$\mathcal{P}^2(I)$ Polynomfunktionen auf $I = (0,1)$, mit Grad höchstens gleich 2

$$f \in \mathcal{P}^2 \;:\Leftrightarrow\; f(x) = ax^2 + bx + c \;(\forall x \in I)$$

$\mathcal{P}^2$ *ist* Vektorraum mit den **punktweisen** Operationen:

$$(f + f')(x) \coloneqq f(x) + f'(x), (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda(f(x))$$

denn: $(f+f')(x) = (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c') \;\Rightarrow\; (f+f') \in \mathcal{P}^2$

und $(\lambda f)(x) = (\lambda a)x^2 + (\lambda b)x + (\lambda c) \;\Rightarrow\; (\lambda f) \in \mathcal{P}^2$

$\mathrm{o} \in \mathcal{P}^2$ Nullvektor *ist* $\mathrm{o}(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0 \;(\forall x)$

Basis

p_0, p_1, p_2 mit $p_0(x) \coloneqq 1, p_1(x) \coloneqq x, p_2 = x^2 \;(\forall x)$

denn: B erzeugt P $\quad f(x) = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f = ap_2 + bp_1 + cp_0$

und: B *ist* linear unabhängig $\quad \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \mathrm{o}$

$\Rightarrow\; \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0 = 0$ für **alle** $x \in I$

$\Rightarrow\; \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *(mehr als zwei Nullstellen!)*

Lineare Abbildung

$\varphi : \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R},\; f \mapsto \int_I f(x)dx$

ist linear, denn $\int(f+g) = \int f + \int g$ und $\int(\lambda f)' = \lambda \int f$

es ist $\quad \varphi(f) = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = a/3 + b/2 + c$

$$\varphi(f) = [\varphi]_{B^*}[f]_B = \begin{pmatrix} \varphi(p_0) & \varphi(p_1) & \varphi(p_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

Linearer Operator

$L \coloneqq \frac{d}{dx} : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2,\ f \mapsto \frac{d}{dx} f = \frac{df}{dx}$

ist linear, denn $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g$ und $\frac{d}{dx}(\lambda f) = \lambda(\frac{d}{dx} f)$

es ist $L(f) = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$

oder anders $L(cp_0 + bp_1 + ap_2) = bp_0 + (2a)p_1 + 0p_2$

$$\textit{also } [L]_B = [(L(p_0), L(p_1), L(p_2))]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(abhängig von der Reihenfolge der Basisvektoren!)

Inneres Produkt

$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_0^1 f(x)g(x)dx$ definiert ein inneres Produkt

denn: $\int (f + f')g = \int fg + \int f'g$, $\int fg = \int gf$

und: $\int f^2 \geq 0$, sowie $= 0$ nur für $a = b = c = 0$

es ist: $\langle f, f' \rangle = [f]_B^t A [f']_B$

wobei $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \langle p_i, p_j \rangle$

$$\textit{also} \qquad A = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw. $\langle f, f' \rangle = aa'/5 + (ab' + ba')/4 + (ac' + bb' + ca')/3 + (bc' + cb')/2 + cc'$