Name/Matrikelnummer/Kennziffern:

Beachte: Bitte ordnen Sie die Lösungen übersichtlich an
und geben Sie auf **jedem** Blatt den Namen an!

(1) *(Matrizen)*
(a) Wann heißt eine Matrix *orthogonal*?
(b) Wo kommen orthogonale Matrizen vor? Welche Bedeutung haben sie?
(c) Rechne nach: Das Produkt von orthogonalen Matrizen ist orthogonal.

(2) *(Lineare Gleichungssysteme)*
(a) Löse $Ax = b$ und $Ax = c$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(b) Wie sieht die Menge der Lösungen eines (allgemeinen) Gleichungssystems aus?
(c) Beschreibe und erkläre das Gaußsche Eliminationsverfahren.
(d) Bestimme den Kern der durch $L(x) = Ax$ definierten Abbildung.
(e) Gehören b und c zum Bild von L? Warum?

(3) *(Determinante)*
(a) Definiere genau: Determinante einer Matrix.
(b) Wie kann man Determinanten berechnen?

(4) *(Basis)*
Es seien $b_1 = (1, 3), b_2 = (2, 5)$ Vektoren des $\mathbb{R}^2$.
(a) Definiere genau: Basis eines Vektorraums.
(b) Zeige genau (anhand der Definition!): $B = \{b_1, b_2\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$.
(c) Ist die durch $\phi(x, y) := xy$ eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^2$? Warum?
(d) Ermittle die Formeln für den Wechsel von der Standardbasis auf B (Koordinaten, linearer Operator). Erkläre die Formeln und die Rechnung!
(e) Stelle das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ bezüglich B dar.
(f) Was ist der Dualraum zu einem Vektorraum? Was ist die duale Basis?

(5) *(Eigenwerte)*
(a) Definiere: Eigenwerte und Eigenvektoren eines linearen Operators.
(b) Was bedeutet: Ein linearer Operator ist diagonalisierbar? Warum ist diese Eigenschaft interessant?
(c) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(d) Ist die Matrix T diagonalisierbar? (Warum?)