Gegeben: r lineare Gleichungssysteme

$$Ax = b_k, k = 1, \ldots, r$$

(mit derselben Koeffizientenmatrix) m Gleichungen, n Unbekannte

$$A = (a_{ij}),\ b_k = (b_{ik}),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Setze: $A_0 := (A|B) = (a_{ij}),\ j = 1, \ldots, n + r$ erweiterte Matrix

$$a_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & j = 1, \ldots, n \\ b_{ik} & j = n + k, k = 1, \ldots, r \end{cases}$$

$$N := n + r$$ *(zur Abkürzung)*

Gaußsches Eliminationsverfahren

Setze	$I := 1,\ J := 1$	Anfangswerte
Iteration bis	$I > m \vee J > n$	Abbruchsbedingung
Resultat:		Zeilenstufenform

Iterationsschritt:

1. Fall: $a_{IJ} \neq 0$ $\quad a_{Ij} := \dfrac{a_{Ij}}{a_{IJ}}$ für $j = J, \ldots, N$ ergibt: $a_{IJ} = 1$

für $i = I+1, \ldots, m$: ergibt: $a_{iJ} = 0$

$a_{ij} := a_{ij} - a_{iJ} a_{Ij}$ für $j = J, \ldots, N$

$I := I + 1$ nächste Zeile

$J := J + 1$ nächste Spalte

2. Fall: $a_{IJ} = 0$:

(a) $a_{i_0 J} \neq 0$ mit $i_0 > I$: vertausche die Zeilen I und i_0

$(a_{Ij}, a_{i_0 j}) := (a_{i_0 j}, a_{Ij})$ für $j = J, \ldots, N$

(b) $a_{iJ} = 0$ für $i = I, \ldots, m$: $\quad J := J + 1$ nächste Spalte

Abbruchbedingung: $I > m$ letzte Zeile

oder $J > n$ letzte Unbekannte

Resultat: Gleichungssysteme **äquivalent** zu den Ausgangssystemen

$$A_0 = (a_{ij}) =: (A|B) \qquad \text{erweiterte Matrix}$$

$$A = (a_{ij}),\ j = 1, \ldots, n \text{ und } b_{ik} = (a_{i(n+k)}),\ k = 1, \ldots, r$$

wobei **Zeilenstufenform**

$$a_{ij} = 0 \text{ für } j < j_i \qquad i = 1, \ldots, I$$

$$a_{ij_i} = 1 \qquad i = 1, \ldots, I$$

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{für } i > I \wedge j \leq J$$

Lösungen von $Ax = b_k$:

Ist $b_{ik} \neq 0$ für ein $i > I$ $\Rightarrow Ax = b_k$ ist **nicht** lösbar

Andernfalls: rekursives Bestimmen der Lösungen x_j

$$x_{j_i} := b_{ik} - \sum_{j=(j_i+1)}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = I, \ldots, 1$$

Bemerkung:

ist j keines der j_i, so tritt x_j als freier Parameter auf