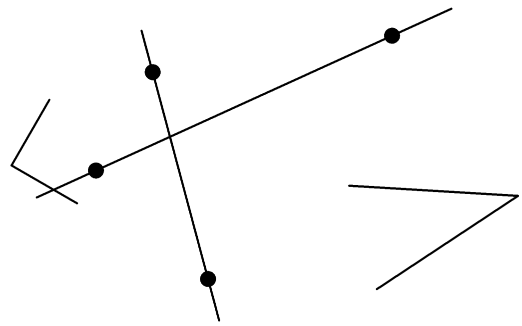
Lineare Algebra für Physik

WS 2005 Peter Schmitt *Aufgaben ab dem 17. Oktober*

Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

Koordinatensysteme

(10*) *(Schnitt von Geraden)*



(a) Beschreibe die beiden Geraden durch Gleichungen
bezüglich der beiden eingezeichneten Achsenkreuze.

(b) Ermittle den Schnittpunkt der beiden Geraden in beiden Koordinatensystemen
(und vergleiche bzw. überprüfe das Ergebnis).

(11) *(Geradengleichung bei Koordinatenwechsel)*
Setze die Formeln für den Wechsel des Bezugssystems
– für x, y aus (2c) – in die Gleichungen aus (10a) ein.
Was erkennt man? *Verwende (auch) die Matrizenschreibweise!*

(12*) *(Ebenen im Raum)*
Ermittle den Schnittpunkt der folgenden drei Ebenen E_i,
von denen jeweils drei Punkte durch Angabe ihrer Koordinaten bekannt sind:

(a) E_1: $(-1 \quad 2 \quad 2)$, $(2 \quad -1 \quad 2)$, $(-1 \quad 0 \quad 4)$

(b) E_2: $(1 \quad 2 \quad 2)$, $(0 \quad 1 \quad 2)$, $(2 \quad 3 \quad 0)$

(c) E_3: $(2 \quad 2 \quad 3)$, $(3 \quad -1 \quad 1)$, $(1 \quad 3 \quad 3)$

(13) *(Zum Nachdenken)*
Finde das Achsenkreuz, in dem

der Punkt links oben die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

der Punkt rechts oben die Koordinaten $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

und der Punkt unten die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhält.

Lineare Gleichungssysteme

(14) *(Einfluß der Koeffizienten)*
Löse die folgenden Gleichungssysteme
und vergleiche Angaben und Ergebnisse miteinander:
(a) $x + y = 1,\ 100001x + y = 2$
(b) $x + y = 1,\ x + 1,0001y = 2$
(c) $1,000000001x + y = 1,\ x + 1,000000001y = 2$

(15*) *(Gleichungssysteme mit vier Unbekannten)*
Finde alle Lösungen der folgenden Systeme :

(a) $y + z = 1 - x,\ u + y + 1 + z = 0,\ x + y = 2 - u,\ u + 2x + z + 2 = x.$

(b) $1 + a + b + c = 0,\ b + c + d = 2,\ 2 + d + a + b = b - c,\ 1 = a + b + d.$

(c) $\lambda + \mu + \nu = 0,\ s + \mu + \nu = 0,\ s + \lambda + \mu = 4,\ \lambda + \mu + \nu = 4 - \mu - s.$

(16*) *(Matrizengleichungen)*
(Für die Matrizen A_i von Aufgabe (6).)

(a) Löse ein paar der homogenen Gleichungssysteme $A_i x = 0$
(x ein passender Spaltenvektor).

(b) Finde Lösungen für ein paar der Matrizengleichungen $A_i X = A_j$
(X eine passende Matrix).

(17*) *(Blockmatrizen)*
Es sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine $(n \times r)$-Matrix.
Ferner sei $n = n_1 + n_2$ ($n_i > 0$).
Wir definieren vier Matrizen wie folgt:
$C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij}$ für $j = 1, \ldots, n_1$
$D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = a_{i(n_1+j)}$ für $j = 1, \ldots, n_2$
$E = (e_{jk})$ mit $e_{jk} = b_{jk}$ für $j = 1, \ldots, n_1$
$F = (f_{jk})$ mit $f_{jk} = b_{(n_1+j)k}$ für $j = 1, \ldots, n_2$

(a) Berechne AB und vergleiche das Ergebnis mit
dem Produkt $\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$ von Blockmatrizen.

(b) *(Zum Nachdenken)*
Läßt sich daraus eine allgemeine Aussage für das Rechnen mit Blockmatrizen ableiten?