Name/Matrikelnummmer/Kennziffern:

Beachte: Bitte ordnen Sie die Lösungen übersichtlich an
und geben Sie auf **jedem** Blatt den Namen an!

(1) *(Matrizen)*

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne A^tA und AA^t.

(b) Was heißt: Die Matrix A ist zu B invers? (Bitte genau!)

(c) Finde die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und erkläre die Rechnung.

(2) *(Basis)*

(a) Definiere: Basis eines Vektorraums.

(b-c) Gegeben seien $(1,1,-1,0),(1,2,0,0),(1,3,1,0) \in \mathbb{R}^4$.

(b) Ermittle (falls möglich) die Darstellungen von $(0,3,3,0)$ als Linearkombination dieser Vektoren.

(c) Ermittle den von diesen Vektoren erzeugten Teilraum.

(d) Ergänze diese Vektoren (falls möglich) zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

(3) *(Determinante)*

(a) Definiere: Determinante einer Matrix.

(b) Gib einige Beispiele für die Bedeutung von Determinanten.

(c) Erläutere die Berechnung von Determinanten anhand der

Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(mindestens zwei verschiedene Methoden!).

(4) *(inneres Produkt)*

(a) Definiere: inneres Produkt.

(b) Wird durch $\langle x, y\rangle := x_1y_1 - x_1y_2$ ein inneres Produkt im $\mathbb{R}^2$ definiert? (Warum?)

(c) Erläutere den Gram-Schmidt-Algorithmus anhand von
$(1,0,0),(0,1,1),(i,1,0) \in \mathbb{C}^3$

(d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen innerem Produkt, Norm und Abstand?

(e) Formuliere und beweise den pythagoräischen Lehrsatz.

(5) *(Lineare Operatoren)*

(a) Definiere: Eigenwerte und Eigenvektoren eines linearen Operators.

(b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ist diese Matrix diagonalisierbar? (Warum?)

(c-d) Gegeben sei ein (fixiertes) kartesisches Koordinatensystem im
Raum (x, y, z-Achse). Es sei D_1 die Drehung um die x-Achse um 90 Grad,
und D_2 die Drehung um die z-Achse um 90 Grad.

(c) Ermittle die Matrix-Darstellungen von D_1 und D_2 (bezogen auf die Standardbasis).

(d) Welche Bewegung ergibt sich, wenn zuerst D_1 und dann D_2 ausgeübt wird?
Was läßt sich (ohne Rechnung) über die Eigenwerte und
Eigenvektoren der dazugehörigen Matrix aussagen?