Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

Basiswechsel

(38*) *(lineare Funktionen)*
Es seien $v_1 = (3,2), v_2 = (2,-1)$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Durch $\varphi(v_1) = 2$ und $\varphi(v_2) = 3$, sowie durch $L(v_1) = (1,2)$ und $L(v_2) = (3,-1)$ seien eine lineare Abbildung φ und ein linearer Operator L definiert. Ferner sei mit $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ eine weitere Basis.
(a) Stelle φ und L bezüglich der Standardbasis dar.
(b) Stelle φ und L bezüglich B dar.
(c) Ermittle eine Matrizenformel zur Umrechnung von Koordinaten bezüglich v_1, v_2 auf Koordinaten bezüglich B.
(d) Erprobe diese Formel an (b).

Determinanten

(39*) *(Methodenvergleich)*
Berechne die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
(a) explizit (*i.e.*, Summe über alle Permutationen),
(b) durch Entwickeln nach einer Zeile,
(c) durch Zeilen- und Spaltenumformungen *(bis die Zahl der Nullen maximal ist)*

(40*) *(Determinanten)*
Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:
(a) $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & -3 \\ 4 & 8 & 13 & 10 \end{pmatrix}$

(41*) *(Cramersche Regel)*
Löse das Gleichungssystem
$x + y + z = 2,\ 2x - y - z = 1,\ x + y + +2z = 5$
mit der Cramerschen Regel.

(42) *(Cramersche Regel)*
Wie kann die Inverse zu einer regulären Matrix mit der Cramerschen Regel ermittelt (und geschrieben) werden?

Wird eventuell noch ergänzt!

Empfehlungen

Wiederhole und durchdenke den Beweis des Austauschsatzes und formuliere ihn dann aus dem Gedächtnis und mit eigenen Worten möglichst genau schriftlich.

Wiederhole bzw. lerne das griechische Alphabet!

Wiederhole bzw. lerne das Rechnen mit komplexen Zahlen!

Funktionenräume

(43) *(reelle Funktionen)*
Welche der folgenden Mengen reeller Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind Vektorräume (als Teilräume des Vektorraums $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ aller dieser reellen Funktionen)?
(a) die stetigen Funktionen
(b) die stetigen Funktionen mit endlich vielen Nullstellen
(c) die konstanten Funktionen
(d) die monotonen Funktionen
(e) die streng monoton wachsenden Funktionen
(f) $\{\varphi \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \mid \varphi(a) = c\}$ (für $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}$)
(g) die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad n
(h) die Menge aller Polynomfunktionen
(i) die Menge aller Polynomfunktionen mit einer Nullstelle in I

(44) *(Folgenräume)*
Welche der folgenden Mengen reeller Zahlenfolgen (auf derselben Indexmenge) bilden einen Vektorraum?
(a) die Nullfolgen
(b) die Folgen, die ab einem Index konstant sind
(c) die alternierenden Folgen
(d) die summierbaren Folgen

(45) *(Basis bei Funktionenräumen)*
(Zum Nachdenken)
(a) Für welche der Vektorräume aus (43-44) läßt sich *(leicht)* eine Basis angeben?
(b) Suche in den anderen Fällen nach einer möglichst großen linear unabhängigen Menge von Funktionen.
(c) Welchen Teilraum erzeugen die Funktionen mit $f_a(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$ $(a \in I)$?

(46) *(linear unabhängige Funktionen)*
(a) *Zeige:* Die Polynomfunktionen p_n mit $p_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sind linear unabhängig. (*Wiederholung!*)
(b) *Zeige:* Die Funktionen t_n mit $t_{2n(x)} := \cos nx$ und $t_{2n+1(x)} := \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$ und $I = [0, 2\pi]$ sind linear unabhängig.
(*Hinweis:* Für eine Linearkombination
betrachte die Funktionswerte für geschickt gewählte Argumente x.)

(47) *(direkte Summe)*
Eine reelle Funktion heißt **gerade**, wenn (für alle $x \in \mathbb{R}$) $f(x) = f(-x)$ gilt, und **ungerade**, wenn $f(x) = -f(-x)$ gilt.
Zeige: Der Raum aller reellen Funktionen ist direkte Summe des (Teil-)Raums aller geraden und des (Teil-)Raums aller ungeraden Funktionen.
(*Hinweis:* Zu f betrachte die Funktionen definiert durch $f(x)+f(-x)$ und $f(x)-f(-x)$.)

Wird eventuell noch ergänzt!