Name/Matrikelnummmer/Kennziffern:

Beachte: Bitte ordnen Sie die Lösungen übersichtlich an
und geben Sie auf **jedem** Blatt den Namen an!

(1) *(Matrizen)*
(a) Definiere genau: inverse Matrix.
(b) Definiere (und erkläre) den Begriff Determinante.
Es sei $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
(c) Berechne $\det B$.
(d) Ist B invertierbar? Warum?

(2) *(Lineare Gleichungssysteme und Abbildungen)*
(a) Beschreibe und erkläre das Gaußsche Eliminationsverfahren
anhand folgenden Beispiels:
Löse $Ax = b$ und $Ax = c$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$
(b) Definiere die Begriffe Kern und Bild,
und ermittle Kern und Bild der durch $f(x) = Ax$ definierten Abbildung.
(c) Wie ändert sich die Darstellung von f bei einem Basiswechsel?

(3) *(Vektorraum)*
(a) Definiere: Basis eines Vektorraums.
(b) Definiere die Begriffe Teilraum und direkte Summe.
(c) Ermittle den durch $(1, -1, 1, -1)$, $(1, 0, 0, -1)$, und $(1, 1, -1, -1)$
im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Teilraum W.
(d) Finde eine orthonormale Basis für W.
(e) Ergänze diese Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ und
ermittle das orthogonale Komplement von W.

(4) *(Lineare Operatoren)*
Es sei P_2 der Vektorraum aller Polynomfunktion bis zum Grad 2 auf dem Intervall $[1, -1]$.
(a) Zeige: Die durch $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$
definierten Funktionen bilden eine Basis von P_2.
(b) Zeige: Die durch $\phi(f, g) := \int_1^{-1} fg$ definierte Abbildung ist bilinear.
(c) Ermittle die Darstellung von ϕ bezüglich der Basis aus (a).

(5) *(Eigenwerte)*
(a) Definiere: Eigenwerte und Eigenvektoren eines linearen Operators.
(b) Was heißt: Eine Matrix ist diagonalisierbar?
(c) Was heißt: Ein Operator ist diagonalisierbar?
Welcher Zusammenhang besteht mit (b)?
(d) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ist diese Matrix diagonalisierbar? (Warum?)