*Beachte:* Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

## Umgang mit dem Summenzeichen

(18) *(Matrizen)*
Für allgemeine Matrizen zeige:
(a) $A(B+C) = AB + AC$
(b) $(AB)C = A(BC)$

(19) *(Rechnen mit Matrizen)*
Für quadratische Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$
mit $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ und $b_{ij} = \dfrac{j}{i+1}$ berechne
(a) $A + B$ und (b) $AB$.

(20) *(Gleichungssysteme)*
Löse die Gleichungssysteme: ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und gleich 0 sonst.)

(a) $nx_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})x_j = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(1-\delta_{ij})jx_j = 1$ $(i = 0, \ldots, n)$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(1-\delta_{ij})(j+1)x_j = 1$ $(i = 0, \ldots, n)$

## Vektorräume

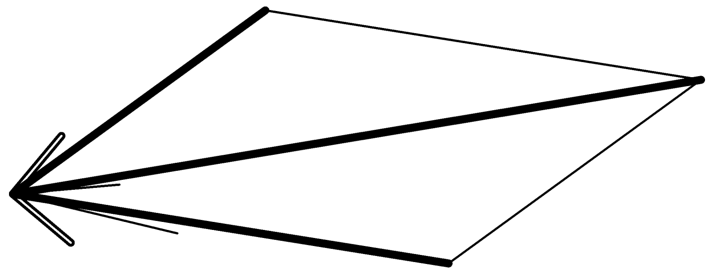
(21) *(Folgerungen aus den Axiomen)*
Beweise: In Vektorräumen $V$ gilt für alle $v \in V$
(a) $0 \cdot v = \mathrm{o}$
(b) $(-1) \cdot v = -v$
(c) $n \cdot v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v$ für alle $n \in \mathbb{N}$
(d) *(Zum Nachdenken)* Läßt sich auch für $\lambda \cdot v$ für irrationales $\lambda$ etwas aussagen?

(22) *(komplexe Vektorräume)*
Die Multiplikation eines Vektors $v = (v_i)$ mit einem Skalar ist in $\mathbb{C}^n$ durch
$\lambda \cdot (v_i) := (\lambda v_i)$ definiert.
(a) Zeige, daß man auch mit der Definition
$\lambda \circ (v_i) := (\overline{\lambda} v_i)$
einen Vektorraum $\overline{\mathbb{C}^n}$ über $\mathbb{C}$ erhält.
(b) Sind die Abbildungen $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{C}^n \to \overline{\mathbb{C}^n}$,
die für $v = (v_i)$ durch $\phi_1(v) := (v_i)$ bzw. durch $\phi_2(v) := (\overline{v_i})$ definiert sind,
lineare Operatoren bzw. Vektorraumisomorphismen?
(Ist $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, so ist $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ die dazu *konjugierte* komplexe Zahl.)

(23) *( $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ )*
Zeige: $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^n$ sind als Vektorräume über $\mathbb{R}$ isomorph.

(24) *(Vektoraddition)*

(a) Überprüfe, daß in beiden Bezugssystemen
*(schiefes Achsenkreuz: dünn gezeichnet, kartesisches Achsenkreuz: mit Doppelstrich)*
die Addition der Koordinaten der Addition mittels „Kräfteparallelogramm“ entspricht:



(b) Zeige (in der Ebene) durch geometrische Überlegungen, daß das allgemein gilt.

(25*) *(Teilräume)*
Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind
Teilräume des entsprechenden $\mathbb{R}^n$ und/oder $\mathbb{C}^n$?
*(Warum? Beschreibe – wo möglich – die Mengen durch Skizzen.)*

(a) $\{(x_1, 2x_2, x_1 + x_2 + c) \,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ $(c \in \mathbb{R})$
(b) $\{(x_1, 2x_2, x_1x_2) \,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$
(c) $\{(x, 2y) \,|x + y^2 = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$
(d) $\{(x, y, z) \,|x + y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
(e) $\{(x, y, z) \,|x + y + z = 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
(f) $\{(x, y, z) \,|x + y < z, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
(g) $\{(x, y, z) \,|x + y = y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
(h) $\{(x, 2y) \,|x + y = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$
(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \,|x_1^2 = x_3^2, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
(j) $\{(x, y) \,|x^2 + y^2 > 0\}$
(k) $\{(\lambda, \lambda^3, \lambda^5) \,|\lambda \in \mathbb{R}\}$
(l) $\{(\lambda, \mu^2, \nu^3) \,|\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$
(m) $\{(\lambda, \mu^3, \nu^5) \,|\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$
(n) $\{(x + y\mathrm{i}, x - y\mathrm{i}) \,|x, y \in \mathbb{R}\}$
(o) $\{(x + y\mathrm{i}, x, y\mathrm{i}) \,|x, y \in \mathbb{R}\}$

(26*) *(Teilräume)*
Beschreibe (möglichst einfach) die folgenden Teilräume
(im passenden $\mathbb{R}^n$ und/oder $\mathbb{C}^n$):

(a) $\langle(1, 2, 3), (3, 2, 1)\rangle$
(b) $\langle(1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\rangle$
(c) $\langle(1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, -1, 1)\rangle$
(d) $\langle(2, 0, 0), (0, \sqrt{5}, 0)\rangle$
(e) $\langle(1, i, 1 + i), (i, 1, 0)\rangle$
(f) $\langle(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\rangle$

(27) *(Teilräume)*
(a) *Zeige:*
Der Durchschnitt zweier *(bzw. beliebig vieler)* Teilräume eines Vektorraums
ist ein Teilraum.
(b) *Daher gilt:*
Der von einer Teilmenge eines Vektorraums erzeugte Teilraum ist
der Durchschnitt aller Teilräume, die diese Teilmenge enthalten.