(Tippfehler wurden korrigiert)

(1) *(Matrizen)*
(a) Zeige (an einem Beispiel): Das Produkt von Matrizen ist nicht kommutativ.
(b) Zeige (allgemein): Das Produkt von Matrizen ist assoziativ.
oder *(einfacher)*
(b') Zeige: Das Produkt von (2×2)-Matrizen ist assoziativ.
(c) Bilden die quadratischen $(n \times n)$-Matrizen eine Gruppe
bezüglich der Addition bzw. bezüglich der Multiplikation? Warum?

(2) *(Lineare Gleichungssysteme)*
(a) Beschreibe das Gaußsche Eliminationsverfahren anhand folgenden Beispiels:

Löse $Ax = b$ und $Ax = c$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Bestimme den Kern und das Image der durch $y = Ax$ definierten Abbildung.
Wie hängt das mit (a) zusammen?
(c) Stelle Gleichungen auf, mit denen folgende Aufgabe gelöst werden kann:
Gegeben sind drei Punkte P, Q, R im Raum und eine Richtung v.
Finde das Bild des Punktes X bei Projektion parallel zu v
auf die durch P, Q und R bestimmte Ebene.

(3) *(Basis)*
(a) Definiere: Basis eines Vektorraums.
(b) Erkläre die Bedeutung des Basisbegriffs und
gib ein paar wichtige Eigenschaften und Charakterisierungen an.
(c-d) Gegeben sind sechs Vektoren im $\mathbb{R}^4$:
$(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$ und $(1,1,1,1)$
(c) Gib eine Teilmenge an, die eine Basis bildet (mit Begründung!).
(d) Gib Teilmengen mit 3,4, bzw. 5 Vektoren an,
die keine Basis bilden (mit Begründung!).

(4) *(Lineare Abbildungen)*
(a) Welcher der beiden folgenden Terme definiert
einen linearen Operator von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ (Warum?):
$\varphi_1(x, y, z) = (z - y, y - x + 2z, x)$ und $\varphi_2(x, y, z) = (z - y, y - x + 2, x)$.
Ermittle seine Darstellung bezüglich der Standardbasis.
(b) Gegeben sei die Basis $(-1, 1, -2), (1, 0, 1), (-1, 1, -1)$ im $\mathbb{R}^3$
Ermittle eine Matrizengleichung, die die Darstellung von linearen Operatoren
bezüglich der Standardbasis auf diese Basis umrechnet.

(5) *(Eigenwerte)*
(a) Definiere: Eigenwert und Eigenvektor eines Operators.
(b) Was versteht man unter „Diagonalisieren" einer Matrix?
Wann kann eine Matrix diagonalisiert werden? Wann nicht?
(c) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
(d) Was läßt sich daraus über die durch $y = Tx$ induzierte
Abbildung des Raumes (kartesische Koordinaten) ableiten?
(e) Ist T orthogonal, unitär, hermitisch? Warum?
(f) Kann T diagonalisiert werden (über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$)? Warum?