Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

Gleichungssysteme

(28) *(Gaußelimination)*
Wende den Algorithmus mechanisch auf das folgende Gleichungssystem an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(29) *(Gaußelimination)*
Beschreibe im Detail die Fortsetzung des Eliminationsverfahrens durch „Entfernung“ nichtverschwindender Koeffizienten über den Einsen in der Zeilenstufenform.

Vektorräume

(30*) *(lineare Abbildungen)*
Welche der folgenden Funktionen sind linear (über $\mathbb{R}$ und/oder $\mathbb{C}$)?

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x + y)$
(b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x, 2x + c)\ (c \in \mathbb{R})$
(c) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, y) \mapsto (x_1 - x_2, 3y, y + x_2)$
(d) $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ (z_1, z_2, z_3) \mapsto (0, z_1 + 2z_2 - \mathrm{i}z_3, 0)$
(e) $\mathbb{C}^1 \to \mathbb{C},\ (x + y\mathrm{i}) \mapsto (x - y\mathrm{i})$
(f) $\mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^2,\ (x + y\mathrm{i}) \mapsto (x, -y\mathrm{i})$
(g) $\mathbb{C}^1 \to \mathbb{R}^3,\ (x + y\mathrm{i}) \mapsto (x, y, 0)$
(h) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3,\ (x, y, z) \mapsto (y, y, 0)$
(i) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (y, x + 2y, 3z - 1)$
(j) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x, y, (x - y)(x + y))$
(k) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto ((x + c)^n - (x - c)^n)\ (n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R})$
(l) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, \ldots, x_1)$
(m) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x_k$
(n) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

(31*) *(Basis und lineare Funktionen)*
(a) Ermittle die Matrizendarstellungen der linearen Funktionen aus Aufgabe (30) bezüglich der Standardbasen.
(b) Ermittle für einige dieser linearen Funktionen auch die Darstellung bezüglich der Basen $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ bzw. $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.
(c) Überprüfe an den Daten aus (b) die Formeln für den Basiswechsel.

(32*) *(linear (un)abhängig)*
Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear unabhängige Teilmengen des entsprechenden $\mathbb{R}^n$ und/oder $\mathbb{C}^n$?

(a) $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6)\}$
(b) $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (-3, -4, -5, -6)\}$
(c) $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$
(d) $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 2)\}$
(e) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 4, 8), (1, 3, 9, 27), (-1, 1, -1, 1)\}$

(33*) *(linear unabhängig)*

Es seien $v_i \in V$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum.
Sind dann die folgenden Mengen linear unabhängig?

(a) $\{v_i + v_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n-1\}$

(b) $\left\{ \sum_{i=0}^{I} v_i \;\middle|\; I = 0, \ldots, n \right\}$

(c) $\left\{ \sum_{k=0}^{n} (1 - \delta_{ik}) v_k \;\middle|\; i = 0, \ldots, n \right\}$

(34*) *(Basis)*

(Für die Mengen aus Beispiel 32)

(a) Finde maximale linear unabhängige Teilmengen und ergänze sie zu einer Basis des jeweiligen Raumes.

(b) Finde dazu die Koordinaten einiger der folgenden Vektoren:
$(1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1), (-5, 0, 5)$ bzw.
$(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 0, 5)$

Linearkombinationen

(35) *(Linearkombinationen)*

Es seien $w_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k^i v_i$ $(k = 1, \ldots, m)$ Linearkombinationen von Vektoren $v_i \in V$.
Zeige, daß dann auch
jede Linearkombination $w = \sum_{k=1}^{m} \mu^k w_k$ eine Linearkombination der v_i ist,
und berechne diese. $(\lambda_k^i, \mu^k \in K.)$

(36) *(Kegel)*

Eine Teilmenge $K \subset V$ heißt **Kegel**, wenn sie gegenüber der Addition und gegenüber der Multiplikation mit einem nicht-negativen Skalar abgeschlossen ist.
Was wird man unter dem von einer Menge $S \subset V$ *erzeugten* Kegel verstehen, und wie kann man ihn beschreiben?

(37) *(Konvexkombinationen)*

Eine Linearkombination $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$
heißt Konvexkombination (der Vektoren v_i aus einem Vektorraum über $\mathbb{R}$), wenn
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ und alle $\lambda_i \geq 0$ sind.

(a) Zeige: Die Menge $\{\lambda v + (1 - \lambda) w \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset V$ ist *(bei geometrischer Interpretation)* die Strecke zwischen v und w.

(b) Welche Menge (im Raum) wird durch $\{\lambda u + \mu v + \nu w \mid 0 \leq \lambda, \mu, \nu, \lambda + \mu + \nu = 1\}$ beschrieben?

(c) Es seien w_k Konvexkombinationen von Vektoren $v_i \in V$.
Zeige, daß dann auch jede Konvexkombination w der Vektoren w_k eine Konvexkombination der v_i ist, und berechne diese.

(d) Als *konvexe Hülle* von S bezeichnet man die kleinste gegenüber Konvexkombinationen abgeschlossene Menge. Wie kann man sie beschreiben?