V_1, V_2, W Vektorräume (über K)

$\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ heißt **bilinear** (bezüglich K)

$:\Leftrightarrow$ $\varphi(\lambda v_1 + v_1', v_2) = \lambda\varphi(v_1, v_2) + (v_1', v_2)$

und $\varphi(v_1, \lambda v_2 + v_2') = \lambda\varphi(v_1, v_2) + (v_1, v_2')$

$(\forall v_1, v_1' \in V_1, v_2, v_2' \in V_2, \lambda \in K)$

d.h., φ ist linear in jeder der beiden Variablen

$V_i, i = 1, \ldots, n, W$ Vektorräume (über K)

$\varphi : \prod_{i=1}^n V_i \to W$ heißt **multilinear** (bezüglich K)

$:\Leftrightarrow$ $\varphi_{(v_1,\ldots,v_{i-1},\cdot,v_{i+1},\ldots,v_n)}(v_i) : V_i \to W$ für alle $i = 1, \ldots, n$

definiert durch $v_i \in V_i \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$

für alle *(fixen)* $v_j \in V_j,\ j \neq i$

eine lineare Funktion ist.

Man schreibt auch: $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n, W)$

$$\varphi_{(v_1,\ldots,v_{i-1},\cdot,v_{i+1},\ldots,v_n)}(v_i) = \varphi(v_1, \ldots, v_n)\big|_{v_i} = \big(f(v_1, \ldots, v_n)\big)_{v_i}$$

Bilinearform $\varphi : V \times W \to K$ $\quad\quad$ $\dim V = m,\ \dim W = n$ (über K)

Basis $B = \{b_i \mid i = 1, \dots, m\}$ *von* V $\quad\quad$ $V \ni v = \sum_{i=1}^{m} v_i b_i$

Basis $C = \{c_j \mid j = 1, \dots, n\}$ *von* W $\quad\quad$ $W \ni w = \sum_{j=1}^{n} w_j c_j$

---

es ist

$$\varphi(v,w) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} v_i b_i, w\Big) = \sum_{i=1}^{m} v_i \varphi(b_i, w) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} v_i \varphi\Big(b_i, \sum_{j=1}^{n} w_j c_j\Big) = \sum_{i=1}^{m} v_i \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j \varphi(b_i, c_j)\Big) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(b_i, c_j) v_i w_j$$

mit $\quad [\varphi]_{B,C} \coloneqq (\varphi(b_i, c_j)) \in \mathrm{M}_{m,n}$

wird $\quad \varphi(v,w) = [v]_B^t [\varphi]_{B,C} [w]_C$

($[v]_B^t$ *ist* $[v]_B$ transponiert)

$$\big\{\varphi_{ij} \bigm| \varphi_{ij}(v,w) \coloneqq b_i^*(v) c_j^*(w)\big\} \text{ ist Basis von } \mathcal{L}(V,W)$$