Name/Matrikelnummer/Kennziffern:

Beachte: Bitte ordnen Sie die Lösungen übersichtlich an
und geben Sie auf **jedem** Blatt den Namen an!

(1) *(Matrizen)*
  (a) Wann heißt eine Matrix *unitär*?
  (b) Wo kommen unitäre Matrizen vor? Welche Bedeutung haben sie?
  (c) Rechne nach: Das Produkt von unitären Matrizen ist unitär.

(2) *(Lineare Gleichungssysteme)*
  (a) Löse $Ax = b$ und $Ax = c$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  (b) Wie sieht die Menge der Lösungen eines (allgemeinen) linearen Gleichungssystems aus?
  (c) Beschreibe und erkläre das Gaußsche Eliminationsverfahren.

(3) *(Lineare Abbildungen)*
  (a) Definiere genau: lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.
  (b) Definiere und erkläre: Kern und Bild einer linearen Abbildung.
  (c) Bestimme den Kern der durch $L(x) = Ax$ definierten Abbildung.
  (d) Gehören b und c zum Bild von L?
  (e) Bestimme Kern und Bild des durch Projektion parallel zu v auf auf den Teilraum W gegebenen linearen Operators. (Mit Begründung!)
  (f) Formuliere den Austauschsatz von Steinitz.

(4) *(inneres Produkt)*
  (a) Definiere genau: inneres Produkt in einem Vektorraum (über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).
  (b) Zeige genau (anhand der Definition!):
    Durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)$ wird ein inneres Produkt für
    Funktionen der Form $ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) definiert.
  (c) Für das in (b) definierte innere Produkt:
    Wende das Gram-Schmidtsche Verfahren auf f, g, h
    (definiert durch $f(x) = 1, g(x) = x, h(x) = x^2$) an.

(5) *(Eigenwerte)*
  (a) Definiere: Eigenwerte und Eigenvektoren eines linearen Operators.
  (b) Was bedeutet: Ein linearer Operator ist diagonalisierbar?
  (c) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$.
  (d) Ist die Matrix T diagonalisierbar? (Warum?)