

# Lineare Algebra für Physik

WS 2005 Peter Schmitt

Aufgaben für den 10.–14. Oktober

*Beachte:* Aufgaben mit Stern (\*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

## Literatur (einige Beispiele)

Klaus Jänich, Lineare Algebra (*ein Skriptum für Anfänger*)

Howard Anton, Lineare Algebra (*sehr breit*)

Gilbert Strang, Lineare Algebra (*ausführlich*)

Paul R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces (*gut, aber anspruchsvoll*)

Weltner, Mathematik für Physiker 2 (*verbreitet, aber weniger empfehlenswert*)

*allgemeine Nachschlagewerke:*

Kleine Enzyklopädie Mathematik (*alt, aber immer noch empfehlenswert*)

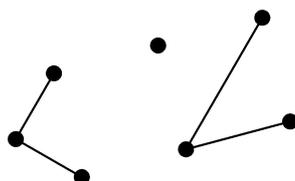
Bronstein et al., Taschenbuch der Mathematik (*eine bewährte Formelsammlung*)

## Einleitung: Koordinaten

(1\*) (*Koordinaten auf einer Geraden*)

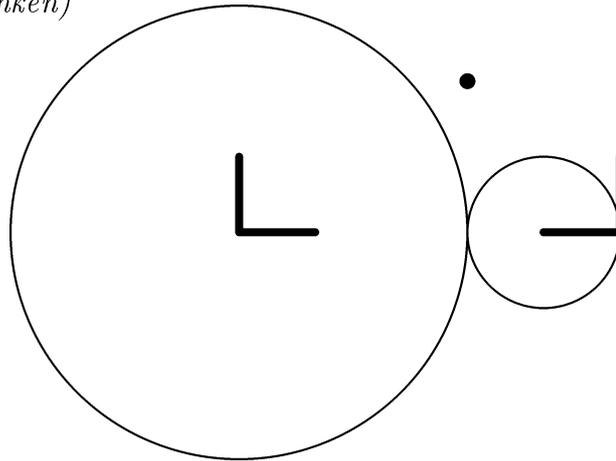


- (a) Bestimme die Koordinaten der Punkte  $O$ ,  $O'$ ,  $E$ ,  $E'$ , und  $P$  bezüglich  $OE$  und  $O'E'$ .
- (b) Finde Koeffizienten  $a, b$  bzw.  $c, d$ , sodaß für diese Koordinaten  $x$  und  $x'$  gilt:  
 $x' = ax + b$  bzw.  $x = cx' + d$
- (2\*) (*Koordinaten in einer Ebene*)



- (a) Bestimme die Koordinaten der eingezeichneten Punkte in Bezug auf die beiden eingezeichneten Achsenkreuze.
- (b) Finde Koeffizienten  $a, b, c, d, e, f$ ,  
sodaß für diese Koordinaten  $x, y$  und  $x', y'$  gilt:  
 $x' = ax + by + c$  und  $y' = dx + ey + f$
- (c) (*analog*) Drücke die Koordinaten  $x, y$  durch  $x', y'$  aus.
- (3\*) (*Zusammensetzung bei Koordinatenwechsel*)  
Setze die Formeln für  $x, y$  aus (2c) in die Formeln aus (2b) ein.  
Was erkennt man?
- (4) (*Zusammensetzung*)  
Was erhält man, wenn man die allgemeinen Formeln aus (2c) in (2b) einsetzt?  
Kann das mit Matrizen geschrieben werden?

(5) (Zum Nachdenken)



Bei einer Jahrmarktattraktion rollt die Kabine mit den Passagieren an einem Kreis ab. Sie braucht eine Minute für eine Umkreisung. Beschreibe die Position des Fahrgastes aus Sicht eines Beobachters (*Achsenkreuz im Zentrum der Anlage*) und die der Anlage (*Mittelpunkt*) aus Sicht des Fahrgastes (*Achsenkreuz am Rand des kleinen Kreises*).

(a) nach 15 Sekunden (b) nach 30 Sekunden

(c) nach 5 Sekunden (d) nach  $t$  Sekunden.

(e) Beschreibe die Position eines Beobachters (*Punkt*) aus Sicht des Fahrgastes.

### Rechnen mit Matrizen

$$A_0 = (2), A_1 = (1 \ 2) \ A_2 = (1 \ 2 \ 3)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6\*) (*Summe und Produkt von Matrizen*)

Für welche der oben angegebenen Matrizen sind die Ausdrücke

$A_i A_j$ ,  $A_i(A_j + A_k)$  bzw.  $A_i A_j A_k$  definiert. Berechne einige davon!

(7) (*Assoziativität*)

Berechne  $A(BC)$  und  $(AB)C$  für allgemeine  $(2 \times 2)$ -Matrizen.

(8) (*Potenzen von Matrizen*)

Warum gilt (für quadratische Matrizen)  $A$  und  $A^n$  immer das Kommutativgesetz  $A^n A = A A^n$ ?

(9\*) (*Blockmatrizen*)

$$\text{Für } A = \begin{pmatrix} (1 & 2) \\ (3 & 4) \end{pmatrix} \text{ und } B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

berechne  $AB$  und  $BA$  und vergleiche mit  $C^2$  für  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .