigentlicher Riemann-Integrale aus.

(b) Zeigen Sie, dass $e^{-t^2} \le e^{\frac{1}{4}-t}$ $\forall t \ge 0$ und folgern Sie daraus mittels (a), dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2} dz \le 2^n e^{\frac{n}{4}}.$$

46. Es sei $R > 0$ und $\overline{B_R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Führen Sie im Integral $\int_{\overline{B_R}} e^{-x^2-y^2} d(x,y)$ Polarkoordinaten ein und berechnen Sie den Limes für $R \to \infty$. Leiten Sie daraus den Wert von $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$ und weiter den von $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2} dz$ für $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$, her.

47. Es bezeichne P jene kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die von dem Parallelogramm mit den Eckpunkten $(1,1), (3,2), (4,5)$ und $(2,4)$ begrenzt wird. Finden Sie den affin linearen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ auf P abbildet. Verwenden Sie Φ als Koordinatentransformation zur Berechnung des Integrals $\int_P \exp(x-y) d(x,y)$.

48. (a) Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \|x\|^2}, & \text{falls } \|x\| \le 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mittels Transformation auf Polarkoordinaten.

(b) Es seien $a, b > 0$ und $\Psi(r,\varphi) = (ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi))$ für $(r,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. Beschreiben Sie die Menge $E := \Psi([0,1] \times [0,2\pi])$ mittels kartesischen Koordinaten $(x,y) = \Psi(r,\varphi)$. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} 1_E(x,y) d(x,y)$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

49. Berechnen Sie:

(a) $\int_D \left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) d(x,y)$, wobei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \le 0, x \ge 0\}$;

(b) $\int_D \ln(1 + x^2 + y^2) d(x,y)$, wobei D durch die Kurven

$$x^2 + y^2 = e^2, y = x\sqrt{3}, x = y\sqrt{3}, x \ge 0$$

begrenzt wird.

50. Für $0 \le R_1 \le R_2$ und $a \in (0, R_1) \cup (R_2, +\infty)$, sei $B = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : R_1 \le \|\xi\| \le R_2\}$ und $\eta = (0,0,a)$. Berechnen Sie

$$\int_B \frac{1}{\|\xi - \eta\|} d\xi.$$

51. (a) Berechnen Sie das Volumen jener Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die unterhalb des Rotationsparaboloids $z = 1 - (x^2 + y^2)$ und oberhalb der xy-Ebene liegt.

(b) Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge des $\mathbb{R}^4$:

$$K := \{(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : t - x^2 - y^2 - z^2 \ge 0, 0 \le t \le 1\}.$$

52. Welches Volumen hat die kompakte Menge im $\mathbb{R}^3$, die entsteht, indem der ellyptische (Voll-) Zylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2 \leq 1\}$ durch die Ebenene $z=0$ und $z=x+y+2$ abgeschnitten wird?

53. (a) Es sei $\rho : [0,2\pi] \to [0,+\infty)$ eine stetige Funktion, $\Phi : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(r,\phi) = r(\cos(\phi), \sin(\phi))$, die Polarkoordinatenabbildung und $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$ beliebige Randwinkel. Veranschaulichen Sie die Menge

$$\Phi(K) \quad \text{mit} \quad K = \{(r,t) : \phi_1 \leq t \leq \phi_2, 0 \leq r \leq \rho(t)\}$$

und leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt von $\Phi(K)$ her.

(b) Berechnen Sie die Fläche jenes kompakten Bereiches im $\mathbb{R}^2$, der von der Lemniskate $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ begrenzt wird ($a>0$).

54. (a) Seien $a<b$ und $g_1, g_2 : [a,b] \to [0,+\infty)$ stetige Funktionen mit $g_1 \leq g_2$. Zeigen Sie, dass das Volumen des Rotationskörpers (mit der z-Achse als Drehachse)

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a,b], g_1(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq g_2(z)\}$$

gegeben ist durch

$$\pi \int_a^b (g_2(z)^2 - g_1(z)^2)dz.$$

(b) Es sei $0<r<R$. Wenden Sie das Resultat aus (a) an, um das Volumen jenes Torus zu bestimmen, der durch Rotation einer vertikal gelegenen Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunktabstand R von der ebenfalls vertikalen Rotationsachse entsteht.

55. (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kreisscheibe um 0 in $\mathbb{R}^2$ und das Volumen der Kugel um 0 in $\mathbb{R}^3$ jeweils mit Radius $R>0$ direkt under Verwendung von Polar- bzw. Kugelkoordinaten.

(b) Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ das Ellipsoid beschrieben durch die Ungleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a,b,c>0$). Verallgemeinern Sie die Kugeltransformation passend, um das Volumen dieses Ellipsoids zu berechnen. Wie lässt sich alternativ dazu die Berechnung durch eine einfache Transformation auf das Kugelvolumen zurückführen?

56. Es sei H die abgeschlossene obere Halbkugel mit Radius 4 um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ und Z der senkrechte Zylinder über der waagerechten Kreisfläche mit Radius 2 um den Mittelpunkt $(2,0,0)$. Berechnen Sie das Volumen von $H \cap Z$.

57. Berechnen Sie den Flächeninhalt des kompakten Flächenstückes des Paraboloids $z=x^2+y^2$ zwischen den Ebenen $z=0$ und $z=4$.

58. (a) Es sei $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der kompakten Rotationsfläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = f(z)^2, z \in [a,b]\}$$

gegeben ist durch

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}dz.$$

(b) Berechnen Sie die Mantelfläche eines Kreiskegels vom Radius $R>0$ und Höhe $h>0$.

59. Es sei $0<r<R$. Berechnen Sie den Inhalt der Torusfläche, die durch Rotation einer vertikal gelegenen Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunktabstand R von der ebenfalls vertikalen Rotationsachse entsteht, auf zwei Arten:

(a) durch Reduktion auf die vorige Aufgabe;

(b) mit Hilfe der Parametrisierung

$$\Phi : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \Phi(s,t) = \begin{pmatrix} (R+r\cos(t))\cos(s) \\ (R+r\cos(t))\sin(s) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

60. (Vivianisches Fenster) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers $H \cap Z$ aus der Aufgabe 56.

61. Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ ein injektiver regulärer Weg. Weiters sei $[a, b] \subseteq J$. Was ergibt sich als 1-dimensionaler Flächeninhalt des kompakten Kurvenstückes $\gamma([a, b])$?

62. (a) Definiert die Determinante eine Linearform (lineare Abbildung) auf dem Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen?

    (b) Für Vektoren $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $(v_1 \cdots v_n)$ die reelle $n \times n$-Matrix mit den Spaltenvektoren $v_1, ..., v_n$. Ist die Abbildung $\Delta : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \Delta(v_1, ..., v_n) = \det(v_1 \cdots v_n)$ eine alternierende n-Form auf $\mathbb{R}^n$?

    (c) Es seine $A_1, ..., A_n$ beliebige reelle $n \times n$-Matrizen. Wird durch die Zuordnung $(v_1, ..., v_n) \mapsto \Delta(A_1 \cdot v_1, ..., A_n \cdot v_n)$ eine Multilinearform auf $\mathbb{R}^n$ definiert? Ist sie für jede Wahl von $A_1, ..., A_n$ alternierend?

63. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Welche Dimension ergibt sich für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\bigwedge^j V^*$ jeweils für $j = 1, 2, 3$? Geben Sie konkrete Basen für jeden Fall an. Was passiert bei $\bigwedge^4 V^*$?

64. Es sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3 und der dazu dualen Basis e_1^*, e_2^*, e_3^* von V^*. Die 2-Formen $\omega_1 = e_2^* \wedge e_3^*$, $\omega_2 = e_3^* \wedge e_1^*$, $\omega_3 = e_1^* \wedge e_2^*$ definieren eine Basis von $\bigwedge^2 V^*$. Es seien $a = \sum_{j=1}^3 a_j e_j$ und $b = \sum_{j=1}^3 b_j e_j$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $a^* = \sum_{j=1}^3 a_j e_j^*$ bzw. $b^* = \sum_{j=1}^3 b_j e_j^*$ seien die *dazu dualen 1-Formen*. Zeigen Sie, dass

$$a^* \wedge b^* = \sum_{j=1}^{3} (a \times b)_j \omega_j.$$

65. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = ye^x$, und die Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$

$$\omega = e^{-z} dx \wedge dy + x dy \wedge dz, \;\; \mu = \sin(xy) dx \wedge dz + y dy \wedge dz, \;\; \sigma = e^{y+z} dx + \cos(xz) dy + dz.$$

Diskutieren Sie, welche der folgenden Operationen sinnvoll sind und berechnen Sie für die sich ergebenden Differentialformen die eindeutige Darstellung als Linearkombination von Basisvektoren der entsprechenden Vektorräume von Multiformen:

(i) $\omega + \mu, \omega + \sigma, f\omega, f \wedge \sigma$;

(ii) $\omega \wedge \sigma, \omega \wedge \mu, (df - \sigma) \wedge \omega$;

(iii) $d(d\sigma), d\sigma - \mu, d(\mu + d\sigma), d(\mu + \omega)$;

(iv) $d(f\omega), d(\sigma \wedge df), d\mu - \sigma$.

66. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und folgende Differentialformen auf U gegeben:

$$\sigma_1 = dx, \sigma_2 = dy, \sigma_3 = dz$$

$$\omega_1 = dy \wedge dz, \omega_2 = dz \wedge dx, \omega_3 = dx \wedge dy$$

$$\nu = dx \wedge dy \wedge dz.$$

(i) Zeigen Sie, dass jede $\mathcal{C}^1$ 1-Form α auf U eine eindeutige Darstellung $\alpha = \sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j$ hat, wobei $a = (a_1, a_2, a_3) : U \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$ Vektorfeld ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jede $\mathcal{C}^1$ 2-Form β auf U eine eindeutige Darstellung $\beta = \sum_{j=1}^3 b_j \omega_j$ hat, wobei $b = (b_1, b_2, b_3) : U \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$ Vektorfeld ist.

(iii) Zeigen Sie, dass jede $\mathcal{C}^1$ 3-Form γ auf U eine eindeutige Darstellung $\gamma = g \cdot \nu$ hat, wobei $g : U \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$ Funktion ist.

67. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$ Funktion und es gelten die Bezeichnungen von Aufgabe 66. Zeigen Sie:

$$df = \alpha \Leftrightarrow a = \mathrm{grad} f$$

$$d\alpha = \beta \Leftrightarrow b = \mathrm{rot} a$$

$$d\beta = \gamma \Leftrightarrow g = \mathrm{div} b.$$

68. Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus Aufgabe 66.

(a) Bestimmen Sie Koeffizientenfunktionen $f_j, j = 1, 2, 3$, auf $V = \Phi^{-1}(U)$ derart, dass

$$\Phi^*\alpha = f_1 dr + f_2 d\varphi + f_3 d\theta$$

gilt.

(b) Finden Sie Koeffizientenfunktionen $h_j, j = 1, 2, 3$, die

$$\Phi^*\beta = h_1 d\varphi \wedge d\theta + h_2 d\theta \wedge dr + h_3 dr \wedge d\varphi$$

leisten.

69. Es sei $\omega = 2xzdy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist. Ist ω auch exakt? Können Sie eine 1-Form η angeben, für die $d\eta = \omega$ gilt?

70. Sei $U = (0, +\infty)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ und die n-Form auf U gegeben durch

$$\omega = \frac{x_1 \exp(x_3 + ... + x_n)}{x_1^2 + x_2} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Berechnen Sie $\int_K \omega$, wobei $K = [1, 2]^n$.

71. Es seien die offenen Teilmengen $U = (0, 3) \times (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ und $V = B_3(0) \cap (0, +\infty)^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ sowie $\Phi : U \to V$,

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

gegeben. Weiters sein $\kappa : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \kappa(a, b, c) = (a, c, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl Φ als auch $\tilde{\Phi} = \Phi \circ (\kappa|_U)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen U und V ist. Welcher der beiden Diffeomorphismen ist orientierungstreu bezüglich der Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$?

