

$V$  Vektorraum (über  $K$ ),  $\dim V = n$

$v_i \in V$ , ( $i = 1, \dots, n$ )

Basis  $B = \{b_i \mid i = 1, \dots, n\}$  von  $V$

(Definition)

Die (eindeutig bestimmte)

schiefsymmetrische multilineare Abbildung

$\det_B: V^n \rightarrow K$  mit  $\det_B(b_1, \dots, b_n) = 1$  (Normierung)

heißt Determinante

(von  $n$  Vektoren bezüglich  $B$ )

Die **Determinante**  $\det A$  einer quadratischen  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  ist die Determinante der  $n$  Spaltenvektoren (oder äquivalent: Zeilenvektoren) bezüglich der Spalten (bzw. Zeilen) der Einheitsmatrix.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) &= 0, \text{ falls } v_i = 0 && \text{für ein } i \\ &= 0, \text{ falls } v_i = v_j && \text{für zwei } i \neq j \\ &= \det(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) && \text{falls } v'_i = v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j \end{aligned}$$

(1) explizit:

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

(Spezialfall)  $n = 3$

(Regel von Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{aligned}$$

(2) rekursiv:

Entwicklung nach einer Zeile (oder Spalte)

$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) =$

nach der  $i$ -ten Zeile

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$A_{ij}$  ist jene  $((n-1) \times (n-1))$ -Matrix, die aus

$A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte entsteht.

(3) durch Umformung

bis auf Diagonalform

$$\det(\dots, v_i, \dots) = \det(\dots, v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j, \dots)$$

mittels Spalten- und Zeilenoperationen

(4) praktisch:

geschickte Kombination von (1)-(3)

$$\begin{aligned}
\det(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \text{wegen Multilinearität} \Rightarrow \\
&= \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, v_2, \dots, v_n\right) = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \det(e_{i_1}, v_2, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \det\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} e_{i_2}, v_3, \dots, v_n\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \left(\sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, v_3, \dots, v_n)\right) \\
&= \dots = \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, v_3, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_{n-1} n-1} \det\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-1}}, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_{n-1} n-1} \left(\sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-1}}, e_{i_n}) \\
\text{wegen} & \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 \text{ falls zwei Indices gleich} \Rightarrow \\
\text{somit} & \text{Summe nur über alle Permutationen} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
\text{oder äquivalent} & \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
\text{und schließlich} & \text{schiefsymmetrisch und Normierung} \Rightarrow \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$