(Definition) (V, W Vektorräume über K)

Eine Funktion φ zwischen zwei Vektorräumen *(über demselben Körper)* ist **linear**, wenn sie mit der Vektorraumstruktur (*i.e.*, der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar) verträglich ist. *D.h.:* Für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $\lambda \in K$ gilt

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \text{ und } \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$$

$\varphi : V \to K$ lineare Abbildung

$\varphi : V \to W$ linearer Operator

Es gilt: Sind $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ linear und $\lambda \in K$ so sind auch $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda\varphi$ linear.

Daher: Die Menge $\mathcal{L}(V, W) \coloneqq \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ linear}\}$ aller linearen Funktionen von V nach W ist ein Vektorraum.

(Definition) Der Vektorraum $V^* \coloneqq \mathcal{L}(V, K)$ aller linearen Abbildungen auf einem Vektorraum V heißt **Dualraum** zu V.

Satz: Die Summe linearer Funktionen ist linear, *und* das Produkt einer linearen Funktion mit einem Skalar ist linear.

$(\varphi_1 + \varphi_2)(v + w) \coloneqq \varphi_1(v + w) + \varphi_2(v + w)$

φ_1, φ_2 linear $\Rightarrow$ $= (\varphi_1(v) + \varphi_1(w)) + (\varphi_2(v) + \varphi_2(w))$

$= (\varphi_1(v) + \varphi_2(v)) + (\varphi_1(w) + \varphi_2(w))$

$\eqqcolon (\varphi_1 + \varphi_2)(v) + (\varphi_1 + \varphi_2)(w) \qquad (\forall v, w)$

$(\varphi_1 + \varphi_2)(\lambda v) \coloneqq \varphi_1(\lambda v) + \varphi_2(\lambda v)$

φ_1, φ_2 linear $\Rightarrow$ $= \lambda\varphi_1(v) + \lambda\varphi_2(v) = \lambda(\varphi_1(v) + \varphi_2(v))$

$\eqqcolon \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)(v) \qquad (\forall v, \lambda)$

daher: $\varphi_1 + \varphi_2$ *ist* linear ■

$(\mu \cdot \varphi)(v + w) \coloneqq \mu(\varphi(v + w))$

φ linear $\Rightarrow$ $= \mu(\varphi(v) + \varphi(w)) = \mu(\varphi(v)) + \mu(\varphi(w))$

$\eqqcolon (\mu \cdot \varphi)(v) + (\mu \cdot \varphi)(w) \qquad (\forall v, w, \mu)$

$(\mu \cdot \varphi)(\lambda v) \coloneqq \mu(\varphi(\lambda v))$

φ linear $\Rightarrow$ $= \mu(\lambda\varphi(v)) = (\mu\lambda)\varphi(v) = (\lambda\mu)\varphi(v) = \lambda(\mu\varphi(v))$

$\eqqcolon \lambda(\mu \cdot \varphi)(v) \qquad (\forall v, \mu, \lambda)$

daher: $\mu \cdot \varphi$ *ist* linear ■