(b) Es sei $K = [1, 2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ und $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Berechnen Sie

$$\int_{\Phi(K)} \omega, \int_{\tilde{\Phi}(K)} \omega \text{ und } \int_K \Phi^*\omega.$$

72. (a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wie legen Sie auf der 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit I von $\mathbb{R}$ eine Orientierung fest?

(b) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Orientierungen auf S^1 als eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ mit dem Duchlaufsinn von S^1 als orientierte reguläre Kurve. Geben Sie auch passende (stetige) Einheits-Normalenfelder an.

73. Bestimmen Sie jeweils ein Einheits-Normalenfeld an die gegebenen Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$:

(a) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1, y^2 + z^2 = 1\}$;

(b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$.

74. Bestimmen Sie jeweils ein Einheits-Normalenfeld an die gegebenen Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$:

(a) $S = \{(s\cos(t), s\sin(t), t) \in \mathbb{R}^3 : 1 < s < 2, 0 < t < 4\pi\}$;

(b) $H = \{(f(s)\cos(t), s, f(s)\sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : a < s < b, 0 < t < \pi\}$, wobei $f \in \mathcal{C}^1((a,b)), f > 0$.

75. Berechnen Sie
$$\int_{S^2} \big((x+z)dy \wedge dz + xdz \wedge dx + ydx \wedge dy\big),$$
wobei S^2 gemäß der äußeren Normalen positiv orientiert sein soll.

76. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U)$ mit der Eigenschaft, dass $f(x,y,z) = 0$ stets $\mathrm{grad} f(x,y,z) \neq 0$ impliziert. Somit definiert $M = \{(x,y,z) \in U : f(x,y,z) = 0\}$ eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt einer kompakten Teilmenge $K \subseteq M$ als Integral $\int_K \omega$ geschrieben werden kann, wobei ω eine passend aus $\mathrm{grad} f$ gebildete 2-Form ist.

77. Es sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ und $K = \{(x,y,z) \in M : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Begründen Sie, warum M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und K kompakt (als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ sowie relativ M) ist. M sei so orientiert, dass im Koordinatenursprung der Vektor $(0,0,1)$ als positiv orientierter Einheits-Normalenvektor dienen kann. Berechnen Sie
$$\int_K \Big(3zdy \wedge dz + (x^2+y^2)dz \wedge dx + xzdx \wedge dy\Big).$$

78. Es seien $f, g, h \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$ beliebig. Zeigen Sie:
$$\int\limits_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^2} \operatorname{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} (x,y,z) d(x,y,z) = \int\limits_{\{0\}\times\mathbb{R}^2} f dS,$$
wobei die Integrale über den Durchschnitt des jeweiligen Trägers des Integranden mit den angegebenen Integrationsbereichen zu nehmen sind.

79. Diskutieren Sie in den folgenden Beispielen jeweils, ob es sich bei den gegebenen Teilmengen um Kompakta K mit glattem Rand ∂K in einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ handelt. Sie dürfen anschaulich an Hand von Skizzen argumentieren. Geben Sie in allen Fällen k und n an und beschreiben Sie die Teilmenge ∂K (als Rand von K relativ M) präzise:

(a) $M = (-2,2)^3 \subseteq \mathbb{R}^3, K = \overline{B_1(0)}$;

(b) $M = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2, K = \{(x,y) \in S^1 : y \geq \frac{1}{2}\}$;

(c) $M = (-2,2)^2 \subseteq \mathbb{R}^2, K = [0,1]^2$;

(d) $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, K = \{(x,y,z) \in S^2 : z \geq 0\}$;

(e) $M = \mathbb{R}^3, K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Illustrieren Sie für die als Kompakta mit glattem Rand erkannten Beispiele jeweils eine Orientierung von M sowie die dadurch induzierte Orientierung auf dem Rand von K an Hand von Skizzen mit typischen Tangential- und Normalvektoren an einzelnen Punkten.

80. Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz^2 \\ x^2y - z^3 \\ 2xy + y^2z \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Flächenintegral
$$\int\limits_{S^2} \left\langle v(x,y,z) \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dS.$$

(b) Für $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\} \subseteq S^2$ berechnen Sie das Integral

$$\int_B \left\langle \mathrm{rot} v(x,y,z) \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dS.$$

81. Berechnen Sie direkt und mittels dem Stoke'schen Integralsatz das Kurvenintegral

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

wobei C die Schnittkurve des Zylinders $x^2+y^2=1$ mit der Ebene $x+y+z=1$ ist.

82. Berechnen Sie mittels dem Stoke'schen Integralsatz die folgenden Integrale:

(a) $\int_\Gamma y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz$, wobei $\Gamma : z^2 = x^2+y^2, x^2+y^2 = 2x$;
(b) $\int_\Gamma 2zdx - xdy + xdz$, wobei $\Gamma : z = y+1, x^2+y^2 = 1$.

83. Es sei $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\right\}$ und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $w(x,y,z) = (3x^2z, y^2 - 2x, z^3)$. Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \langle w|\nu\rangle dS,$$

wobei ν das äußere Einheits-Normalenfeld auf ∂K ist.

84. Berechnen Sie mittels dem Satz von Gauss-Ostrogradski die folgenden Integrale:

(a) $\int_\Sigma yzdy \wedge dz - (x+z)dz \wedge dx + (x^2+y^2+3z)dx \wedge dy$, wobei $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4-2z, z \geq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4-2z, z=1\}$;
(b) $\int_\Sigma x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy$, wobei $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2, 0 \leq z < 1\}$.

85. Berechnen Sie mittels der Green-Riemannschen Formel die folgenden Integrale:

(a) $\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-ydx + xdy)$, wobei $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$;
(b) $\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$, wobei $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

86. (Greensche Formel) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $K \subseteq U$ eine kompakte Menge mit glattem Rand bezüglich der 3-dimensionalen Untermannigfaltigkeit U. Somit ist ∂K eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und die von U induzierte Orientierung legt darauf ein eindeutiges positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld ν fest. Wir definieren die *Normalableitung* einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $y \in \partial K$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) = \langle \mathrm{grad} f(y)|\nu(y)\rangle.$$

Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in \mathcal{C}^2(U)$ gilt:

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f) = \int_{\partial K} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\right) dS.$$

87. Sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, V(x,y,z) = (x^2+y-4, 3xy, 2xz+z^2)$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathrm{rot}(V)$ durch die Fläche

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 16, z \geq 0\},$$

die positiv orientiert bezüglich dem äußeren Einheits-Normalenfeld ist.

88. Sei Γ der Durchschnitt des Würfels $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ mit der Ebene $x+y+z=\frac{3}{2}$. Berechnen Sie direkt und mittels dem Stoke'schen Integralsatz

$$\int_\Gamma (y^2-x^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz.$$

89. Sei Σ die Randfläche der Pyramide, die durch die Ebenen $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a$. Berechnen Sie

$$\int_\Sigma xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy.$$

90. (a) Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2, \gamma(t)=(x(t),y(t))$, ein geschlossener stückweise regulärer Weg mit der Eigenschaft, dass die von diesem Weg erzeugte Kurve entgegen dem Uhrzeigersinn duchlaufen wird und eine kompakte Menge K umschließt. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt von K gleich

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t)-x'(t)y(t))dt$$

ist.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der durch die geschlossene Kurve $\Gamma: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ begrenzten Fläche.

91. Sei $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \omega(x,y)=e^x\cos(y)dx-e^x\sin(y)dy$, und $\Gamma\subseteq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\geq 0\}$ eine beliebige stückweise reguläre Kurve, die die Punkte $A(1,0)$ und $B(-1,0)$ verbindet und von A nach B durchlaufen wird. Berechnen Sie $\int_\Gamma \omega$.

92. (Gauß'sches Gesetz) Sei $q>0$, $V:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, V(x)=\frac{q}{4\pi\|x\|}$, und $E=-\text{grad}V$.

(a) Zeigen Sie, dass $\text{div}E=0$.

(b) Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes E durch jede geschlossene Fläche, die einen Körper begrenzt, der im Inneren nicht den Ursprung enthält, gleich 0 ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes E durch jede geschlossene Fläche, die einen Körper begrenzt, der im Inneren den Ursprung enthält, gleich q ist.